

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

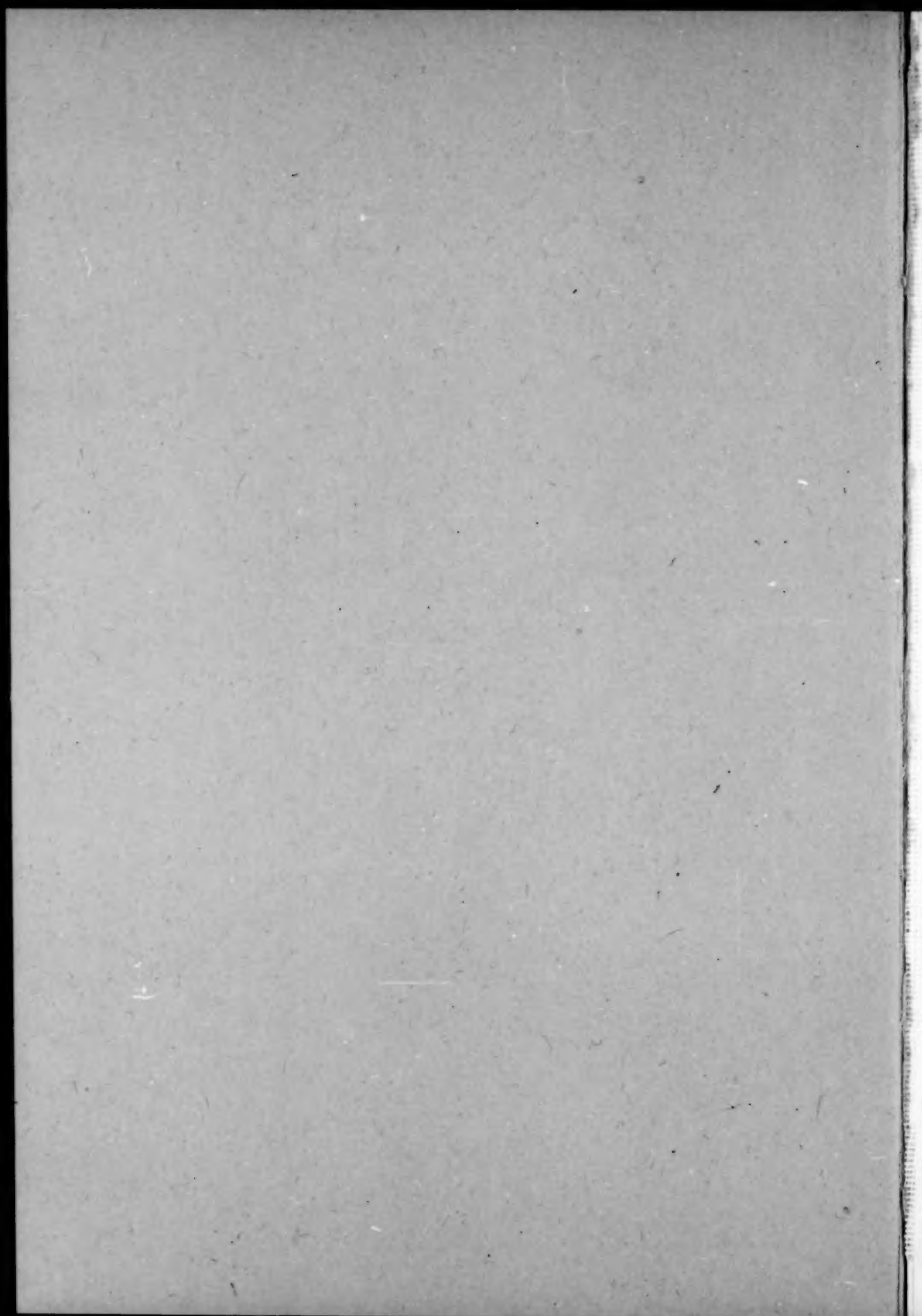
UNTER MITWIRKUNG VON
HEINRICH BEHNKE ERICH HECKE
IN MÜNSTER I. W. IN HAMBURG

BARTEL L. VAN DER WAERDEN
IN LEIPZIG

116. BAND



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1939



MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRUNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFUHRT DURCH
FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

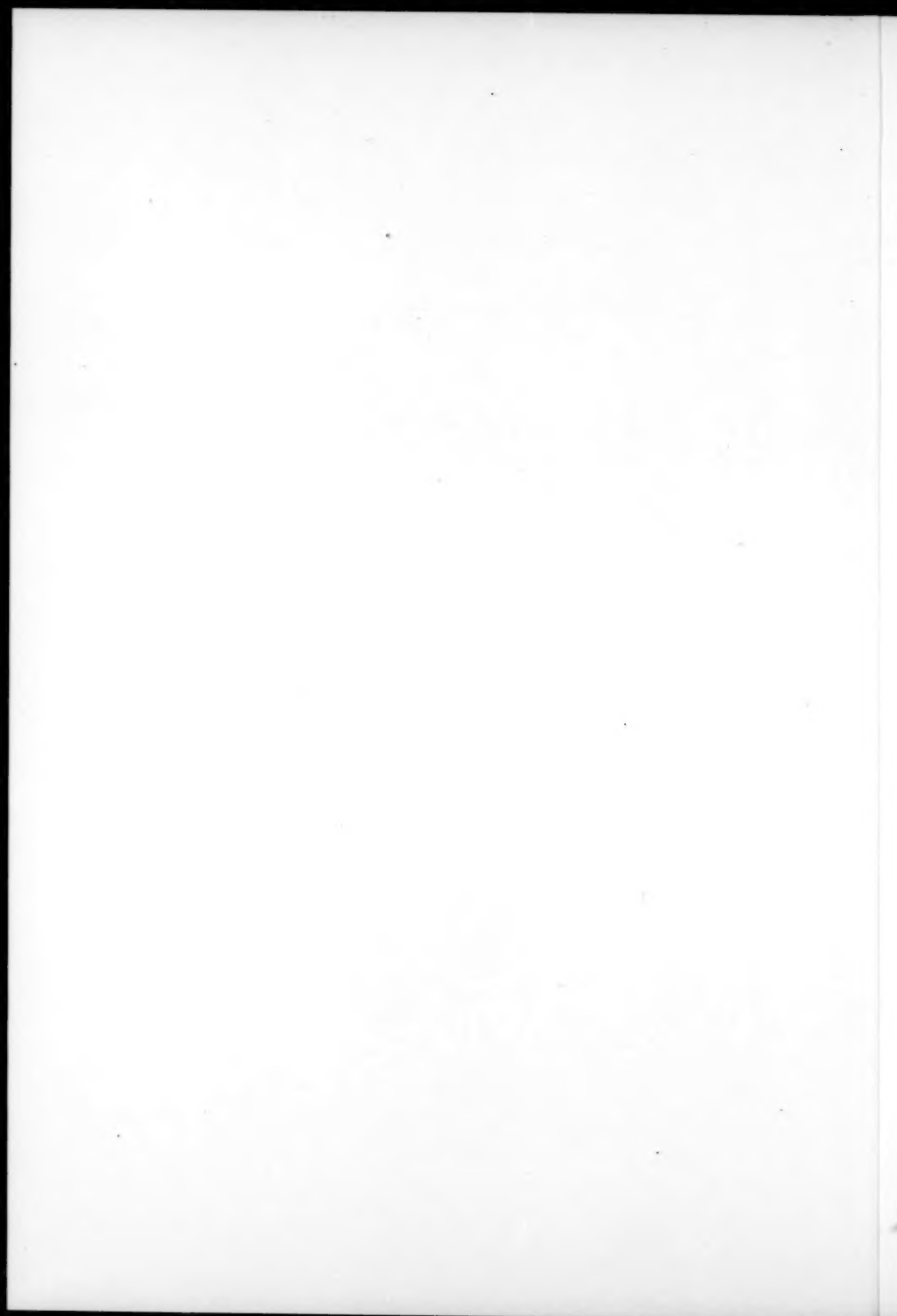
UNTER MITWIRKUNG VON
HEINRICH BEHNKE ERICH HECKE
IN MÜNSTER I. W. IN HAMBURG

BARTEL L. VAN DER WAERDEN
IN LEIPZIG

116. BAND



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1939



Inhalt des 116. Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

	Seite
Behnke, H. und K. Stein , Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität.	204
(Anschrift: Münster i. Westf., Mathematisches Seminar der Universität)	
Besicovitch, A. S. , On the fundamental geometrical properties of Linearly measurable plane sets of points (III).	349
(Anschrift: Cambridge [England], Trinity College)	
Bradistilov, G. , Über periodische und asymptotische Lösungen beim n -fachen Pendel in der Ebene	181
(Anschrift: Sofia [Bulgarien], Opaltschenska 113)	
Bradistilov, G. , Über periodische Bewegungen des n -fachen Pendels in der Ebene (Anschrift: Sofia [Bulgarien], Opaltschenska 113)	602
Chow, W.-L. , Einfacher topologischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (Anschrift: Shanghai [China], 475 Route Tenant de la Tour)	463
Chow, W.-L. , Über die Multiplizität der Schnittpunkte von Hyperflächen	598
(Anschrift: Shanghai [China], 475 Route Tenant de la Tour)	
van der Corput, J. G. , Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten	1
(Anschrift: Groningen [Holland], Nieuwe Boteringestraat 23)	
Damköhler, W. , Funktionen geringster Steilheit	104
(Anschrift: München-Grünwald, Portenlängerstraße 25)	
Berichtigung zu der Arbeit von Wilhelm Damköhler: „Funktionen geringster Steilheit“	155
Dickinson, D. R. , Study of extreme cases with respect to the densities of irregular linearly measurable plane sets of points	358
(Anschrift: Bridgnorth, Shropshire [England], 24 High Street)	
Eichler, M. , Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz	742
(Anschrift: Göttingen, Mathem. Institut der Universität, Bunsenstraße)	
Foussianis, Chr. , Über einige Eigenschaften der symmetrischen Funktionen $S(\alpha_n, k)$ (Anschrift: Leipzig C 1, Kochstraße 8 ^{III} r.)	610
Foussianis, Chr. G. , Über eine Binomialkoeffizienten-Identität	749
(Anschrift: Leipzig C 1, Kochstraße 8 ^{III} r.)	
Fröhlich, W. , Beiträge zur Theorie der Zöpfe. II. Die Lösung des Transformationsproblems für eine besondere Klasse von Viererzöpfen	281
(Anschrift: Prag [CSR.], Uralské nám. 1/II)	
Golab, St. , Über den Begriff der „Pseudogruppe von Transformationen“	768
(Anschrift: Kraków [Polen], Al. Michiewicza 30)	
Groscheide F. Wzn., G. H. A. , Eine Abbildung der Linienelemente einer Ebene auf Raumpunkte	334
(Anschrift: Amsterdam-Zuid [Holland], Amsteldyk 85)	
Hecke, E. , Grundlagen einer Theorie der Integralgruppen und der Integralperioden bei den Normalteilern der Modulgruppe	469
(Anschrift: Hamburg-Fu., Kleekamp 34)	
Hopf, H. und H. Schlicht , Über Isometrie und stetige Verbiegung von Flächen	58
(Anschrift: Zollikon b. Zürich [Schweiz], Alte Landstr. 37 und Biel [Schweiz], Pavillonweg 12)	
Hyers, D. H. u. A. D. Michal , Differential Invariants in a General Differential Geometry (Anschrift: Pasadena, Calif. [USA.], California Institute of Technology)	310
Jørgensen, V. , Über die Randableitung einer beschränkten analytischen Funktion nebst einer Anwendung auf den Picardschen Satz	658
(Anschrift: Kopenhagen [Dänemark], Sct. Annagade 33')	
Berichtigung zu der Arbeit von V. Jørgensen: „Über den Gültigkeitsbereich des Picardschen Satzes“, Math. Annalen 115, S. 710–719	616
Keller, O.-H. , Eine Bemerkung zur Berechnung der Diskriminante imprimitiver Gleichungen, insbesondere der Ikosaedergleichung	456
(Anschrift: Charlottenburg 5, Schloßstraße 45)	
Keller, O.-H. , Eine Bemerkung zu den verschiedenen Möglichkeiten, eine Zahl in einen Kettenbruch zu entwickeln	733
(Anschrift: Charlottenburg 5, Schloßstraße 45)	
Köthe, G. , Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen	719
(Anschrift: Münster i. Westf., Mathem. Seminar der Universität)	

	Seite
Koksma, J. F. , Anwendung des Perronschen Beweises eines Satzes von Minkowski (Anschrift: Amsterdam [Holland], Dintelstraße 122)	464
Lammel, E. , Über Interpolationsreihen	524
(Anschrift: Prag [Böhmen], Husova 5. Deutsche Technische Hochschule)	
Leuse, J. , Über isotrope Mannigfaltigkeiten	297
(Anschrift: München, Technische Hochschule)	
Maak, W. , Oberflächenintegral und Stokes-Formel im gewöhnlichen Raume. (Integralgeometrie 29)	574
(Anschrift: Heidelberg, Mathematisches Institut, Hauptstraße)	
Michal, A. D. u. D. H. Hyers , Differential Invariants in a General Differential Geometry (Anschrift: Pasadena, Calif. [USA.], California Institute of Technology)	310
Morris, R. M. , The internal problems of two-dimensional potential theory . . .	374
(Anschrift: Cambridge [England], Girton College)	
Neumann, E. R. , Randwertaufgabe und Greensche Funktion der Potentialtheorie bei Außengebieten und die Beziehungen zu den Innengebieten	534
(Anschrift: Marburg a. d. Lahn, Schwanallee 9)	
Neumann, E. R. , Über die konforme Abbildung komplementärer Gebiete . . .	664
(Anschrift: Marburg a. d. Lahn, Schwanallee 9)	
Petersson, H. , Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funkti- onalgleichung durch Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung I. . .	401
(Anschrift: Hamburg-Fu., Niedernstegen 19)	
Picard, S. , Sur les bases du groupe symétrique et du groupe alternant	752
(Anschrift: Neuchâtel [Schweiz], Cassardes 14a)	
Pleh, W. , Über die Strenge vollständiger Systeme von Gruppenpostulaten	51
(Anschrift: Wien 18, Alsegger Straße 6)	
Plickert, G. , Neue Methoden in der Strukturtheorie der kommutativ-assoziativen Algebren	217
(Anschrift: Eisenach, Mülhauser Straße 9)	
Rellich, F. , Störungstheorie der Spektralzerlegung. III. Mitteilung. Analytische, nicht notwendig beschränkte Störung	555
(Anschrift: Dresden, Technische Hochschule)	
Ridder, J. , Das allgemeine Perron-Stieltjesche Integral (IPS)-Integration II) . .	76
(Anschrift: Groningen [Holland], Kraneweg 17a)	
Schilt, H. und H. Hopf , Über Isometrie und stetige Verbiegung von Flächen . .	58
(Anschrift: Zollikon b. Zürich [Schweiz], Alte Landstr. 37 und Biel [Schweiz], Pavillonweg 12)	
Schoeneberg, B. , Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsub- stitutionen	511
(Anschrift: Hamburg 13, Klosterallee 33)	
Berichtigung zu der Arbeit von B. Schoeneberg: „Das Verhalten von mehr- fachen Thetareihen bei Modulsstitutionen“, Mathem. Ann. 116, S. 511—523	780
Seebach, K. , Über die Erweiterung des Definitionsbereiches differenzierbarer Funktionen	701
(Anschrift: München 38, Walhallastraße 51)	
Siegel, C. L. , Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades . .	617
(Anschrift: Göttingen, Mathem. Institut der Universität)	
Stein, K. und H. Behnke , Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität	204
(Anschrift: Münster i. Westf., Mathematisches Seminar der Universität)	
Svartholm, N. , Die Lösung der Fuchschen Differentialgleichung zweiter Ord- nung durch hypergeometrische Polynome	413
(Anschrift: c/o. Hakansson, Danderyd bei Stockholm [Schweden], Blomster- stegen 6)	
Terpstra, F. J. , Die Darstellung biquadratischer Formen als Summen von Qua- draten mit Anwendung auf die Variationsrechnung	166
(Anschrift: Hilversum [Holland], Koninginneweg 6a bei Plooy)	
van der Waerden, B. L. , Nachruf auf Otto Hölder	157
(Anschrift: Leipzig 83, Fockestraße 8a)	
Weeken, F. , Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren	422
(Anschrift: Marburg a. d. Lahn, Haspelstraße 9)	
Yü, C.-F. , On the vertices of an oval	571
(Anschrift: Kunming, Yunnan [China], Southwestern United University)	

Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten.

Von

J. G. van der Corput in Groningen (Niederlande).

Einleitung.

Diese Arbeit besteht aus vier Paragraphen, von denen der erste die Anzahl $F_2(t)$ der Darstellungen $t = Kp + K'p'$, weiter die Anzahl $F_3(t)$ der Darstellungen $t = Kp + K_1p_1^2 + K_2p_2^2$ und schließlich die Anzahl $F_4(t)$ der Darstellungen $t = K_1p_1^2 + K_2p_2^2 + K_3p_3^2 + K_4p_4^2$ behandelt; hierin sind $K, K', K_1, K_2, K_3, K_4$ gegebene ganze Zahlen $\neq 0$ und $p, p', p_1, p_2, p_3, p_4$ Primzahlen, die in gegebenen Intervallen liegen. In § 1 wird auch noch untersucht, welche Zahlen s auf die Gestalt

$$\begin{aligned} s &= Kp + K'p' + \chi(x) & \text{bzw. } s &= Kp + K'p' + \chi(p''), \\ s &= Kp + K_1p_1^2 + K_2p_2^2 + \chi(x) & ,, \quad s &= Kp + K_1p_1^2 + K_2p_2^2 + \chi(p''), \\ s &= K_1p_1^2 + \dots + K_4p_4^2 + \chi(x) & ,, \quad s &= K_1p_1^2 + \dots + K_4p_4^2 + \chi(p'') \end{aligned}$$

gebracht werden können; hierin bezeichnet $\chi(x)$ irgendein gegebenes ganzwertiges Polynom, x eine in einem gegebenen Intervall liegende natürliche Zahl, p'' eine in einem gegebenen Intervall liegende Primzahl.

In § 2 behandle ich die Anzahl der Darstellungen $t = Kp + K'p'$, wobei K und K' gegebene ganze Zahlen $\neq 0$ bezeichnen und die Primzahlen p und p' nicht nur zu gegebenen Intervallen, sondern auch zu gegebenen arithmetischen Progressionen gehören. In demselben Paragraphen untersuche ich, welche Zahlen s auf die Gestalt $s = Kp + K'p' + \chi(x)$ bzw. $s = Kp + K'p' + \chi(p'')$ gebracht werden können, wobei die Primzahlen p, p', p'' und die natürliche Zahl x gegebenen Intervallen und gegebenen arithmetischen Progressionen angehören.

§ 3 enthält den Beweis der Sätze 1, 2 und 3; § 4 den Beweis von Satz 10. Die Beweise stützen sich auf die bekannte Methode, die Herr J. M. Vinogradow im Mai 1937 publiziert hat.

§ 1.

Darstellungen durch Primzahlen ohne Beschränkungen.

$F_2(t)$ sei die Anzahl der Darstellungen $t = Kp + K'p'$, wo K und K' gegebene ganze teilerfremde Zahlen $\neq 0$ bezeichnen und die Primzahlen p und p' in den gegebenen Intervallen

$$A < p \leq B, \quad A' < p' \leq B'$$

liegen. $F_3(t)$ sei die Anzahl der Darstellungen $t = Kp + K_1p_1^2 + K_2p_2^2$, wo K, K_1 und K_2 gegebene ganze Zahlen mit größtem gemeinsamen Teiler 1 bezeichnen und die Primzahlen p, p_1 und p_2 in den gegebenen Intervallen

$$A < p \leq B, \quad A_1 < p_1 \leq B_1, \quad A_2 < p_2 \leq B_2$$

liegen. Schließlich sei $F_4(t)$ die Anzahl der Darstellungen $t = K_1p_1^2 + \dots + K_4p_4^2$, wo K_1, K_2, K_3, K_4 gegebene ganze Zahlen mit größtem gemeinsamen Teiler 1 bezeichnen und die Primzahlen p_1, p_2, p_3, p_4 in den gegebenen Intervallen

$$A_1 < p_1 \leq B_1, \quad A_2 < p_2 \leq B_2, \quad A_3 < p_3 \leq B_3, \quad A_4 < p_4 \leq B_4$$

liegen. In dieser Arbeit wird stets

$$2 \leq A < B, \quad 2 \leq A' < B', \quad 2 \leq A_\sigma < B_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

angenommen.

Ich werde für $F_\sigma(t)$ ($\sigma = 2, 3, 4$) einen Approximativwert $\Omega_\sigma(t)$ $\Phi_\sigma(t)$ ableiten, der zwar vielleicht nicht für jedes ganze t , aber jedenfalls für sehr viele ganze t gilt. Die Größenordnung von $\Omega_\sigma(t)$ bzw. $\Phi_\sigma(t)$ wird durch den arithmetischen Charakter bzw. die Größenordnung von t bestimmt. Ich setze

$$(1) \quad \Phi_2(t) = \int_A^B \int_{A'}^{B'} \frac{d\omega d\omega'}{\log \omega \log \omega'},$$

$$|K\omega + K'\omega' - t| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Phi_3(t) = \int_A^B \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} \frac{d\omega d\omega_1 d\omega_2}{\log \omega \log \omega_1 \log \omega_2}$$

$$|K\omega + K_1\omega_1^2 + K_2\omega_2^2 - t| \leq \frac{1}{2}$$

und

$$\Phi_4(t) = \int_A^B \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} \int_{A_3}^{B_3} \int_{A_4}^{B_4} \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4}{\log \omega_1 \log \omega_2 \log \omega_3 \log \omega_4}$$

$$|K_1\omega_1^2 + \dots + K_4\omega_4^2 - t| \leq \frac{1}{2}$$

Für jedes zu KK' teilerfremde $t \neq 0$, das $\equiv K + K' \pmod{2}$ ist, werde

$$(2) \quad \Omega_2(t) = 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p|KK' \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}$$

und für alle übrigen ganzen t

$$\Omega_2(t) = 0$$

gesetzt.

Bei der Definition von $\Omega_3(t)$ bezeichne ich mit κ die größte ganze Zahl ≤ 3 mit der Eigenschaft, daß K durch $2^{\kappa-1}$ teilbar ist. Für jedes $t \neq 0$, das $\equiv K + K_1 + K_2 \pmod{2^\kappa}$ ist und keinen ungeraden Teiler > 1 besitzt, der in mindestens zwei der Zahlen K , K_1 und K_2 aufgeht, werde

$$(3) \quad \Omega_3(t) = 2^\kappa \prod_{p>2} (1 + H_3(p, t))$$

und für alle übrigen ganzen t

$$\Omega_3(t) = 0$$

gesetzt. Dabei wird $H_3(p, t)$ für jede ungerade Primzahl und für jedes ganze $t \neq 0$ festgelegt durch die folgende Definition, in der λ die Anzahl der durch p teilbaren Zahlen bezeichnet, die im System $K_1, K_2, -t$ auftreten, während μ die Anzahl der Quadratreste von p ist, die in diesem System vorkommen (also $\lambda + \mu \leq 3$); ich setze $v = 1$ oder -1 , je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv -1 \pmod{4}$ ist; $\varrho = 1$ oder 0 , je nachdem p ein Teiler von K ist oder nicht:

$$(4) \quad \begin{cases} (p-1)^{\lambda-\mu} H_3(p, t) = (1 + 3vp) (1-p)^\varrho & \text{falls } \lambda = 0, \mu = 0 \text{ oder } 3; \\ & = (1 - vp) (1-p)^\varrho & \text{falls } \lambda = 0, \mu = 1 \text{ oder } 2; \\ & = -(1 + (-1)^\mu vp) (1-p)^\varrho & \text{falls } \lambda = 1; \\ & = (-1)^\lambda (1-p)^\varrho & \text{falls } \lambda = 2 \text{ oder } 3. \end{cases}$$

Für jedes $t \neq 0$, das $\equiv K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \pmod{8}$ ist und keinen ungeraden Teiler > 1 enthält, der in mindestens drei der Zahlen K_1, K_2, K_3, K_4 aufgeht, werde

$$(5) \quad \Omega_4(t) = 8 \prod_{p>2} (1 + H_4(p, t))$$

und für alle übrigen ganzen t

$$\Omega_4(t) = 0$$

gesetzt. Dabei wird $H_4(p, t)$ für jede ungerade Primzahl und für jedes ganze $t \neq 0$ festgelegt durch die folgende Definition, in der λ die Anzahl der durch p teilbaren Zahlen bezeichnet, die im System $K_1, K_2, K_3, K_4, -t$ auftreten, während μ die Anzahl der Quadratreste von p ist, die in diesem System vorkommen (also $\lambda + \mu \leq 5$); ich setze $v = +1$ oder -1 , je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv -1 \pmod{4}$ ist:

$$\begin{aligned} (p-1)^{\lambda-\mu} H_4(p, t) &= -1 - 10vp - 5p^2 & \text{falls } \lambda = 0; \mu = 0 \text{ oder } 5; \\ &= -1 - 2vp + 3p^2 & \text{,, } \lambda = 0; \mu = 1 \text{ oder } 4; \\ &= -1 + 2vp - p^2 & \text{,, } \lambda = 0; \mu = 2 \text{ oder } 3; \\ &= 1 + 6vp + p^2 & \text{,, } \lambda = 1; \mu = 0 \text{ oder } 4; \\ &= 1 - p^2 & \text{,, } \lambda = 1; \mu = 1 \text{ oder } 3; \\ &= 1 - 2vp + p^2 & \text{,, } \lambda = 1; \mu = 2; \\ &= -1 - 3vp & \text{,, } \lambda = 2; \mu = 0 \text{ oder } 3; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 (p-1)^{4-\lambda} H_4(p, t) = -1 + \nu p & \text{falls } \lambda = 2; \mu = 1 \text{ oder } 2; \\
 = 1 + \nu p & \text{,, } \lambda = 3; \mu = 0 \text{ oder } 2; \\
 = 1 - \nu p & \text{,, } \lambda = 3; \mu = 1; \\
 = -1 & \text{,, } \lambda = 4.
 \end{array}$$

Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen werde ich die folgenden Eigenschaften ableiten:

1. Sind K und K' teilerfremd, so ist in einem hinreichend großen Intervall die Anzahl der ganzen Zahlen t , für die $F_2(t)$ nicht den Approximativwert $\Omega_2(t)$ $\Phi_2(t)$ besitzt, sehr klein im Verhältnis zu der Länge des betrachteten Intervalles.

2. Haben K , K_1 und K_2 den größten gemeinsamen Teiler 1, so ist in einem hinreichend großen Intervall die Anzahl der ganzen Zahlen t , für die $F_3(t)$ nicht den Approximativwert $\Omega_3(t)$ $\Phi_3(t)$ besitzt, sehr klein im Verhältnis zu der Länge des betrachteten Intervalles.

3. Haben K_1 , K_2 , K_3 und K_4 den größten gemeinsamen Teiler 1, so ist in einem hinreichend großen Intervall die Anzahl der ganzen Zahlen t , für die $F_4(t)$ nicht den Approximativwert $\Omega_4(t)$ $\Phi_4(t)$ besitzt, sehr klein im Verhältnis zu der Länge des betrachteten Intervalles.

Noch mehr. Ich führe ein ganzwertiges nicht-konstantes Polynom $\psi(x)$ und eine ganze Zahl s ein, und ich beweise unter sehr allgemeinen Voraussetzungen:

1. Sind K und K' teilerfremd, so ist in einem hinreichend großen Intervall die Anzahl der ganzen Zahlen x , für die $F_2(\psi(x) + s)$ nicht den Approximativwert $\Omega_2(\psi(x) + s)$ $\Phi_2(\psi(x) + s)$ besitzt, sehr klein im Verhältnis zu der Länge des betrachteten Intervalles.

2. Haben K , K_1 und K_2 den größten gemeinsamen Teiler 1, so ist in einem hinreichend großen Intervall die Anzahl der ganzen Zahlen x , für die $F_3(\psi(x) + s)$ nicht den Approximativwert $\Omega_3(\psi(x) + s)$ $\Phi_3(\psi(x) + s)$ besitzt, sehr klein im Verhältnis zu der Länge des betrachteten Intervalles.

3. Haben K_1 , K_2 , K_3 und K_4 den größten gemeinsamen Teiler 1, so ist in einem hinreichend großen Intervall die Anzahl der ganzen Zahlen x , für die $F_4(\psi(x) + s)$ nicht den Approximativwert $\Omega_4(\psi(x) + s)$ $\Phi_4(\psi(x) + s)$ besitzt, sehr klein im Verhältnis zu der Länge des betrachteten Intervalles.

Das alles folgt aus den Sätzen 1, 2 und 3.

Satz 1. Sind K und K' zwei ganze teilerfremde Zahlen $\neq 0$, ist $2 \leq A < B$ und $2 \leq A' < B'$, $m > 0$, s ganz und $\psi(x)$ ein ganzwertiges Polynom genau g -ten Grades ($g \geq 1$), so gilt für jedes Z mit

$$Z \geq 3, \quad \frac{1}{4} Z^g \geq B \quad \text{und} \quad \frac{1}{4} Z^{g'} \geq B'$$

die Ungleichung

$$\sum_{|z| \leq Z} |F_2(\psi(x) + s) - \Omega_2(\psi(x) + s) \Phi_2(\psi(x) + s)| < c_1 Z^{\sigma+1} z^{-m}$$

mit $c_1 = c_1(K, K', m, \psi)$; hiermit meine ich, daß c_1 eine geeignet gewählte Zahl bezeichnet, die nur von K, K', m und der Wahl des Polynoms ψ abhängt.

In dieser Arbeit ist stets $z = \log Z$ und $n = \log N$.

Satz 2. Sind K, K_1, K_2 drei ganze Zahlen $\neq 0$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1, ist

$$3 \leq A < B, \quad 3 \leq A_1 < B_1, \quad 3 \leq A_2 < B_2,$$

$m > 0$, s ganz und $\psi(x)$ ein ganzwertiges Polynom genau g -ten Grades ($g \geq 1$), so gilt für jedes Z mit

$$Z \geq 3, \quad \frac{1}{4} Z^g \geq B, \quad \frac{1}{4} Z^g \geq B_1^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4} Z^g \geq B_2^2$$

die Ungleichung

$$\sum_{|z| \leq Z} |F_3(\psi(x) + s) - \Omega_3(\psi(x) + s) \Phi_3(\psi(x) + s)| < c_2 Z^{\sigma+1} z^{-m}$$

mit $c_2 = c_2(K, K_1, K_2, m, \psi)$.

Satz 3. Sind K_1, K_2, K_3, K_4 vier ganze Zahlen $\neq 0$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1, ist $3 \leq A_\sigma < B_\sigma$ ($\sigma = 1, 2, 3, 4$), $m > 0$, s ganz und $\psi(x)$ ein ganzwertiges Polynom genau g -ten Grades ($g \geq 1$), so gilt für jedes Z mit

$$Z \geq 3 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4} Z^g \geq B_\sigma^2 \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

die Ungleichung

$$\sum_{|z| \leq Z} |F_4(\psi(x) + s) - \Omega_4(\psi(x) + s) \Phi_4(\psi(x) + s)| < c_3 Z^{\sigma+1} z^{-m}$$

mit $c_3 = c_3(K_1, K_2, K_3, K_4, m, \psi)$.

Aus diesen Sätzen werde ich, was übrigens leicht geht, die drei folgenden ableiten, in denen $\gamma > 0$, $m > 0$, $N \geq 3$, $\psi(x)$ ein ganzwertiges Polynom genau g -ten Grades ($g \geq 1$) und s eine ganze Zahl mit $|s| \leq \gamma N^g n^\gamma$ ist.

Satz 4. Es seien K und K' zwei ganze teilerfremde Zahlen $\neq 0$, und es sei \mathfrak{M}_2 die Menge der zu KK' teilerfremden Zahlen $t \equiv K + K' \pmod{2}$.

1. Haben K und K' entgegengesetztes Vorzeichen, so liegen zwischen $-N$ und N weniger als $c_4 N n^{-m}$ ganze Zahlen x mit der Eigenschaft, daß $\psi(x) + s$ eine zu \mathfrak{M}_2 gehörige Zahl ist, die nicht auf die Gestalt $Kp + K'p'$ gebracht werden kann; in diesem Satz bezeichnen p und p' Primzahlen > 3 , während c_4, c_5, \dots, c_{16} geeignet gewählte Zahlen sind, die nur von K, K', γ, m und ψ abhängen.

2. Sind K und K' beide positiv, so liegen zwischen $-N$ und N weniger als $c_5 N n^{-m}$ ganze Zahlen x mit der Eigenschaft, daß $\psi(x) + s$ eine zu \mathfrak{M}_2 gehörige positive Zahl ist, die nicht auf die Gestalt $Kp + K'p'$ gebracht werden kann.

3. Sind K und K' beide negativ, so liegen zwischen $-N$ und N weniger als $c_8 N n^{-m}$ ganze Zahlen x mit der Eigenschaft, daß $\psi(x) + s$ eine zu \mathfrak{M}_2 gehörige negative Zahl ist, die nicht auf die Gestalt $Kp + K'p'$ gebracht werden kann.

Beweis. Für jedes x mit Absolutwert $\leq N$ ist

$$|\psi(x)| \leq c_7 N^g, \text{ also } |\psi(x) + s| \leq c_8 N^g n^{\gamma};$$

ich kann dabei $c_8 \geq 1$ voraussetzen. Wird

$$A = A' = 3, \quad B = B' = \frac{1}{2} Z^g = 2 c_8 N^g n^{\gamma} + 3 |K| + 3 |K'|$$

gesetzt, so ist $Z > N \geq 3$. Nach Satz 1, mit $\left(1 + \frac{1}{g}\right)\gamma + 2 + (g+1)m$ statt m angewandt, ist

$$(6) \quad \sum_{|x| \leq N} |F_2(\psi(x) + s) - \Omega_2(\psi(x) + s) \Phi_2(\psi(x) + s)| \\ < c_9 N^{g+1} n^{\left(1 + \frac{1}{g}\right)\gamma} n^{-\left(1 + \frac{1}{g}\right)\gamma - 2 - (g+1)m} = c_9 N^{g+1} n^{-2 - (g+1)m}.$$

Ich unterscheide nun verschiedene Fälle.

1. Die Zahlen K und K' haben entgegengesetztes Vorzeichen.

Das Vierkant

$$V \dots A < \omega \leq B, \quad A' < \omega' \leq B'$$

schneidet für jedes λ mit Absolutwert $\leq c_8 N^g n^{\gamma} + \frac{1}{2}$ von der Geraden $K\omega + K'\omega' = \lambda$ ein Segment der Länge $> c_8 N^g n^{\gamma}$ ab. Um das zu beweisen, darf ich $\frac{\lambda}{K} \geq 3 + \frac{3K'}{K}$ voraussetzen, da ich sonst nur K und K' zu vertauschen brauche. Der Schnittpunkt der genannten Geraden mit der Basis des Vierkantes V hat eine Abszisse

$$\omega = \frac{\lambda - 3K'}{K} \geq 3 \quad \text{und} \quad |\lambda - 3K'| \leq c_8 N^g n^{\gamma} + \frac{1}{2} + 3|K'|,$$

so daß der Abstand dieses Schnittpunktes vom Eckpunkt $(3, B)$ mindestens

$$B - c_8 N^g n^{\gamma} - \frac{1}{2} - 3|K'| > c_8 N^g n^{\gamma}$$

ist, und hieraus geht hervor, daß das genannte Segment eine Länge $> c_8 N^g n^{\gamma}$ hat.

Folglich hat für jedes t mit Absolutwert $\leq c_8 N^g n^{\gamma}$ der Integrationsbereich des in (1) genannten Integrales eine Fläche $> c_8 N^g n^{\gamma}$, und in diesem Integral sind $\log \omega$ und $\log \omega'$ beide $\leq \log B < c_{10} n$, so daß

$$\Phi_2(t) > c_{11} N^g n^{\gamma-2}$$

ist.

Für jedes $t \neq 0$ in \mathfrak{M}_2 ist

$$\Omega_2(t) \geq 2 \prod_p \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right),$$

so daß für jedes $t \neq 0$ in \mathfrak{M}_2 mit Absolutwert $\leq c_8 N^g n^\gamma$

$$(7) \quad \Omega_2(t) \Phi_2(t) > c_{12} N^g n^{\gamma-2}$$

ist. Ich bezeichne nun mit D die Anzahl der zwischen $-N$ und N liegenden ganzen Zahlen x mit der Eigenschaft, daß $\psi(x) + s \neq 0$ ist, zu \mathfrak{M}_2 gehört und nicht auf die Gestalt $Kp + K'p'$ gebracht werden kann. Für jedes dieser x ist $F_2(\psi(x) + s) = 0$ und gilt (7) mit $t = \psi(x) + s$, so daß aus (6) folgt:

$$D c_{12} N^g n^{\gamma-2} < c_9 N^{g+1} n^{-2-(g+1)m},$$

also $D < c_{13} N n^{-m}$. Hiermit ist die erste Behauptung bewiesen, da es höchstens g Zahlen x mit $\psi(x) + s = 0$ gibt.

2. Die Zahlen K und K' sind positiv.

Das Vierkant V schneidet für jedes λ mit

$$N^g n^{-gm} + 3K + 3K' < \lambda \leq c_8 N^g n^\gamma + \frac{1}{2}$$

von der Geraden $K\omega + K'\omega' = \lambda$ ein Segment der Länge $\geq N^g n^{-gm}$ ab. Denn der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Basis des Vierkants V hat eine Abszisse

$$\omega = \frac{\lambda - 3K'}{K} \geq 3 \text{ und } \leq \lambda < B,$$

so daß der Abstand dieses Schnittpunktes zum Eckpunkt (3, 3)

$$\frac{\lambda - 3K' - 3K}{K} > N^g n^{-gm}$$

ist, und hieraus folgt, daß das genannte Segment eine Länge $> N^g n^{-gm}$ besitzt.

Genau wie in 1. finden wir nun für jedes zu \mathfrak{M}_2 gehörige t mit

$$(8) \quad N^g n^{-gm} + 3K + 3K' + \frac{1}{2} < t \leq c_8 N^g n^\gamma$$

die Ungleichung

$$(9) \quad \Omega_2(t) \Phi_2(t) > c_{14} N^g n^{-gm-2}.$$

Ich bezeichne nun mit D die Anzahl der zwischen $-N$ und N liegenden ganzen Zahlen x mit der Eigenschaft, daß $t = \psi(x) + s$ zu \mathfrak{M}_2 gehört, der Ungleichung (8) genügt und nicht auf die Gestalt $Kp + K'p'$ gebracht werden kann. Für jede dieser Zahlen x ist $F_2(\psi(x) + s) = 0$ und gilt (9), so daß aus (6) hervorgeht:

$$D c_{14} N^g n^{-gm-2} < c_9 N^{g+1} n^{-2-(g+1)m},$$

also $D < c_{15} N n^{-m}$. Hiermit ist die zweite Behauptung bewiesen, da die Anzahl der ganzzahligen x mit

$$0 < \psi(x) + s \leq N^g n^{-gm} + 3K + 3K' + \frac{1}{2}$$

kleiner als $c_{16} N n^{-m}$ ist.

3. Die dritte Behauptung folgt aus der zweiten, da man nur K, K', s und $\psi(x)$ durch $-K, -K', -s$ und $-\psi(x)$ zu ersetzen braucht.

Satz 5. Es seien K, K_1 und K_2 drei ganze Zahlen $\neq 0$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1; es sei \mathfrak{M}_3 die Menge der ganzen Zahlen t , die keinen in zwei der Zahlen K, K_1 und K_2 aufgehenden Teiler > 1 besitzen und die außerdem noch den Kongruenzen

$$t \equiv K + K_1 + K_2 \pmod{2^\alpha}$$

und

$$(10) \quad (K^2 - 1)(t - K - K_1 - K_2) \equiv 0 \pmod{3}$$

genügen; hierin ist α die größte ganze Zahl ≤ 3 mit der Eigenschaft, daß K durch $2^{\alpha-1}$ teilbar ist¹⁾.

1. Haben K, K_1 und K_2 nicht alle drei dasselbe Vorzeichen, so liegen zwischen $-N$ und N weniger als $c_{17} N n^{-m}$ ganze Zahlen x mit der Eigenschaft, daß $\psi(x) + s$ eine zu \mathfrak{M}_3 gehörige Zahl ist, die nicht auf die Gestalt $Kp + K_1 p_1^2 + K_2 p_2^2$ gebracht werden kann; in diesem Satz bezeichnen p, p_1 und p_2 Primzahlen > 3 , während c_{17}, c_{18} und c_{19} geeignet gewählte Zahlen sind, die nur von K, K_1, K_2, γ, m und ψ abhängen.

2. Sind K, K_1 und K_2 alle drei positiv, so liegen zwischen $-N$ und N weniger als $c_{18} N n^{-m}$ ganze Zahlen x mit der Eigenschaft, daß $\psi(x) + s$ eine zu \mathfrak{M}_3 gehörige positive Zahl ist, die nicht auf die Gestalt $Kp + K_1 p_1^2 + K_2 p_2^2$ gebracht werden kann.

3. Sind K, K_1 und K_2 alle drei negativ, so liegen zwischen $-N$ und N weniger als $c_{19} N n^{-m}$ ganze Zahlen x mit der Eigenschaft, daß $\psi(x) + s$ eine zu \mathfrak{M}_3 gehörige negative Zahl ist, die nicht auf die Gestalt $Kp + K_1 p_1^2 + K_2 p_2^2$ gebracht werden kann.

Dieser Satz folgt aus Satz 2, genau wie Satz 4 aus Satz 1 hervorgeht.

Satz 6. Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier ganze Zahlen $\neq 0$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1; es sei \mathfrak{M}_4 die Menge der Zahlen $t \equiv K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \pmod{24}$, die keinen Teiler > 1 besitzen, der in drei der Zahlen K_1, K_2, K_3, K_4 aufgeht.

1. Haben K_1, K_2, K_3, K_4 nicht alle vier dasselbe Vorzeichen, so liegen zwischen $-N$ und N weniger als $c_{20} N n^{-m}$ ganze Zahlen mit der Eigenschaft, daß $\psi(x) + s$ eine zu \mathfrak{M}_4 gehörige Zahl ist, die nicht auf die Gestalt $K_1 p_1^2 + \dots + K_4 p_4^2$ gebracht werden kann; in diesem Satz bezeichnen p_1, \dots, p_4 Primzahlen > 3 , während c_{20}, c_{21} und c_{22} geeignet gewählte Zahlen sind, die nur von $K_1, K_2, K_3, K_4, \gamma, m$ und ψ abhängen.

¹⁾ Die Kongruenz (10) besagt nur:

$$t \equiv K + K_1 + K_2 \pmod{3} \text{ falls } K \equiv 0 \pmod{3}.$$

2. Sind K_1, K_2, K_3 und K_4 alle vier positiv, so liegen zwischen $-N$ und N weniger als $c_{21} N n^{-m}$ ganze Zahlen mit der Eigenschaft, daß $\psi(x) + s$ eine zu \mathfrak{M}_4 gehörige positive Zahl ist, die nicht auf die Gestalt $K_1 p_1^2 + \dots + K_4 p_4^2$ gebracht werden kann.

3. Sind K_1, K_2, K_3 und K_4 alle vier negativ, so liegen zwischen $-N$ und N weniger als $c_{22} N n^{-m}$ ganze Zahlen mit der Eigenschaft, daß $\psi(x) + s$ eine zu \mathfrak{M}_4 gehörige negative Zahl ist, die nicht auf die Gestalt $K_1 p_1^2 + \dots + K_4 p_4^2$ gebracht werden kann.

Dieser Satz folgt aus Satz 3, genau wie Satz 4 aus Satz 1 hervorgeht.

Die Theoreme 4, 5 und 6 enthalten die drei folgenden Sätze, in denen $\chi(x)$ ein ganzwertiges Polynom genau g -ten Grades ($g \geq 1$) bezeichnet und K'' der Koeffizient von x^g in $\chi(x)$ ist.

Satz 7. Es sei $K \neq 0$ ganz; $K' \neq 0$ ganz, U'' sei positiv und ganz, M' sei die Menge der ganzen Zahlen s , denen ein ganzes v'' zugeordnet werden kann mit der Eigenschaft, daß $\frac{s - \chi(v'')}{(K, K')}$ eine ganze, zu $\frac{KK'}{(K, K')^2}$ teilerfremde Zahl bezeichnet, die $\equiv \frac{K + K'}{(K, K')} \pmod{2}$ ist; die Punkte s von \mathfrak{M}'_2 , bei denen dabei v'' teilerfremd zu $g! 2 K K' U''$ gewählt werden kann, bilden eine Teilmenge von \mathfrak{M}'_2 , die ich \mathfrak{M}'_2 nennen werde.

1. Haben K, K' und K'' nicht alle drei dasselbe Vorzeichen, so kann man jede Zahl s von \mathfrak{M}'_2 auf unendlich viele Weisen auf die Gestalt

$$(11) \quad s = Kp + K'p' + \chi(x)$$

und jede Zahl s von \mathfrak{M}'_2 auf unendlich viele Weisen sogar auf die Gestalt

$$(12) \quad s = Kp + K'p' + \chi(p'')$$

bringen; hierin sind p und p' Primzahlen > 3 ; x ist eine natürliche Zahl, p'' eine Primzahl > 3 mit

$$(13) \quad x \equiv v'' \pmod{U''}; \quad p'' \equiv v'' \pmod{U''}.$$

2. Sind K, K' und K'' alle drei positiv, so kann man jede hinreichend große Zahl s von \mathfrak{M}'_2 auf die Gestalt (11) mit (13), jede hinreichend große Zahl s von \mathfrak{M}'_2 sogar auf die Gestalt (12) mit (13) bringen.

„Hinreichend groß“ soll in diesem Satz heißen: größer als eine geeignet gewählte, nur von K, K', U'' und χ abhängige Zahl.

3. Sind K, K' und K'' alle drei negativ, so kann man jede zu \mathfrak{M}'_2 gehörige negative Zahl s mit hinreichend großem Absolutwert auf die Gestalt (11) mit (13) bringen, während man jede zu \mathfrak{M}'_2 gehörige negative Zahl mit hinreichend großem Absolutwert sogar auf die Gestalt (12) mit (13) bringen kann.

Beweis. Das ganzwertige Polynom $\chi(x)$ genau g -ten Grades besitzt die Eigenschaft, daß die Koeffizienten von $g! \chi(x)$ ganz sind. Also für jedes x mit

$$x \equiv v'' \pmod{g! 2 K K' U''} \text{ ist } \chi(x) \equiv \chi(v'') \pmod{2 K K' U''},$$

so daß $\frac{s - \chi(x)}{(K, K')}$ eine ganze, zu $\frac{K K'}{(K, K')^2}$ teilerfremde Zahl bezeichnet, die $\equiv \frac{K + K'}{(K, K')} \pmod{2}$ ist. Für jedes s von \mathfrak{M}'_2 und auch für jedes s von \mathfrak{M}''_2 können wir also $0 < v'' \leq g! 2 K K' U''$ wählen. Diese Zahl v'' besitzt dann eine von s unabhängige obere Schranke. In unserem Beweis dürfen wir also v'' fest, d. h. unabhängig von s denken.

Wird

$$\chi(v'') - \chi(v'' + g! 2 |K K'| U'' y) = (K, K') \psi(y)$$

gesetzt, so ist für jedes ganze y

$$\frac{s - \chi(v'')}{(K, K')} + \psi(y) = \frac{s - \chi(v'' + g! 2 |K K'| U'' y)}{(K, K')}$$

eine ganze, zu $\frac{K K'}{(K, K')^2}$ teilerfremde Zahl $\equiv \frac{K + K'}{(K, K')} \pmod{2}$.

Ich wende Satz 4 an mit $\frac{s - \chi(v'')}{(K, K')}$, $\frac{K}{(K, K')}$ und $\frac{K'}{(K, K')}$ statt s , K und K' . Dabei unterscheide ich verschiedene Fälle.

1. Die Zahlen K und K' haben ein entgegengesetztes Vorzeichen. Nach der ersten Behauptung von Satz 4 liegen für jedes $N \geq 3$ zwischen $-N$ und N weniger als $c_{23} N n^{-2}$ ganze Zahlen y mit der Eigenschaft, daß $\frac{s - \chi(v'')}{(K, K')} + \psi(y)$ nicht auf die Gestalt $\frac{K}{(K, K')} p + \frac{K'}{(K, K')} p'$ gebracht werden kann. In diesem Beweis hängen c_{23} , c_{24} und c_{25} nur von K, K', U'' und χ ab. Die Anzahl der natürlichen Zahlen $y < N$, für die (11) mit $x = v'' + 2 |K K'| U'' y$ gilt, wächst somit mit N unbeschränkt, so daß s auf unendlich viele Weisen auf die Gestalt (11) mit (13) gebracht werden kann.

Ist v'' teilerfremd zu $g! 2 K K' U''$, so hat die Anzahl der natürlichen Zahlen $y < N$ mit der Eigenschaft, daß $v'' + g! 2 |K K'| U'' y$ eine Primzahl ist, die Größenordnung $N n^{-1}$. Die Anzahl der natürlichen Zahlen $y < N$, für die (12) mit $p'' = v'' + 2 |K K'| U'' y$ gilt, nimmt also mit N unbeschränkt zu, so daß in diesem Fall s auf unendlich viele Weisen auf die Gestalt (12) mit (13) gebracht werden kann.

2. Die Zahlen K und K' sind beide positiv. Die zweite Behauptung von Satz 4 gibt uns nun für jedes $N \geq 3$ das Resultat, daß zwischen $-N$ und N weniger als $c_{24} N n^{-2}$ ganze Zahlen y liegen mit der Eigenschaft, daß $\frac{s - \chi(v'')}{(K, K')} + \psi(y)$ eine positive Zahl ist, die nicht auf die Gestalt $\frac{K}{(K, K')} p + \frac{K'}{(K, K')} p'$ gebracht werden kann.

Ist $K'' < 0$, so hat bei festem s die Anzahl der natürlichen Zahlen $y < N$ mit

$$(14) \quad \frac{s - \chi(v'')}{(K, K'')} + \psi(y) > 0$$

die Größenordnung N , so daß dann der Beweis genau wie in 1. weiter geht.

Ist dagegen $K'' > 0$, so wähle ich s hinreichend groß. N sei die größte natürliche Zahl, so daß (14) für jede natürliche Zahl $y < N$ gilt. N hängt also jetzt von s ab und wächst mit s unbeschränkt. Die Anzahl der natürlichen Zahlen $y < N$ mit

$$(15) \quad \frac{s - \chi(v'')}{(K, K'')} + \psi(y) = \frac{K}{(K, K'')} p + \frac{K'}{(K, K'')} p'$$

ist dann größer als $N - 1 - c_{24} N n^{-2}$, also positiv bei hinreichend großem s . Jedes hinreichend große s von \mathfrak{M}'_2 hat also die Gestalt (11) mit $x = v'' + 2 |KK'| U'' y$. Ist v'' teilerfremd zu $g! 2 KK' U''$, so bilden die natürlichen Zahlen $y < N$ mit der Eigenschaft, daß $v'' + g! 2 |KK'| U'' y$ eine Primzahl ist, ein System, das mehr als $c_{25} N n^{-1}$ Elemente enthält. Die Anzahl der in diesem System vorkommenden Zahlen y mit (15) ist somit größer als $c_{25} N n^{-1} - c_{24} N n^{-2}$, also positiv bei hinreichend großem s . Jedes hinreichend große s von \mathfrak{M}''_2 hat also die Gestalt (12) mit $p'' = v'' + 2 |KK'| U'' y$.

Satz 8. Es seien K, K_1, K_2, K'' ganze Zahlen $\neq 0$; U'' sei positiv und ganz. \mathfrak{M}'_3 sei die Menge der ganzen Zahlen s , denen ein ganzes v'' zugeordnet werden kann, so daß $t = \frac{s - \chi(v'')}{(K, K_1, K_2)}$ eine ganze Zahl ist, die die drei folgenden Bedingungen erfüllt:

t besitzt keinen Teiler > 1 , der in zwei der Zahlen $\frac{K}{(K, K_1, K_2)}, \frac{K_1}{(K, K_1, K_2)}$ und $\frac{K_2}{(K, K_1, K_2)}$ aufgeht.
 t genügt der Kongruenz

$$t \equiv \frac{K + K_1 + K_2}{(K, K_1, K_2)} \pmod{2^x},$$

wo x die größte ganze Zahl ≤ 3 bezeichnet mit der Eigenschaft, daß K durch 2^{x-1} teilbar ist.

Schließlich erfüllt t noch, falls K durch 3 teilbar ist, die Kongruenz

$$t \equiv \frac{K + K_1 + K_2}{(K, K_1, K_2)} \pmod{3}.$$

Die Punkte s von \mathfrak{M}'_3 , bei denen dabei v'' teilerfremd zu $g! 2 KK_1 K_2 U''$ gewählt werden kann, bilden eine Teilmenge von \mathfrak{M}'_3 , die ich \mathfrak{M}'_3' nennen werde.

1. Haben K, K_1, K_2 und K'' nicht alle vier dasselbe Vorzeichen, so kann man jede Zahl s von \mathfrak{M}'_3 auf unendlich viele Weisen auf die Gestalt

$$(16) \quad s = Kp + K_1 p_1^2 + K_2 p_2^2 + \chi(x)$$

und jede Zahl s von \mathfrak{W}'_3 auf unendlich viele Weisen sogar auf die Gestalt

$$(17) \quad s = Kp + K_1p_1^2 + K_2p_2^2 + \chi(p'')$$

bringen; hierin sind p, p_1 und p_2 Primzahlen > 3 ; x ist eine natürliche Zahl, p'' eine Primzahl > 3 mit

$$(18) \quad x \equiv v'' \pmod{U''}; \quad p'' \equiv v'' \pmod{U''}.$$

2. Sind K, K_1, K_2 und K'' alle vier positiv, so kann man jede hinreichend große Zahl s von \mathfrak{W}'_3 auf die Gestalt (16) mit (18), jede hinreichend große Zahl s von \mathfrak{W}'_3 sogar auf die Gestalt (17) mit (18) bringen.

„Hinreichend groß“ soll in diesem Satz heißen: größer als eine geeignet gewählte, nur von K, K_1, K_2, U'' und χ abhängige Zahl.

3. Sind K, K_1, K_2 und K'' alle vier negativ, so kann man jede zu \mathfrak{W}'_3 gehörige negative Zahl s mit hinreichend großem Absolutwert auf die Gestalt (16) mit (18) bringen, während man jede zu \mathfrak{W}'_3 gehörige negative Zahl s mit hinreichend großem Absolutwert sogar auf die Gestalt (17) mit (18) bringen kann.

Dieser Satz folgt aus Satz 5, genau wie der vorige aus Satz 4 hervorgeht.

Satz 9. Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 ganze Zahlen $\neq 0$; U'' sei positiv und ganz. \mathfrak{W}'_4 sei die Menge der ganzen Zahlen s , denen ein ganzes v'' zugeordnet werden kann mit der Eigenschaft, daß $\frac{s - \chi(v'')}{(K_1, K_2, K_3, K_4)}$ eine ganze Zahl bezeichnet, die $\equiv \frac{K_1 + K_2 + K_3 + K_4}{(K_1, K_2, K_3, K_4)} \pmod{24}$ ist und keinen Teiler > 1 besitzt,

der in drei der vier Zahlen $\frac{K_\sigma}{(K_1, K_2, K_3, K_4)}$ ($\sigma = 1, 2, 3, 4$) aufgeht. Die Punkte s von \mathfrak{W}'_4 , bei denen dabei v'' teilerfremd zu $g! 2 K_1 K_2 K_3 K_4 U''$ gewählt werden kann, bilden eine Teilmenge von \mathfrak{W}'_4 , die ich \mathfrak{W}'_4 nennen werde.

1. Haben K_1, K_2, K_3, K_4, K'' nicht alle fünf dasselbe Vorzeichen, so kann man jede Zahl s von \mathfrak{W}'_4 auf unendlich viele Weisen auf die Gestalt

$$(19) \quad s = K_1p_1^2 + \dots + K_4p_4^2 + \chi(x)$$

und jede Zahl s von \mathfrak{W}'_4 auf unendlich viele Weisen sogar auf die Gestalt

$$(20) \quad s = K_1p_1^2 + \dots + K_4p_4^2 + \chi(p'')$$

bringen; hierin sind p_1, \dots, p_4 Primzahlen > 3 ; x ist eine natürliche Zahl, p'' eine Primzahl > 3 mit

$$(21) \quad x \equiv v'' \pmod{U''}; \quad p'' \equiv v'' \pmod{U''}.$$

2. Sind K_1, K_2, K_3, K_4 und K'' alle fünf positiv, so kann man jede hinreichend große Zahl s von \mathfrak{W}'_4 auf die Gestalt (19) mit (21), jede hinreichend große Zahl s von \mathfrak{W}'_4 sogar auf die Gestalt (20) mit (21) bringen.

„Hinreichend groß“ soll in diesem Satz heißen: größer als eine geeignet gewählte, nur von K_1, K_2, K_3, K_4, U'' und χ abhängige Zahl.

3. Sind K_1, K_2, K_3, K_4 und K'' alle fünf negativ, so kann man jede zu \mathfrak{M}'_4 gehörige negative Zahl s mit hinreichend großem Absolutwert auf die Gestalt (19) mit (21) bringen, während man jede zu \mathfrak{M}'_4 gehörige negative Zahl s mit hinreichend großem Absolutwert sogar auf die Gestalt (20) mit (21) bringen kann.

Dieser Satz folgt aus Satz 6, genau wie Satz 7 aus Satz 4 hervorgeht.

§ 2.

Darstellungen durch Primzahlen aus arithmetischen Reihen.

$F(t)$ sei die Anzahl der Darstellungen $t = Kp + K'p'$, wobei K und K' gegebene teilerfremde ganze Zahlen $\neq 0$ bezeichnen und die Primzahlen p und p' zu gegebenen Intervallen und zu gegebenen arithmetischen Progressionen gehören. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen besitzt $F(t)$ für viele Werte von t einen Approximativwert $\Omega(t) \Phi_2(t)$, wobei die Größenordnung von $\Omega(t)$ durch den arithmetischen Charakter von t , die Größenordnung der durch (1) definierten Funktion $\Phi_2(t)$ durch die Größenordnung von t bestimmt wird.

Überall in diesem Paragraphen bezeichnen K, K', U und U' ganze Zahlen $\neq 0$, außerdem u eine ganze zu U teilerfremde, u' eine ganze zu U' teilerfremde ganze Zahl; A ist stets das kleinste gemeinsame positive Vielfache von KU und $K'U'$; schließlich sei

$$2 \leq A < B \quad \text{und} \quad 2 \leq A' < B'.$$

$F(t)$ bezeichne nun die Anzahl der Darstellungen $t = Kp + K'p'$, wobei die Primzahlen p und p' den Ungleichungen

$$(22) \quad A < p \leq B, \quad A' < p' \leq B'$$

und den Kongruenzen

$$(23) \quad p \equiv u \pmod{U}; \quad p' \equiv u' \pmod{U'}$$

genügen. Wegen $A \geq 2$ und $A' \geq 2$ sind die Primzahlen p und p' ungerade.

Ist $KK'UU'$ ungerade, so sei $\Omega(t)$ für jedes ungerade t gleich Null; außerdem sei $\Omega(0) = 0$. In allen anderen Fällen sei für ganzes t

$$(24) \quad \Omega(t) = \frac{2^g}{\varphi\left(\frac{A}{[KK']}\right)} \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p \mid KK'UU' \\ p \geq 3}} \frac{p-1}{p-2};$$

hierin ist g die Anzahl der Zahlenpaare v und v' mit

$$(25) \quad t \equiv Kv + K'v' \pmod{A}; \quad v \equiv u \pmod{U}; \quad v' \equiv u' \pmod{U'},$$

wobei v zu einem gegebenen reduzierten Restsystem von $\frac{A}{K}$ und v' zu einem gegebenen reduzierten Restsystem von $\frac{A}{K'}$ gehört.

Nach diesen Vorbemerkungen gebe ich den Wortlaut von

Satz 10. Sind K und K' zwei teilerfremde natürliche Zahlen $\neq 0$, so gilt für jedes ganzwertige Polynom $\psi(x)$ genau g -ten Grades ($g \geq 1$), für jedes ganze s , jedes positive m und jedes Z mit

$$(26) \quad Z \geq 3, \quad \frac{1}{4} Z^g \geq B \quad \text{und} \quad \frac{1}{4} Z^g \geq B'$$

die Ungleichung

$$(27) \quad \sum_{|x| \leq Z} |F(\psi(x) + s) - \Omega(\psi(x) + s) \Phi_2(\psi(x) + s)| < c_{26} Z^{g+1} z^{-m}$$

mit $c_{26} = c_{26}(K, K', U, U', m, \psi)$.

Wählt man $U = U' = u = u' = 1$, so geht dieser Satz in Satz 1 über; denn dann ist $A = KK'$ und hat die in (24) auftretende Zahl ϱ den Wert 1 oder 0, je nachdem t zu KK' teilerfremd ist oder nicht, so daß $\Omega(t)$ dann gleich $\Omega_2(t)$ ist.

Ich werde Satz 1 in § 3, Satz 10 in § 4 beweisen. Zwar ist ein direkter Beweis von Satz 1, der ja nur ein Spezialfall von Satz 10 ist, nicht nötig, aber dieser direkte Beweis ist viel einfacher.

Satz 11. Es seien K und K' teilerfremde ganze Zahlen, s ganz,

$$(28) \quad \gamma \geq 1, \quad N \geq 3, \quad B \leq \gamma N^g n^\gamma, \quad B' \leq \gamma N^g n^\gamma,$$

wo $g \geq 1$ den genauen Grad des ganzwertigen Polynoms $\psi(x)$ bezeichnet.

\mathfrak{M} sei die Menge der ganzen Zahlen x mit

$$(29) \quad |x| \leq \gamma N n^\gamma \quad \text{und} \quad \psi(x) + s \equiv K + K' \pmod{2},$$

denen eine zu $\frac{A}{KU}$ teilerfremde Zahl $v \equiv u \pmod{U}$ und eine zu $\frac{A}{K'U'}$ teilerfremde Zahl $v' \equiv u' \pmod{U'}$ mit

$$\psi(x) + s \equiv Kv + K'v' \pmod{A}$$

zugeordnet werden können, und die außerdem noch die Eigenschaft besitzen, daß in der (ω, ω') -Ebene das Rechteck

$$\mathfrak{R} \dots A < \omega \leq B, \quad A' < \omega' \leq B'$$

von der Geraden $K\omega + K'\omega' = \psi(x) + s$ ein Segment der Länge $\geq \gamma^{-1} N^g n^\gamma$ abschneidet.

Die Anzahl der zu \mathfrak{M} gehörigen Zahlen x , die nicht die Beziehung

$$(30) \quad F(\psi(x) + s) = (1 + \Theta n^{-\gamma}) \Omega(\psi(x) + s) \Phi_2(\psi(x) + s)$$

mit $|\Theta| < 1$ erfüllen, ist für jedes positive m kleiner als $c_{27} N n^{-m}$ mit $c_{27} = c_{27}(K, K', U, U', \gamma, m, \psi)$.

Beweis. Ich darf annehmen, daß \mathfrak{M} mehr als g Zahlen x enthält, für die (30) nicht gilt; denn sonst ist die Behauptung evident.

Ich werde zunächst zeigen, daß das Integral

$$\Phi_2(\psi(x) + s) = \int_A^B \int_{A'}^{B'} \frac{d\omega d\omega'}{\log \omega \log \omega'} \\ |K\omega + K'\omega' - \psi(x) - s| \leq \frac{1}{2}$$

für jedes x in \mathfrak{M} einen Integrationsbereich besitzt, dessen Fläche $\geq \frac{1}{2^\gamma} N^\gamma n^{-\gamma}$ ist. \mathfrak{M} enthält wenigstens ein x' mit $\psi(x') \neq \psi(x)$. Das Rechteck \mathfrak{R} schneidet von jeder der zwei Geraden

$K\omega + K'\omega' = \psi(x) + s$ und $K\omega + K'\omega' = \psi(x') + s$,
also auch von jeder Geraden

$$K\omega + K'\omega' = \psi(x) + s + \lambda,$$

wo λ zwischen 0 und $\psi(x') - \psi(x)$ liegt, ein Segment der Länge $\geq \frac{1}{\gamma} N^\gamma n^{-\gamma}$ ab. Wählt man $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2} \leq \lambda < 0$, je nachdem $\psi(x') - \psi(x)$ positiv oder negativ ist, so liefert jede dieser Zahlen λ ein gerades Segment, das eine Länge $\geq \frac{1}{\gamma} N^\gamma n^{-\gamma}$ hat und ganz zu \mathfrak{R} , also zum Integrationsbereich von $\Phi_2(\psi(x) + s)$ gehört. Folglich besitzt dieser Integrationsbereich eine Fläche $\geq \frac{1}{2^\gamma} N^\gamma n^{-\gamma}$.

Im genannten Integral ist $\omega \leq B$ und $\omega' \leq B$, so daß $\log \omega$ und $\log \omega'$ beide wegen (28) kleiner als $c_{28} n$ sind. In diesem Beweis sind $c_{28}, c_{29}, \dots, c_{33}$ geeignet gewählte positive Zahlen, die nur von K, K', U, U', γ, m und φ abhängen dürfen. Für jedes x in \mathfrak{M} ist dann

$$\Phi_2(\psi(x) + s) \geq c_{29} N^\gamma n^{-\gamma-2}.$$

Für jedes x in \mathfrak{M} mit $\psi(x) + s \neq 0$ ist

$$\Omega(\psi(x) + s) \geq c_{30};$$

denn ist $KK'UU'$ ungerade, so ist $\psi(x) + s$ wegen (29) gerade, und die in der Definition von $\Omega(\psi(x) + s)$ auftretende Zahl ϱ ist ≥ 1 . Für jedes x in \mathfrak{M} mit $\psi(x) + s \neq 0$ und mit der Eigenschaft, daß (30) nicht gilt, ist daher

$$(31) \quad \begin{cases} |F(\psi(x) + s) - \Omega(\psi(x) + s) \Phi_2(\psi(x) + s)| \\ \geq n^{-\gamma} \Omega(\psi(x) + s) \Phi_2(\psi(x) + s) \geq c_{29} c_{30} N^\gamma n^{-2\gamma-2}. \end{cases}$$

Wird

$$Z = \frac{1}{4^\gamma} \gamma N n^\gamma$$

gesetzt, so folgt aus (28):

$$Z > N \geq 3; \quad \frac{1}{4} Z^\gamma \geq \gamma N^\gamma n^\gamma \geq B \text{ und } \geq B'.$$

Satz 10 mit $(g+3)\gamma+2+m$ statt m angewandt, liefert:

$$\sum_{|x| \leq \gamma N n^\gamma} |F(\psi(x) + s) - \Omega(\psi(x) + s) \Phi_2(\psi(x) + s)| \\ < c_{31} Z^{\gamma+1} z^{-(g+3)\gamma-2-m} < c_{32} N^{\gamma+1} n^{-2\gamma-2-m}.$$

Mit Rücksicht auf (31) folgt hieraus für die Anzahl D der zu \mathfrak{M} gehörigen Zahlen x mit $\psi(x) + s \neq 0$ und mit der Eigenschaft, daß (30) nicht gilt, die Ungleichung

$$D c_{29} c_{30} N^g n^{-2\gamma-2} < c_{32} N^{g+1} n^{-2\gamma-2-m}, \text{ also } D < c_{32} N n^{-m}.$$

Hiermit ist der Beweis geliefert, da es höchstens g Zahlen x mit $\psi(x) + s = 0$ gibt.

Satz 12. Es bezeichnen u'' eine ganze, U'' eine natürliche Zahl, $\chi(x)$ ein ganzwertiges Polynom, und es sei möglich, der ganzen Zahl s eine zu $\frac{A}{KU}$ teilerfremde Zahl $v \equiv u \pmod{U}$, eine zu $\frac{A}{K'U'}$ teilerfremde Zahl $v' \equiv u' \pmod{U'}$ und eine ganze Zahl $v'' \equiv u'' \pmod{U''}$ mit

$$(32) \quad s \equiv K + K' + \chi(v'') \pmod{2(K, K')}$$

und

$$(33) \quad s \equiv Kv + K'v' + \chi(v'') \pmod{A}$$

zuzuordnen.

Schließlich sei

$$(34) \quad s = KP + K'P' + \chi(X); \quad \eta \geq 1; \quad N \geq 3; \quad X \leq \eta N n^\eta,$$

$$(35) \quad \eta^{-1} N^g n^{-\eta} \leq P \leq \eta N^g n^\eta; \quad \eta^{-1} N^g n^{-\eta} \leq P' \leq \eta N^g n^\eta.$$

1. Die Anzahl der Zahlen $x \equiv u'' \pmod{U''}$ mit

$$(36) \quad |x - X| \leq \eta^{-1} N n^{-\eta}; \quad |\chi(x) - \chi(X)| \leq \eta^{-1} N^g n^{-\eta}$$

und mit der Eigenschaft, daß s auf die Gestalt $Kp + K'p' + \chi(x)$ gebracht werden kann, wobei die Primzahlen p und p' den Beziehungen

$$(37) \quad \begin{cases} p \equiv u \pmod{U}; & p' \equiv u' \pmod{U'}; \\ |p - P| \leq \eta^{-1} N^g n^{-\eta} & \text{und} \quad |p' - P'| \leq \eta^{-1} N^g n^{-\eta} \end{cases}$$

genügen, ist größer als $c_{34} N n^{-\eta} - c_{35}$.

In diesem Satz bezeichnen $c_{34}, c_{35}, \dots, c_{47}$ geeignet gewählte positive Zahlen, die nur von K, K', U, U', U'', η und χ abhängen.

2. Ist $X \geq \eta^{-1} N n^{-\eta}$ und kann v'' teilerfremd zu $g! 2KK'UU''$ gewählt werden, so ist die Anzahl der Primzahlen $p'' \equiv u'' \pmod{U}$ mit

$$(38) \quad |p'' - X| \leq \eta^{-1} N n^{-\eta}; \quad |\chi(p'') - \chi(X)| \leq \eta^{-1} N^g n^{-\eta}$$

und mit der Eigenschaft, daß s auf die Gestalt $Kp + K'p' + \chi(p'')$ gebracht werden kann, wobei die Primzahlen p und p' den Beziehungen (37) genügen, größer als $c_{36} N n^{-\eta-1} - c_{37}$.

Beweis. Ich darf $\eta^{-1} N^g n^{-\eta} \geq 4$ annehmen, da sonst die Behauptungen evident sind. Wird

$$P - A = P' - A' = B - P = B' - P' = \frac{1}{2} \eta^{-1} N^g n^{-\eta}$$

gesetzt, so ist jede der zwei Zahlen A und A' mindestens $\frac{1}{2} \eta^{-1} N^g n^{-\eta} \geq 2$ und jede der zwei Zahlen B und B' kleiner als $2 \eta N^g n^{\eta}$.

Es gibt eine Zahl μ mit

$$c_{38} N^g n^{-\eta} \leq \mu \leq \eta^{-1} N^g n^{-\eta},$$

so daß das Vierkant $A < \omega \leq B$, $A' < \omega' \leq B'$ von jeder Geraden

$$(39) \quad K(\omega - P) + K'(\omega' - P') = \lambda \quad \text{mit} \quad |\lambda| \leq \mu$$

ein Segment der Länge $\geq c_{39} N n^{-\eta}$ abschneidet.

\mathfrak{M}^* sei die Menge der ganzen Zahlen y mit

$$|y - X| \leq \eta^{-1} N n^{-\eta}; \quad |\chi(y) - \chi(X)| \leq \mu$$

und

$$y \equiv v'' \pmod{g! 2 K K' U U' U''}.$$

Im Intervall $|y - X| \leq \eta^{-1} N n^{-\eta}$ ist $|\chi'(y)| \leq c_{40} N^{g-1}$, so daß in diesem Intervall mehr als $c_{41} N n^{-\eta} - c_{42}$ konsekutive ganze Zahlen y mit $|\chi(y) - \chi(X)| \leq \mu$ liegen. Das Intervall enthält also mehr als $c_{43} N n^{-\eta} - c_{44}$ Zahlen y von \mathfrak{M}^* . Ist $X \geq \eta^{-1} N n^{-\eta}$ und v'' teilerfremd zu $g! 2 K K' U U' U''$, so enthält das genannte Intervall wegen $X \leq \eta N n^{\eta}$ mehr als $c_{45} N n^{-\eta-1} - c_{46}$ zu \mathfrak{M}^* gehörige Primzahlen.

Das ganzwertige Polynom $\chi(x)$ genau g -ten Grades hat die Eigenschaft, daß $g! \chi(x)$ nur ganzzahlige Koeffizienten besitzt. Aus (32) und (33) folgt somit für jedes y in \mathfrak{M}^* :

$$\frac{s - \chi(v'')}{(K, K')} + \frac{\chi(v'') - \chi(y)}{(K, K')} \equiv \frac{K}{(K, K')} + \frac{K'}{(K, K')} \pmod{2}$$

und

$$\frac{s - \chi(v'')}{(K, K')} + \frac{\chi(v'') - \chi(y)}{(K, K')} \equiv \frac{K}{(K, K')} v + \frac{K'}{(K, K')} v' \pmod{\frac{\lambda}{(K, K')}}.$$

Jedes y von \mathfrak{M}^* besitzt außerdem die Eigenschaft, daß das Vierkant $A < \omega \leq B$, $A' < \omega' \leq B'$ von der Geraden

$$\frac{K}{(K, K')} \omega + \frac{K'}{(K, K')} \omega' = \frac{s - \chi(v'')}{(K, K')} + \frac{\chi(v'') - \chi(y)}{(K, K')}$$

ein Segment der Länge $\geq c_{39} N n^{-\eta}$ abschneidet; denn die Gleichung der Geraden kann wegen (34) auf die Gestalt (39) mit

$$|\lambda| = |\chi(X) - \chi(y)| \leq \mu$$

gebracht werden. Der vorige Satz, mit

$$\frac{K}{(K, K')}, \quad \frac{K'}{(K, K')}, \quad \frac{\lambda}{(K, K')}, \quad \frac{s - \chi(v'')}{(K, K')}$$

statt K, K', λ, s , und mit

$$\gamma = \text{Max} \left(2\eta, \frac{1}{c_{39}} \right) \quad \text{und} \quad \psi(x) = \frac{\chi(v'') - \chi(v' + g! 2 K K' U U' U'' x)}{(K, K')}$$

angewandt, gibt das Resultat, daß \mathfrak{M}^* höchstens $c_{47} N n^{-\frac{1}{2}}$ Zahlen y enthält mit der Eigenschaft, daß $\frac{s-\chi(v'')}{(K, K')} + \frac{\chi(v'')-\chi(y)}{(K, K')}$ nicht auf die Gestalt $\frac{K}{(K, K')} p + \frac{K'}{(K, K')} p'$ mit (37) gebracht werden kann.

\mathfrak{M}^* enthält also mehr als $c_{43} N n^{-\frac{1}{2}} - c_{44} - c_{47} N n^{-\frac{1}{2}}$ Zahlen y , so daß $s - \chi(y)$ die Gestalt $Kp + K'p'$ mit (37) und mit $y \equiv v'' \equiv u'' \pmod{U''}$ besitzt. Ist $X \geq \eta^{-1} N n^{-\frac{1}{2}}$ und v'' teilerfremd zu $g! 2 K K' U U' U''$, so enthält \mathfrak{M}^* mehr als $c_{45} N n^{-\frac{1}{2}} - c_{45} - c_{47} N n^{-\frac{1}{2}}$ Primzahlen p'' , so daß $s - \chi(p'')$ die Gestalt $Kp + K'p'$ mit (37) und mit $p'' \equiv v'' \equiv u'' \pmod{U}$ besitzt. Hiermit ist Satz 12 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 1. K, K' und K'' seien reelle Zahlen $\neq 0$, und die positive Zahl δ sei höchstens gleich dem kleinsten der Absolutwerte dieser drei Zahlen. Jedem Zahlentripel $G \geq 0, G' \geq 0$ und $G'' \geq 0$ mit $G + G' + G'' = 1$ kann man dann drei Zahlen Γ, Γ' und Γ'' mit

$$(40) \quad K(\Gamma - G) + K'(\Gamma' - G') + K''(\Gamma'' - G'') = 0,$$

$$(41) \quad |\Gamma - G| \leq \frac{2\delta}{|K|}; \quad |\Gamma' - G'| \leq \frac{2\delta}{|K'|}; \quad |\Gamma'' - G''| \leq \frac{2\delta}{|K''|},$$

$$(42) \quad \Gamma \geq \frac{\delta}{|K|}; \quad \Gamma' \geq \frac{\delta}{|K'|} \quad \text{und} \quad \Gamma'' \geq \frac{\delta}{|K''|}$$

zuordnen.

Beweis. Von den drei Zahlen G, G' und G'' , deren Summe gleich 1 ist, ist wenigstens eine $\geq \frac{1}{3}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $G'' \geq \frac{1}{3}$ voraussetzen. Wählt man nun

$$\Gamma = \text{Max}\left(G, \frac{\delta}{|K|}\right), \quad \Gamma' = \text{Max}\left(G', \frac{\delta}{|K'|}\right),$$

und bestimmt man Γ'' durch (40), so ist

$$|\Gamma - G| \leq \frac{\delta}{|K|} \quad \text{und} \quad |\Gamma' - G'| \leq \frac{\delta}{|K'|},$$

also

$$|K''(\Gamma'' - G'')| = |K(\Gamma - G) + K'(\Gamma' - G')| \leq 2\delta$$

und

$$|K''\Gamma''| \geq \frac{1}{3}|K''| - 2\delta \geq \delta.$$

Hiermit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Bemerkung. Aus (41) folgt:

$$|\Gamma| \leq \frac{11}{9}, \quad |\Gamma'| \leq \frac{11}{9}, \quad |\Gamma''| \leq \frac{11}{9},$$

$$|\Gamma + \Gamma' + \Gamma'' - 1| \leq 2\delta\left(\frac{1}{|K|} + \frac{1}{|K'|} + \frac{1}{|K''|}\right) \leq \frac{2}{3},$$

also

$$\left| \frac{1}{\Gamma + \Gamma' + \Gamma''} - 1 \right| = \frac{|(G - \Gamma) + (G' - \Gamma') + (G'' - \Gamma'')|}{\Gamma + \Gamma' + \Gamma''} \leq 6\delta\left(\frac{1}{|K|} + \frac{1}{|K'|} + \frac{1}{|K''|}\right),$$

so daß jede der drei Zahlen $\frac{\Gamma}{\Gamma+\Gamma'+\Gamma''} - G$, $\frac{\Gamma''}{\Gamma+\Gamma'+\Gamma''} - G'$ und $\frac{\Gamma'''}{\Gamma+\Gamma'+\Gamma''} - G''$ absolut

$$< \frac{11}{9} \cdot \left| \frac{1}{\Gamma+\Gamma'+\Gamma''} - 1 \right| + 2\delta \left(\frac{1}{|\Gamma|} + \frac{1}{|\Gamma'|} + \frac{1}{|\Gamma''|} \right) \\ < 10\delta \left(\frac{1}{|\Gamma|} + \frac{1}{|\Gamma'|} + \frac{1}{|\Gamma''|} \right)$$

wegen $\frac{11}{9} \cdot 6 + 2 < 10$ ist.

Satz 13. Es bezeichne u'' eine ganze, U'' eine natürliche Zahl, $\chi(x)$ ein ganzwertiges Polynom genau g -ten Grades; der Koeffizient des Gliedes höchsten Grades in $\chi(x)$ werde K'' genannt. Es sei

$$\varepsilon > 0, \quad G \geq 0, \quad G' \geq 0, \quad G'' \geq 0 \quad \text{und} \quad G + G' + G'' = 1.$$

\mathfrak{E} sei die Menge der ganzen Zahlen s , denen man eine zu $\frac{A}{K'U}$ teilerfremde ganze Zahl $v \equiv u \pmod{U}$, eine zu $\frac{A}{K''U'}$ teilerfremde ganze Zahl $v' \equiv u' \pmod{U'}$ und eine ganze Zahl $v'' \equiv v'' \pmod{U''}$ mit

$$(43) \quad s \equiv K + K' + \chi(v'') \pmod{2(K, K')}$$

und

$$(44) \quad s \equiv Kv + K'v' + \chi(v'') \pmod{A}$$

zuordnen kann. Die Punkte s von \mathfrak{E} , bei denen man dabei v'' teilerfremd zu $g!2KK'UU''$ wählen kann, bilden eine Teilmenge von \mathfrak{E} , die ich \mathfrak{E}' nennen werde.

1. Ist $KG + K'G' + K''G'' = 0$, so kann jedes zu \mathfrak{E} gehörige s auf unendlich viele verschiedene Weisen auf die Gestalt

$$(45) \quad s = Kp + K'p' + \chi(x) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{K''} \chi(x) > 0$$

gebracht werden; dabei genügen die Primzahlen p und p' und die natürliche Zahl x den Kongruenzen

$$(46) \quad p \equiv u \pmod{U}; \quad p' \equiv u' \pmod{U'}; \quad x \equiv u'' \pmod{U''}$$

und den Ungleichungen

$$(47) \quad \left| \frac{p}{w} - G \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{p'}{w} - G' \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\chi(x)}{K''w} - G'' \right| < \varepsilon;$$

hierin ist $w = p + p' + \frac{1}{K''} \chi(x)$. Jedes zu \mathfrak{E}' gehörige s kann auf unendlich viele verschiedene Weisen sogar auf die Gestalt (45) gebracht werden, wobei p , p' und x Primzahlen mit (46) und (47) bezeichnen.

2. Ist $KG + K'G' + K''G'' > 0$, so kann jede hinreichend große Zahl s in \mathfrak{E} auf die Gestalt (45) gebracht werden, wobei die Primzahlen p und p' und die

natürliche Zahl x den Bedingungen (46) und (47) genügen. Dabei kann sogar, falls s eine hinreichend große zu \mathfrak{E} gehörige Zahl bezeichnet, für x eine Primzahl gewählt werden.

„Hinreichend groß“ soll in diesem Satz heißen: größer als eine geeignet gewählte Zahl, die nur von $K, K', U, U'', \varepsilon$ und χ abhängt.

3. Ist $KG + K'G' + K''G'' < 0$, so kann jede zu \mathfrak{E} gehörige negative Zahl mit hinreichend großem Absolutwert auf die Gestalt (45) gebracht werden, wobei die Primzahlen p und p' und die natürliche Zahl x den Bedingungen (46) und (47) genügen. Gehört dieses s zu \mathfrak{E} , so kann dabei für x eine Primzahl gewählt werden.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $\varepsilon \leq 1$ voraussetzen. Die Zahl δ werde durch

$$(48) \quad 20\delta \left(\frac{1}{|K|} + \frac{1}{|K'|} + \frac{1}{|K''|} \right) = \varepsilon$$

definiert, Γ, Γ' und Γ'' werden bestimmt wie in Hilfssatz 1 angegeben, und es werde $P = \Gamma N^g$ und $P' = \Gamma' N^g$ gesetzt, wobei $N \geq 3$ ist. Ich unterscheide drei verschiedene Fälle.

1. Es sei

$$(49) \quad KG + K'G' + K''G'' = 0.$$

In diesem Teil des Beweises bezeichnen $c_{48}, c_{49}, \dots, c_{54}$ geeignet gewählte positive Zahlen, die nur von $K, K', U, U'', \varepsilon, \chi$ und s abhängen. Dabei ist s eine feste zu \mathfrak{E} gehörige Zahl. Ist $N \geq c_{43}$, so gibt es ein X mit

$$\chi(X) - s = K'' \Gamma'' N^g \quad \text{und} \quad X \geq c_{49} N \geq N^{n-1},$$

und dann ist

$$(50) \quad N^g n^{-1} \leq P \leq N^g n \quad \text{und} \quad N^g n^{-1} \leq P' \leq N^g n.$$

Aus (40) und (49) folgt:

$$KP + K'P' + \chi(X) = (K\Gamma + K'\Gamma' + K''\Gamma'')N^g + s = s.$$

Die Voraussetzungen von Satz 12 sind also mit $\eta = 1$ erfüllt, woraus folgt, daß die Anzahl der Darstellungen $s = Kp + K'p' + \chi(x)$ mit $x \equiv u'' \pmod{U''}$, (36) und (37) größer als $c_{50} N^{n-1} - c_{51}$ ist. Gehört s zu \mathfrak{E} , so ist die Anzahl der Darstellungen $s = Kp + K'p' + \chi(p'')$ mit $p'' \equiv u'' \pmod{U''}$, (38) und (37) größer als $c_{52} N^{n-2} - c_{53}$.

Aus (37) folgt:

$$|p - \Gamma N^g| \leq N^g n^{-1}, \quad |p' - \Gamma' N^g| \leq N^g n^{-1}$$

und aus (36):

$$|\chi(x) - K'' \Gamma'' N^g| \leq |s| + N^g n^{-1},$$

also:

$$|w - \Gamma N^g - \Gamma' N^g - \Gamma'' N^g| \leq |s| + \left(2 + \frac{1}{|K''|}\right) N^g n^{-1}.$$

Ist $N \geq c_{54}$, so ist daher:

$$(51) \quad \left| \frac{p}{w} - \frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma' + \Gamma''} \right| < \frac{1}{2} \varepsilon; \quad \left| \frac{p'}{w} - \frac{\Gamma'}{\Gamma + \Gamma' + \Gamma''} \right| < \frac{1}{2} \varepsilon;$$

$$\left| \frac{\chi(x)}{K''w} - \frac{\Gamma''}{\Gamma + \Gamma' + \Gamma''} \right| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Mit Rücksicht auf (48) folgen nun die Ungleichungen (47) aus der Bemerkung von Hilfssatz 1.

Gehört s zu \mathfrak{E} , so wächst die Anzahl der gefundenen Darstellungen $s = Kp + K'p' + \chi(x)$ mit N unbeschränkt. Gehört s zu \mathfrak{E}' , so wächst auch die Anzahl der gefundenen Darstellungen $s = Kp + K'p' + \chi(p'')$ mit N unbeschränkt, womit der erste Fall erledigt ist.

2. Es sei $KG + K'G' + K''G'' > 0$. Wird

$$N^g = \frac{s}{KG + K'G' + K''G''}, \quad \text{also} \quad \geq \frac{s}{\max(|K|, |K'|, |K''|)}$$

gesetzt, so ist $N \geq 3$ bei hinreichend großem s . Ist s genügend groß, so gibt es ein X mit

$$\chi(X) = K''\Gamma''N^g \quad \text{und} \quad X \geq c_{55}N \geq N^{n-1},$$

während die Ungleichungen (50) dann wiederum gelten; hierin hängt die positive Zahl c_{55} nur von χ , K'' und δ ab.

Aus (40) geht hervor

$$KP + K'P' + \chi(X) = (K\Gamma + K'\Gamma' + K''\Gamma'')N^g \\ = (KG + K'G' + K''G'')N^g = s.$$

Nach Satz 12, mit $\eta = 1$ angewandt, kann jede hinreichend große zu \mathfrak{E} gehörige Zahl auf die Gestalt $Kp + K'p' + \chi(x)$ mit $x \equiv u'' \pmod{U''}$, (36) und (37) gebracht werden; jedes zu \mathfrak{E}' gehörige hinreichend große s besitzt sogar die Gestalt $Kp + K'p' + \chi(p'')$ mit $p'' \equiv u'' \pmod{U''}$, (37) und (38) Folglich ist

$$|p - \Gamma N^g| \leq N^g n^{-1}; \quad |p' - \Gamma' N^g| \leq N^g n^{-1}; \quad |\chi(x) - K''\Gamma'' N^g| \leq N^g n^{-1},$$

also

$$|w - \Gamma N^g - \Gamma' N^g - \Gamma'' N^g| \leq \left(2 + \frac{1}{|K''|}\right) N^g n^{-1}.$$

Bei hinreichend großem s gelten also die Ungleichungen (51), somit mit Rücksicht auf (48) und die Bemerkung von Hilfssatz 1 auch die Ungleichungen (47), womit auch dieser Fall erledigt ist.

3. Es sei $KG + K'G' + K''G'' < 0$. Dieser Fall folgt unmittelbar aus 2.; man braucht nur K , K' , K'' , s und $\chi(x)$ durch $-K$, $-K'$, $-K''$, $-s$ und $-\chi(x)$ zu ersetzen.

Satz 14. Es seien K , K' , K'' drei ganze Zahlen $\neq 0$; G , G' und G'' drei Zahlen ≥ 0 mit $G + G' + G'' = 1$; die ganzen Zahlen u , u' und u'' seien teilerfremd zu der positiven geraden Zahl U . Es sei $\varepsilon > 0$.

1. Ist $KG + K'G' + K''G'' = 0$, so kann jedes ganze s mit

$$(52) \quad (s, K', K'') = (s, K, K'') = (s, K, K') = (K, K', K'')$$

und

$$(53) \quad s \equiv Ku + K'u' + K''u'' \pmod{(K, K', K'') U}$$

auf unendlich viele Weisen auf die Gestalt

$$(54) \quad s = Kp + K'p' + K''p''$$

gebracht werden, wo die Primzahlen p, p' und p'' den Kongruenzen

$$(55) \quad p \equiv u, \quad p' \equiv u', \quad p'' \equiv u'' \pmod{U}$$

und den Ungleichungen

$$(56) \quad \left| \frac{p}{p+p'+p''} - G \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{p'}{p+p'+p''} - G' \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{p''}{p+p'+p''} - G'' \right| < \varepsilon$$

genügen.

2. Ist $KG + K'G' + K''G'' > 0$, so kann jedes hinreichend große ganze s mit (52) und (53) auf die Gestalt (54) mit (55) und (56) gebracht werden. „Hinreichend groß“ soll hier heißen: größer als eine geeignet gewählte, nur von K, K', K'', U und ε abhängige Zahl.

3. Ist $KG + K'G' + K''G'' < 0$, so kann jedes negative ganze s mit (52) und (53) und mit hinreichend großem Absolutwert auf die Gestalt (54) mit (55) und (56) gebracht werden.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $(K, K', K'') = 1$ voraussetzen, da ich sonst nur s, K, K' und K'' durch $\frac{s}{(K, K', K'')}, \frac{K}{(K, K', K'')}, \frac{K'}{(K, K', K'')}$ und $\frac{K''}{(K, K', K'')}$ zu ersetzen brauche.

Ich brauche nur zu zeigen, daß jedem s mit (52) und (53) drei zu $KK'U$ teilerfremde ganze Zahlen v, v' und v'' mit

$$(57) \quad s = Kv + K'v' + K''v''; \quad v \equiv u; \quad v' \equiv u'; \quad v'' \equiv u'' \pmod{U}$$

zugeordnet werden können. Denn da U gerade ist, sind v und v' ungerade, so daß, wenn

$$\chi(x) = K''x, \quad U' = U'' = U, \quad \Lambda = \frac{KK'U}{(K, K')}$$

gesetzt wird, aus (57) folgt:

$$\frac{s - \chi(v'')}{(K, K')} = \frac{K}{(K, K')}v + \frac{K'}{(K, K')}v' \equiv \frac{K}{(K, K')} + \frac{K'}{(K, K')} \pmod{2},$$

somit

$$s \equiv K + K' + \chi(v'') \pmod{2(K, K')};$$

hierin ist v teilerfremd zu $\frac{\Lambda}{K'U}$, weiter v' teilerfremd zu $\frac{\Lambda}{K'U}$, schließlich v'' teilerfremd zu $g! 2KK'UU'U'' = 2KK'U^2$; folglich sind alle Vor-

aussetzungen des vorigen Satzes erfüllt, woraus dann die Behauptung des zu beweisenden Satzes hervorgeht.

Es werde $(K, K') = \sigma$ gesetzt. Aus $(K, K', K'') = 1$ folgt, daß σ teilerfremd zu K'' ist. Die nach (53) ganze Zahl

$$r = \frac{s - Ku - K'u' - K''u''}{U}$$

kann also auf die Gestalt $r = \sigma\alpha + K''\beta$ gebracht werden, wo α und β ganz sind. Für jedes ganze γ ist dann

$$(58) \quad r = \sigma(\alpha + K''\gamma) + K''\tau'' \quad \text{mit} \quad \tau'' = \beta - \sigma\gamma.$$

Ich werde nun zeigen, daß die ganze Zahl γ so gewählt werden kann, daß sie den zwei folgenden Bedingungen, in denen

$$(59) \quad v'' = u'' + \tau''U, \quad \text{also} \quad v'' = u'' + \beta U - U\sigma\gamma$$

gesetzt ist, genügt:

I. Eine ungerade Primzahl, die in KK' und auch in v'' aufgeht, geht in $U\sigma$ auf.

II. Eine ungerade Primzahl, die in KK' und in $\frac{K}{\sigma}u + \frac{K'}{\sigma}u' + U(\alpha + K''\gamma)$ aufgeht, geht in $K''U$ auf.

Ist p ein ungerader Primfaktor von KK' , der nicht in $U\sigma$ aufgeht, so besagt Bedingung I, daß p nicht in v'' aufgeht, so daß durch diese Bedingung für γ genau eine Restklasse modulo p ausgeschlossen wird. Ist p ein ungerader Primfaktor von KK' , der nicht in $K''U$ aufgeht, so besagt Bedingung II, daß p nicht in $\frac{K}{\sigma}u + \frac{K'}{\sigma}u' + \alpha U + K''U\gamma$ aufgeht, so daß auch diese Bedingung für γ genau eine Restklasse modulo p ausschließt. Mindestens $p-2$ Restklassen modulo p stehen noch für γ zur Verfügung, und da in den Bedingungen I und II nur gesprochen wird über die ungeraden Primfaktoren von $\frac{KK'}{\sigma}$, gibt es wenigstens eine Restklasse modulo $\frac{KK'}{\sigma}$ mit der Eigenschaft, daß jedes zu dieser Restklasse gehörige γ den Bedingungen I und II genügt.

Da $\frac{K}{\sigma}$ und $\frac{K'}{\sigma}$ teilerfremd sind, kann $\alpha + K''\gamma$ auf die Gestalt $\frac{K}{\sigma}\eta + \frac{K'}{\sigma}\eta'$ gebracht werden, wo η und η' ganz sind. Dann ist

$$\alpha + K''\gamma = \frac{K}{\sigma}\tau + \frac{K'}{\sigma}\tau', \quad \text{falls} \quad \tau = \eta + \frac{K'}{\sigma}\zeta \quad \text{und} \quad \tau' = \eta' - \frac{K}{\sigma}\zeta$$

gesetzt wird. Genau wie oben kann ich zeigen, daß man die ganze Zahl ζ so wählen kann, daß sie den folgenden Bedingungen, in denen

$$v = u + \tau U = u + \eta U + \frac{K'}{\sigma}U\zeta$$

und

$$v' = u' + \tau' U = u + \eta' U - \frac{K}{\sigma} U \zeta$$

gesetzt ist, genügt:

III. Eine ungerade Primzahl, die in KK' und v aufgeht, geht auch in $\frac{K'}{\sigma} U$ auf.

IV. Eine ungerade Primzahl, die in KK' und v' aufgeht, geht auch in $\frac{K}{\sigma} U$ auf.

Ich werde nun zeigen, daß die so definierten Zahlen v , v' und v'' die verlangten Eigenschaften besitzen.

Man hat

$$Kv + K'v' + K''v'' = Ku + K'u' + K''u'' + U(K\tau + K'\tau' + K''\tau''),$$

wo

$$K\tau + K'\tau' + K''\tau'' = K\eta + K'\eta' + K''\tau'' = \sigma(\alpha + K''\gamma) + K''\tau'' = r,$$

also

$$Kv + K'v' + K''v'' = Ku + K'u' + K''u'' + Ur = s,$$

womit die erste der Beziehungen (57) bewiesen ist. Daß die drei Kongruenzen (57) erfüllt sind, ist evident, so daß es genügt, einen Widerspruch abzuleiten aus der Annahme, daß v , v' , v'' und K , K' , K'' einen gemeinsamen Primteiler p besitzen. Da u , u' und u'' teilerfremd zu U sind, so folgt aus den Kongruenzen (57), daß v , v' , v'' teilerfremd zu U ist, so daß p kein Faktor von U , also ein ungerader Primfaktor von KK' ist. Ich unterscheide nun drei verschiedene Fälle:

1. Es sei p ein Teiler von v'' . Dann ist p nach I ein Teiler von $U\sigma$, also von σ , somit von K und von K' , folglich wegen (57) auch von s , in Widerspruch zu $(s, K, K') = 1$.

2. Es sei p ein Teiler von v . Dann ist p nach III ein Teiler von $\frac{K'}{\sigma} U$, also von $\frac{K'}{\sigma}$, somit auch von

$$\begin{aligned} \frac{K}{\sigma} v + \frac{K'}{\sigma} v' &= \frac{K}{\sigma} u + \frac{K'}{\sigma} u' + U\left(\frac{K}{\sigma} \tau + \frac{K'}{\sigma} \tau'\right) \\ &= \frac{K}{\sigma} u + \frac{K'}{\sigma} u' + U\left(\frac{K}{\sigma} \eta + \frac{K'}{\sigma} \eta'\right) \\ &= \frac{K}{\sigma} u + \frac{K'}{\sigma} u' + U(\alpha + K''\gamma). \end{aligned}$$

Aus II folgt nun, daß p ein Teiler von $K''U$, also von K'' ist. Dann wäre p ein Teiler von v , K' und K'' , also wegen (57) auch von s , in Widerspruch zu $(s, K', K'') = 1$.

3. Auf analoge Weise leitet man einen Widerspruch ab aus der Annahme, daß p ein Teiler von v' ist.

Hiermit ist Satz 14 vollständig bewiesen.

§ 3.

Beweis der Sätze 1, 2 und 3.

In meiner 2., 3., 4. Arbeit²⁾ habe ich den Spezialfall der Sätze 1, 2 und 3 mit

$$(60) \quad K^2 = K'^2 = K_1^2 = K_2^2 = K_3^2 = K_4^2 = 1$$

bewiesen, aber dabei habe ich versprochen, in dieser Annalen-Arbeit den Hilfssatz abzuleiten, der hier als Hilfssatz 3 vorkommt. Für den Beweis von Hilfssatz 3 brauche ich den folgenden

Hilfssatz 2. Sind A und X natürliche Zahlen mit $A \leq X$, ist P ganz und $|u_x| \leq 1$, so ist

$$A^2 \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} u_x \right|^2 < 4AX^3 + 4XR \sum_{s=1}^{A-1} (A-s) \sum_{x=P+1}^{P+X-s} u_{x+s} \bar{u}_x,$$

wo \bar{w} den konjugiert-komplexen Wert von w bezeichnet und Rw den Realteil von w .

Bekannt³⁾.

Hilfssatz 3. Jedem Paar natürlicher Zahlen g und m können eine natürliche Zahl h und eine positive Zahl c_{56} zugeordnet werden, die folgende Bedingung erfüllen: für jedes ganze P , jedes ganze $Z \geq 3$, jede reelle Zahl α mit der Eigenschaft, daß das abgeschlossene Intervall $(\alpha \mp Z^{-g} z^h)$ keinen Bruch mit positivem Nenner $\leq z^h$ enthält⁴⁾, und für jedes Polynom $\psi(x) = \frac{x^g}{g!} + \dots$ gilt die Ungleichung

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+Z} e^{2\pi i \alpha \psi(x)} \right| \leq c_{56} Z z^{-m}.$$

Beweis. Ist $g = 1$, so ist

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+Z} e^{2\pi i \alpha \psi(x)} \right| = \left| \sum_{x=P+1}^{P+Z} e^{2\pi i \alpha x} \right| \leq \frac{2}{|\sin \pi \alpha|} \leq \frac{2}{|\sin \pi Z^{-1} z^h|} \leq Z z^{-h},$$

²⁾ J. G. van der Corput, Sur deux, trois ou quatre nombres premiers, Proceedings Kon. Akademie Amsterdam 40 (1937, November und Dezember); 41 (1938, Januar, Februar und März). Ich nenne diese die 2., 3., 4. Arbeit.

³⁾ Vergl. J. G. van der Corput, Diophantische Ungleichungen, Acta mathematica 56 (1931), S. 373–456 (S. 407); oder J. G. van der Corput, Sur la méthode de Weyl dans la théorie des nombres, Proceedings Kon. Akademie Amsterdam 40 (1937), S. 668–675 (S. 669); oder J. F. Koksa, Diophantische Approximationen (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Bd. 4, Nr. 4) (1936), S. 94 (Julius Springer, Berlin).

⁴⁾ $(\alpha \mp \eta)$ bezeichnet das abgeschlossene Intervall $(\alpha - \eta, \alpha + \eta)$.

da das abgeschlossene Intervall $(\alpha \mp Z^{-1} z^h)$ keine ganze Zahl enthält; die Behauptung gilt dann also mit $h = m$.

Ich darf also $g \geq 2$ voraussetzen und annehmen, daß der Hilfssatz schon bewiesen ist, falls g durch $g - 1$ ersetzt wird. Wir wissen dann, daß eine nur von g und m abhängige natürliche Zahl $h \geq 2m$ und eine nur von g und m abhängige positive Zahl c_{57} existieren, die folgende Bedingung erfüllen: für jedes ganze P , jedes ganze $Z \geq 3$ und jede reelle Zahl β mit der Eigenschaft, daß das abgeschlossene Intervall $(\beta \mp Z^{1-g} z^{h-2m})$ keinen Bruch mit positivem Nenner $\leq z^{h-2m}$ enthält, und für jedes Polynom $\chi(x) = \frac{x^{g-1}}{(g-1)!} + \dots$ gilt die Ungleichung

$$(61) \quad \left| \sum_{x=P+1}^{P+Z} e^{2\pi i \beta \chi(x)} \right| \leq c_{57} Z z^{-2m}.$$

Betrachten wir nun ein ganzes $Z \geq 3$ und ein reelles α mit der Eigenschaft, daß das abgeschlossene Intervall $(\alpha \mp Z^{-g} z^h)$ keinen Bruch mit positivem Nenner $\leq z^h$ enthält! Bekanntlich gibt es wenigstens einen irreduziblen Bruch $\frac{a}{q}$ mit $0 < q \leq z^h$ und mit der Eigenschaft, daß $\eta = \alpha - \frac{a}{q}$ absolut $\leq z^{-2h}$ ist. Aus der genannten Eigenschaft von α folgt $|\eta| > Z^{-g} z^h$. Ich unterscheide nun zwei verschiedene Fälle:

1. Es sei $|\eta| > Z^{1-g} z^{h-2m}$. Wird $A = [\frac{1}{2} z^{2m}] + 1$ gesetzt und bezeichnet s irgendeine natürliche Zahl $\leq A$, so ist

$$\left| s\alpha - \frac{sa}{q} \right| = s|\eta| > Z^{1-g} z^{h-m},$$

und für jeden Bruch $\frac{a'}{q'}$ mit $0 < q' \leq z^{h-2m}$ ist

$$\begin{aligned} \left| s\alpha - \frac{a'}{q'} \right| &\geq \left| \frac{sa}{q} - \frac{a'}{q'} \right| - \left| s\alpha - \frac{sa}{q} \right| \geq \frac{1}{qq'} - s|\eta| \\ &\geq z^{-h} \cdot z^{-h+2m} - \left(\frac{1}{2} z^{2m} + 1 \right) z^{-2h} > \frac{1}{2} z^{2m-2h} > Z^{1-g} z^{h-2m} \end{aligned}$$

bei hinreichend großem Z (sonst ist die zu beweisende Behauptung evident). Das abgeschlossene Intervall $(s\alpha \mp Z^{1-g} z^{h-2m})$ enthält also keinen Bruch mit positivem Nenner $\leq z^{h-2m}$. Formel (61), mit

$$(62) \quad \beta = \alpha s, \quad \chi(x) = \frac{\psi(x+s) - \psi(x)}{s} = \frac{x^{g-1}}{(g-1)!} + \dots$$

angewandt, liefert also

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+Z} e^{2\pi i \alpha (\psi(x+s) - \psi(x))} \right| \leq c_{57} Z z^{-2m},$$

somit für jedes positive ganze $s \leq A$:

$$(63) \quad \left| \sum_{x=P+1}^{P+Z-s} e^{2\pi i \alpha (\psi(x+s) - \psi(x))} \right| \leq c_{58} Z z^{-2m}.$$

In diesem Beweis hängen c_{59} , c_{60} und c_{61} nur von g und m ab. Im folgenden Fall werde ich eine analoge Formel ableiten.

2. Es sei $|\eta| \leq Z^{1-g} z^{h-2m}$. Wird $A = \left[\frac{1}{2|\eta|} Z^{1-g} z^h \right]$ gesetzt, so ist $A < \frac{1}{2} Z$ wegen $|\eta| > Z^{-g} z^h$. Ich werde beweisen, daß Formel (63) für jedes ganze $s \geq 2^g (A+1) z^{-2m}$ und $\leq A$ gilt. Dann ist

$$\left| s\alpha - \frac{s\alpha}{q} \right| = s|\eta| \geq \frac{2^g}{2|\eta|} Z^{1-g} z^{h-2m} |\eta| \geq (Z-s)^{1-g} (\log(Z-s))^{h-2m},$$

und für jeden Bruch $\frac{a'}{q'} \neq \frac{s\alpha}{q}$ mit $0 < q' \leq (\log(Z-s))^{h-2m}$ ist

$$\begin{aligned} \left| s\alpha - \frac{a'}{q'} \right| &\geq \left| \frac{s\alpha}{q} - \frac{a'}{q'} \right| - \left| s\alpha - \frac{s\alpha}{q} \right| \geq \frac{1}{q q'} - s|\eta| \\ &\geq z^{-h} \cdot z^{-h+2m} - \frac{1}{2} Z^{1-g} z^h > (Z-s)^{1-g} (\log(Z-s))^{h-2m} \end{aligned}$$

bei hinreichend großem Z . Formel (61) mit (62) und mit $Z-s$ statt Z angewandt, liefert (63).

In beiden Fällen kann ich nun die fundamentale Ungleichung anwenden. Diese liefert:

$$\begin{aligned} (64) \quad A^2 \left| \sum_{x=P+1}^{P+Z} e^{2\pi i \alpha \psi(x)} \right|^2 &< 4 A Z^2 \\ &+ 4 Z R \sum_{s=1}^{A-1} (A-s) \sum_{x=P+1}^{P+Z-s} e^{2\pi i \alpha (\psi(x+s) - \psi(x))}. \end{aligned}$$

Ist

$$|\eta| > Z^{1-g} z^{h-2m}, \quad 1 \leq s \leq A,$$

oder

$$|\eta| \leq Z^{1-g} z^{h-2m}, \quad 2^g (A+1) z^{-2m} \leq s \leq A,$$

so gilt (63), und der Gesamtbeitrag dieser s zu der rechten Seite von (64) ist somit:

$$\leq 4 Z A \sum_{s=1}^{A-1} c_{59} Z z^{-2m} < 4 c_{59} Z^2 A^2 z^{-2m}.$$

Der Beitrag der $s < 2^g (A+1) z^{-2m}$ ist höchstens

$$4 Z A \cdot 2^g (A+1) z^{-2m} Z < c_{59} Z^2 A^2 z^{-2m}.$$

Die rechte Seite von (64) ist also in beiden Fällen kleiner als

$$4 A Z^2 + c_{60} Z^2 A^2 z^{-2m} < c_{61} Z^2 A^2 z^{-2m},$$

woraus die Behauptung folgt.

Für jedes positive ganze q und jedes ganze $t \neq 0$ werde

$$(65) \quad H_2'(q, t) = \frac{1}{q^3} \sum_{a=1}^q \sum_{h=1}^q \sum_{h'=1}^q e^{2\pi i \frac{a}{q} (Kh + K'h' - t)},$$

a, h und h' teilerfremd zu q

$$(66) \quad H_3'(q, t) = \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{a=1}^q \sum_{h_1=1}^q \sum_{\substack{h_2=1 \\ a, h_1, h_2 \text{ teilerfremd zu } q}}^q e^{2\pi i \frac{a}{q} (Kh + K_1 h_1^2 + K_2 h_2^2 - 0)}$$

und

$$(67) \quad H_4'(q, t) = \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{a=1}^q \sum_{h_1=1}^q \sum_{h_2=1}^q \sum_{\substack{h_3=1 \\ a, h_1, h_2, h_3, h_4 \text{ teilerfremd zu } q}}^q e^{2\pi i \frac{a}{q} (K_1 h_1^2 + K_2 h_2^2 + K_3 h_3^2 + K_4 h_4^2 - 0)}$$

gesetzt; weiter werde

$$H_2'(q, 0) = H_3'(q, 0) = H_4'(q, 0) = 0$$

gesetzt.

Genau wie ich in meiner 2., 3., 4. Arbeit die Spezialfälle mit (60) bewiesen habe, kann ich unter den Voraussetzungen von Satz $\sigma - 1$ ($\sigma = 2, 3$ oder 4) die Ungleichung

$$\sum_{|x| \leq x} |F_\sigma(\psi(x) + s) - \Phi_\sigma(\psi(x) + s)| \sum_{q=1}^{\infty} H_\sigma'(q, \psi(x) + s) < c_{62} Z^{g+1} x^{-m}$$

ableiten; c_{62} hängt nur ab von

$$\begin{array}{ll} m, \psi, K, K' & \text{falls } \sigma = 2; \\ m, \psi, K, K_1, K_2 & \text{,, } \sigma = 3; \\ m, \psi, K_1, K_2, K_3, K_4 & \text{,, } \sigma = 4. \end{array}$$

Ich brauche also nur noch zu zeigen

$$\sum_{q=1}^{\infty} H_\sigma'(q, t) = \Omega_\sigma(q, t) \quad (\sigma = 2, 3, 4).$$

Ich darf dabei $t \neq 0$ annehmen, da sonst beide Glieder verschwinden.

Hilfssatz 4. Sind q_1 und q_2 teilerfremde natürliche Zahlen, so ist für jedes ganze t

$$H_\sigma'(q_1 q_2, t) = H_\sigma'(q_1, t) H_\sigma'(q_2, t) \quad (\sigma = 2, 3, 4).$$

Beweis. Der Beweis geht genau wie in Hilfssatz 15 meiner 2., 3., 4. Arbeit.

Hilfssatz 5. Ist τ eine natürliche, K eine ganze Zahl, p eine Primzahl, die nicht in der ganzen Zahl a aufgeht, so ist

$$\sum_{\substack{h=1 \\ (h, p)=1}}^{p^\tau} e^{2\pi i a K h p^{-\tau}}$$

gleich

- 0, falls K nicht teilbar durch $p^{\tau-1}$ ist;
 $-p^{\tau-1}$, falls K durch $p^{\tau-1}$, aber nicht durch p^τ teilbar ist;
 $p^{\tau-1}(p-1)$, falls K durch p^τ teilbar ist.

Beweis. Ich darf annehmen, daß K nicht durch p^τ teilbar ist, da sonst die Behauptung evident ist. Sei K durch p^α , aber nicht durch $p^{\alpha+1}$ teilbar.

Dann ist $\tau \geq \mu + 1$, und die betrachtete Summe hat, wenn $K = Lp^\mu$ gesetzt wird, den Wert

$$p^\mu \sum_{\substack{h=1 \\ (h,p)=1}}^{p^{\tau-\mu}} e^{\frac{2\pi i a L h}{p^{\tau-\mu}}} = p^\mu \left\{ \sum_{h=1}^{p^{\tau-\mu}} e^{\frac{2\pi i a L h}{p^{\tau-\mu}}} - \sum_{h=1}^{p^{\tau-\mu-1}} e^{\frac{2\pi i a L h}{p^{\tau-\mu-1}}} \right\} \\ = 0 - 0 = 0 \quad \text{oder} \quad 0 - p^\mu = -p^{\tau-1},$$

je nachdem $\tau >$ oder $= \mu + 1$ ist. Hiermit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Hilfssatz 6. Es seien K und K' zwei ganze teilerfremde Zahlen $\neq 0$.

Ist die natürliche Zahl q durch ein Quadrat > 1 teilbar, so ist $H'_2(q, t) = 0$.

Für jede Primzahl p ist

$$H'_2(p, t) = (-1)^{\lambda+1} (p-1)^{\lambda-2},$$

wo λ die Anzahl der durch p teilbaren Zahlen bezeichnet, die im System $K, K', -t$ vorkommen (also $\lambda = 0, 1$ oder 2).

Beweis. 1. Es sei q durch p^τ , aber nicht durch $p^{\tau+1}$ teilbar, wo $\tau \geq 2$ ist und p eine Primzahl bezeichnet. Wenigstens eine der Zahlen K und K' ist nicht durch p teilbar, so daß

$$H'_2(p^\tau, t) = \frac{1}{p^\tau(p^\tau)} \sum_{a=1}^{p^\tau} e^{-\frac{2\pi i a t}{p^\tau}} \sum_{h=1}^{p^\tau} e^{\frac{2\pi i a K h}{p^\tau}} \sum_{h'=1}^{p^\tau} e^{\frac{2\pi i a K' h'}{p^\tau}}$$

a, h und h' nicht durch p teilbar

nach dem vorigen Hilfssatz den Wert Null hat. Nach Hilfssatz 4 verschwindet dann auch $H'(q, t)$.

2. Ist weder K noch K' durch p teilbar, so ist

$$H'_2(p, t) = \frac{1}{(p-1)^2} \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} = \frac{1}{p-1} \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{(p-1)^2},$$

je nachdem t durch p teilbar ist oder nicht, d. h. je nachdem $\lambda = 1$ oder 0 ist.

Ist dagegen eine der Zahlen K und K' durch p teilbar, so ist

$$H'_2(p, t) = \frac{-1}{p-1} \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} = -1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{p-1},$$

je nachdem $-t$ durch p teilbar ist oder nicht, d. h. je nachdem $\lambda = 2$ oder 1 ist.

Beweis von Satz 1. Ich brauche nur zu zeigen, daß für jedes positive ganze q und jedes ganze $t \neq 0$

$$(68) \quad \sum_{q=1}^{\infty} H'_2(q, t) = \Omega_2(q, t)$$

ist.

Aus den Hilfssätzen 4 und 6 geht hervor, daß die linke Seite den Wert

$$\prod_p (1 + H_2(p, t))$$

hat. Ist $t \equiv K + K' + 1 \pmod{2}$, so kommen im System $K, K', -t$ null oder zwei gerade Zahlen vor, so daß dann nach dem vorigen Hilfssatz $1 + H_2(2, t)$, also auch die linke Seite von (68) verschwindet. Hat t mit KK' einen Primfaktor p gemeinsam, so kommen im System $K, K', -t$ genau zwei durch p teilbare Zahlen vor, so daß nach dem vorigen Hilfssatz $1 + H_2(p, t)$, also auch die linke Seite von (68) verschwindet. Ich darf also weiter annehmen, daß t eine Zahl $\neq 0$ bezeichnet, die $\equiv K + K' \pmod{2}$ und teilerfremd zu KK' ist, so daß $\Omega_2(t)$ durch (2) definiert ist.

Ist p eine ungerade Primzahl von $KK't$, so kommt im System $K, K', -t$ genau eine durch p teilbare Zahl vor, so daß, wiederum nach dem vorigen Hilfssatz,

$$1 + H_2(p, t) = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p-1}{p-2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

ist. Ist dagegen die ungerade Primzahl p kein Faktor von $KK't$, so ist keine der Zahlen $K, K', -t$ durch p teilbar, also

$$1 + H_2(p, t) = 1 - \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Schließlich kommt im System $K, K', -t$ genau eine gerade Zahl vor, somit

$$1 + H_2(2, t) = 2.$$

Die linke Seite von (68) ist daher

$$2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p|KK't \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} = \Omega_2(t),$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 7. Ist die ungerade Zahl $m = p^1$ teilerfremd zu der ganzen Zahl a , so besitzt die Gaußsche Summe

$$\sum_{h=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i a h^2}{m}}$$

bekanntlich den Wert $\sqrt{m} \sigma_m(a)$; hierin ist

- $\sigma_m(a) = 1$ falls $m \equiv 1 \pmod{4}$ und a ein Quadratrest von p ist;
 $= (-1)^1$ falls $m \equiv 1 \pmod{4}$ und a ein Nichtrest von p ist;
 $= i$ falls $m \equiv -1 \pmod{4}$ und a ein Quadratrest von p ist;
 $= -i$, falls $m \equiv -1 \pmod{4}$ und a ein Nichtrest von p ist.

Hieraus folgt für jede ungerade Primzahl p , die kein Teiler der ganzen Zahl t ist,

$$\sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p} \sigma_p(-t))$$

a Quadratrest von p

und

$$\sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{p} \sigma_p(-t)).$$

a Nichtrest von p

Hilfssatz 8. Haben K , K_1 und K_2 den größten gemeinsamen Teiler 1 und ist t ganz $\neq 0$, so ist für jede ungerade Primzahl p die durch (66) festgelegte Funktion $H'_3(p, t)$ gleich der durch (4) definierten Funktion $H_3(p, t)$.

Beweis. $(p-1)^3 H'_3(p, t)$ hat den Wert

$$\sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} \sum_{h_1=1}^{p-1} e^{\frac{2\pi i a K_1 h_1^2}{p}} \sum_{h_2=1}^{p-1} e^{\frac{2\pi i a K_2 h_2^2}{p}} \sum_{h=1}^{p-1} e^{\frac{2\pi i a K h^2}{p}},$$

also den Wert $(1-p)^0 S$, wo

$$S = - \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} \sum_{h_1=1}^{p-1} e^{\frac{2\pi i a K_1 h_1^2}{p}} \sum_{h_2=1}^{p-1} e^{\frac{2\pi i a K_2 h_2^2}{p}}$$

und $\varphi = 1$ oder 0, je nachdem p ein Teiler von K ist oder nicht. Ich bezeichne mit λ die Anzahl der durch p teilbaren Zahlen, die im System K_1 , K_2 , $-t$ vorkommen, mit μ die Anzahl der in diesem System auftretenden Quadratreste von p .

Ich setze

$$\varepsilon = 1 \text{ und } \nu = 1 \text{ falls } p \equiv 1 \pmod{4} \text{ ist;}$$

$$\varepsilon = i \text{ und } \nu = -1 \text{ „ } p \equiv -1 \pmod{4} \text{ ist.}$$

Ich unterscheide verschiedene Fälle. Ich schreibe dabei σ_1 , σ_2 und σ_3 statt $\sigma_p(K_1)$, $\sigma_p(K_2)$ und $\sigma_p(-t)$.

1. Keine der Zahlen K_1 und K_2 sei durch p teilbar. Nach dem vorigen Hilfssatz ist dann

$$S = -(-1 + \sqrt{p} \sigma_1) (-1 + \sqrt{p} \sigma_2) \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}}$$

a Quadratrest von p

$$-(-1 - \sqrt{p} \sigma_1) (-1 - \sqrt{p} \sigma_2) \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}}.$$

a Nichtrest von p

1, 1. Ist $-t$ nicht durch p teilbar (also $\lambda = 0$), so ist nach dem vorigen Hilfssatz

$$S = -\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p} \sigma_1)(-1 + \sqrt{p} \sigma_2)(-1 + \sqrt{p} \sigma_3) \\ - \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{p} \sigma_1)(-1 - \sqrt{p} \sigma_2)(-1 - \sqrt{p} \sigma_3).$$

Ist $\mu = 0$ oder 3, so ist $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \pm \varepsilon$, also

$$S = -\frac{1}{2}(-1 + \varepsilon \sqrt{p})^3 - \frac{1}{2}(-1 + \varepsilon \sqrt{p})^3 = 1 + 3\varepsilon^2 p = 1 + 3vp.$$

Ist dagegen $\mu = 1$ oder 2, so besitzen zwei der Zahlen σ_1 , σ_2 und σ_3 denselben Wert $\pm \varepsilon$, während die andere dieser drei Zahlen dann den entgegengesetzten Wert $\mp \varepsilon$ hat; dann ist also

$$S = -\frac{1}{2}(-1 + \varepsilon \sqrt{p})^2(-1 - \varepsilon \sqrt{p}) - \frac{1}{2}(-1 - \varepsilon \sqrt{p})^2(-1 + \varepsilon \sqrt{p}) \\ = 1 - \varepsilon^2 p = 1 - vp.$$

In beiden Fällen ist also $H'_3(p, t) = H_3(p, t)$.

1, 2. Ist $-t$ durch p teilbar (also $\lambda = 1$), so ist

$$S = -\frac{1}{2}(p-1)(-1 + \sqrt{p} \sigma_1)(-1 + \sqrt{p} \sigma_2) \\ - \frac{1}{2}(p-1)(-1 - \sqrt{p} \sigma_1)(-1 - \sqrt{p} \sigma_2).$$

Ist $\mu = 0$ oder 2, so ist

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \pm \varepsilon,$$

also

$$S = -\frac{1}{2}(p-1)(-1 + \varepsilon \sqrt{p})^2 - \frac{1}{2}(p-1)(-1 - \varepsilon \sqrt{p})^2 \\ = -(p-1)(1 + \varepsilon^2 p) = (p-1)(-1 - vp).$$

Ist dagegen $\mu = 1$, so hat man

$$S = -(p-1)(-1 + \varepsilon \sqrt{p})(-1 - \varepsilon \sqrt{p}) = -(p-1)(1 - \varepsilon^2 p) \\ = (p-1)(-1 + vp).$$

Auch in diesen zwei Fällen ist $H'_3(p, t) = H_3(p, t)$.

2. Eine und nur eine der Zahlen K_1 und K_2 sei durch p teilbar. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich annehmen, daß K_2 durch p teilbar ist, also K_1 nicht. Dann ist nach dem vorigen Hilfssatz

$$S = -(p-1)(-1 + \sqrt{p} \sigma_1) \sum_{\alpha=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i \alpha t}{p}} \\ \alpha \text{ Quadratrest von } p \\ -(p-1)(-1 - \sqrt{p} \sigma_1) \sum_{\alpha=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i \alpha t}{p}} \\ \alpha \text{ Nichtrest von } p$$

2, 1. Ist $-t$ nicht durch p teilbar (also $\lambda = 1$), so ist nach dem vorigen Hilfssatz

$$S = -\frac{1}{2}(p-1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_2) \\ -\frac{1}{2}(p-1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_2).$$

Dieser Fall geht genau wie 1, 2; aber jetzt mit $-t$ statt K_2 .

2, 2. Ist $-t$ durch p teilbar (also $\lambda = 2$), so ist

$$S = -\frac{1}{2}(p-1)^2(-1 + \sqrt{p}\sigma_1) - \frac{1}{2}(p-1)^2(-1 - \sqrt{p}\sigma_1) = (p-1)^2,$$

also $H'_3(p, t) = H_3(p, t)$.

3. Die zwei Zahlen K_1 und K_2 seien durch p teilbar. Dann ist K nicht durch p teilbar (also $q = 0$) und

$$S = -(p-1)^2 \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} = -(p-1)^2 \text{ oder } (p-1)^2,$$

je nachdem $-t$ durch p teilbar ist oder nicht, d. h. je nachdem $\lambda = 3$ oder 2 ist. Auch jetzt ist $H'_3(p, t) = H_3(p, t)$.

Hilfssatz 9. Haben K_1, K_2, K_3, K_4 den größten gemeinsamen Teiler 1 und ist $t \neq 0$, so ist für jede ungerade Primzahl p die durch (67) festgelegte Funktion $H'_4(p, t)$ gleich der in § 1 definierten Funktion $H_4(p, t)$.

Beweis. Der Ausdruck $(p-1)^4 H'_4(p, t)$, den ich S nenne, hat den Wert

$$S = \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} \prod_{q=1}^4 \sum_{h_q=1}^{p-1} e^{\frac{2\pi i a K_q h_q^2}{p}}$$

Ich bezeichne mit λ die Anzahl der durch p teilbaren Zahlen, die im System K_1, K_2, K_3, K_4 und $-t$ vorkommen, mit μ die Anzahl der in diesem System auftretenden Quadratreste von p , und ich setze

$$\varepsilon = 1 \quad \text{und} \quad \nu = 1, \quad \text{falls} \quad p \equiv 1 \pmod{4} \text{ ist,} \\ \varepsilon = i \quad ,, \quad \nu = -1, \quad ,, \quad p \equiv -1 \pmod{4} \text{ ist.}$$

Ist K_q ($q = 1, 2, 3$ oder 4) nicht durch p teilbar, so bezeichne ich $\sigma_p(K_q)$ mit σ_q ; ist $-t$ nicht durch p teilbar, so bezeichne ich $\sigma_p(-t)$ mit σ_t .

Ich unterscheide verschiedene Fälle.

1. Keine der Zahlen K_1, K_2, K_3 und K_4 sei durch p teilbar. Nach Hilfssatz 7 ist dann

$$S = (-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_2)(-1 + \sqrt{p}\sigma_3)(-1 + \sqrt{p}\sigma_4) \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} \\ \text{a Quadratrest von } p \\ + (-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_2)(-1 - \sqrt{p}\sigma_3)(-1 - \sqrt{p}\sigma_4) \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} \\ \text{a Nichtrest von } p$$

1, 1. Ist $-t$ nicht durch p teilbar (also $\lambda = 0$), so ist nach Hilfssatz 7

$$S = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_2)(-1 + \sqrt{p}\sigma_3)(-1 + \sqrt{p}\sigma_4)(-1 + \sqrt{p}\sigma_5) \\ + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{p}\sigma_1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_2)(-1 - \sqrt{p}\sigma_3)(-1 - \sqrt{p}\sigma_4)(-1 - \sqrt{p}\sigma_5).$$

Ist $\mu = 0$ oder 5, so ist

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \pm \varepsilon,$$

also

$$S = \frac{1}{2}(-1 + \varepsilon\sqrt{p})^5 + \frac{1}{2}(-1 - \varepsilon\sqrt{p})^5 = -1 - 10\varepsilon^3 p - 5\varepsilon^5 p^2 \\ = -1 - 10vp - 5p^2.$$

Ist $\mu = 1$ oder 4, so haben vier der Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ und σ_5 denselben Wert $\pm \varepsilon$, während die andere dieser fünf Zahlen den entgegengesetzten Wert $\mp \varepsilon$ besitzt, also

$$S = \frac{1}{2}(-1 + \varepsilon\sqrt{p})^4(-1 - \varepsilon\sqrt{p}) + \frac{1}{2}(-1 - \varepsilon\sqrt{p})^4(-1 + \varepsilon\sqrt{p}) \\ = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2 p)((-1 + \varepsilon\sqrt{p})^3 + (-1 - \varepsilon\sqrt{p})^3) = (1 - vp)(-1 - 3vp).$$

Ist schließlich $\mu = 2$ oder 3, so ist

$$S = \frac{1}{2}(-1 + \varepsilon\sqrt{p})^3(-1 - \varepsilon\sqrt{p})^2 + \frac{1}{2}(-1 - \varepsilon\sqrt{p})^3(-1 + \varepsilon\sqrt{p})^2 \\ = -(1 - \varepsilon^2 p)^2 = -1 + 2vp - p^2.$$

In diesen drei Fällen ist also

$$(69) \quad H_4(p, t) = H_4(p, t).$$

1, 2. Ist $-t$ durch p teilbar (also $\lambda = 1$), so ist

$$(p-1)^{-1}S = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_2)(-1 + \sqrt{p}\sigma_3)(-1 + \sqrt{p}\sigma_4) \\ + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{p}\sigma_1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_2)(-1 - \sqrt{p}\sigma_3)(-1 - \sqrt{p}\sigma_4).$$

Ist $\mu = 0$ oder 4, so ist $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \pm \varepsilon$, also

$$(p-1)^{-1}S = \frac{1}{2}(-1 + \varepsilon\sqrt{p})^4 + \frac{1}{2}(-1 - \varepsilon\sqrt{p})^4 = 1 + 6vp + p^2.$$

Ist $\mu = 1$ oder 3, so hat man

$$(p-1)^{-1}S = \frac{1}{2}(-1 + \varepsilon\sqrt{p})^3(-1 - \varepsilon\sqrt{p}) + \frac{1}{2}(-1 - \varepsilon\sqrt{p})^3(-1 + \varepsilon\sqrt{p}) \\ = (-1 + \varepsilon\sqrt{p})(-1 - \varepsilon\sqrt{p})(1 + \varepsilon^2 p) = 1 - \varepsilon^4 p^2 = 1 - p^2.$$

Ist schließlich $\mu = 2$, so ist

$$(p-1)^{-1}S = (-1 + \varepsilon\sqrt{p})^2(-1 - \varepsilon\sqrt{p})^2 = (1 - \varepsilon^2 p)^2 = 1 - 2vp + p^2.$$

Auch in diesen Fällen gilt (69).

2. Eine und nur eine der Zahlen K_1, K_2, K_3 und K_4 sei durch p teilbar. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei K_4 durch p teilbar. Dann ist

$$(p-1)^{-1}S = (-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_2)(-1 + \sqrt{p}\sigma_3) \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} \\ \text{a Quadratrest von } p \\ + (-1 - \sqrt{p}\sigma_1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_2)(-1 - \sqrt{p}\sigma_3) \sum_{a=1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i a t}{p}} \\ \text{a Nichtrest von } p$$

2, 1. Ist $-t$ nicht durch p teilbar (also $\lambda = 1$), so ist

$$(p-1)^{-1}S = (-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_2)(-1 + \sqrt{p}\sigma_3)(-1 + \sqrt{p}\sigma_4) \\ + (-1 - \sqrt{p}\sigma_1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_2)(-1 - \sqrt{p}\sigma_3)(-1 - \sqrt{p}\sigma_4),$$

und dieser Fall geht genau wie 1, 2.

2, 2. Ist $-t$ durch p teilbar (also $\lambda = 2$), so ist

$$(p-1)^{-2}S = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_2)(-1 + \sqrt{p}\sigma_3) \\ + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{p}\sigma_1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_2)(-1 - \sqrt{p}\sigma_3).$$

Ist $\mu = 0$ oder 3, so ist

$$(p-1)^{-2}S = \frac{1}{2}(-1 + \varepsilon\sqrt{p})^2 + \frac{1}{2}(-1 - \varepsilon\sqrt{p})^2 = -1 - 3vp,$$

und ist $\mu = 1$ oder 2, so ist

$$(p-1)^{-2}S = \frac{1}{2}(-1 + \varepsilon\sqrt{p})^2(-1 - \varepsilon\sqrt{p}) + \frac{1}{2}(-1 - \varepsilon\sqrt{p})^2(-1 + \varepsilon\sqrt{p}) \\ = -(1 - \varepsilon^2 p) = -1 + vp,$$

so daß (69) auch hier gilt.

3. Genau zwei der Zahlen K_1, K_2, K_3 und K_4 seien durch p teilbar. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich K_3 und K_4 durch p teilbar voraussetzen.

3, 1. Ist $-t$ nicht durch p teilbar (also $\lambda = 2$), so ist

$$(p-1)^{-2}S = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_2)(-1 + \sqrt{p}\sigma_3) \\ + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{p}\sigma_1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_2)(-1 - \sqrt{p}\sigma_3),$$

und dieser Fall geht wie 2, 2.

3, 2. Ist $-t$ durch p teilbar (also $\lambda = 3$), so ist

$$(p-1)^{-3}S = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_2) + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{p}\sigma_1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_2) \\ = \frac{1}{2}(-1 + \varepsilon\sqrt{p})^2 + \frac{1}{2}(-1 - \varepsilon\sqrt{p})^2 = 1 + vp \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ oder } 2, \\ = (-1 + \varepsilon\sqrt{p})(-1 - \varepsilon\sqrt{p}) = 1 - vp \quad \text{falls } \mu = 1,$$

so daß (69) gilt.

4. Genau drei der Zahlen K_1, K_2, K_3, K_4 seien durch p teilbar; ich nehme an, daß K_1 nicht durch p teilbar ist.

4. 1. Ist $-t$ nicht durch p teilbar (also $\lambda = 3$), so ist

$$(p-1)^{-3} S = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p}\sigma_1)(-1 + \sqrt{p}\sigma_2) + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{p}\sigma_1)(-1 - \sqrt{p}\sigma_2),$$

und dieser Fall geht wie 3, 2.

4, 2. Ist $-t$ durch p teilbar (also $\lambda = 4$), so ist

$$(p-1)^{-4} S = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{p}\sigma_1) + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{p}\sigma_1) = -1,$$

so daß (69) gilt.

Hiermit ist Hilfssatz 9 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 10. Ist $\tau \geq 2$, ist p eine ungerade Primzahl und ist die ganze Zahl K nicht durch $p^{\tau-1}$ teilbar, so ist für jedes nicht durch p teilbare ganze a

$$\sum_{\substack{h=1 \\ (h,p)=1}}^{p^\tau} e^{\frac{2\pi i a K h^2}{p^\tau}} = 0.$$

Beweis. Ist K durch p^μ und nicht durch $p^{\mu+1}$ teilbar und wird $K = L p^\mu$ gesetzt, so ist $\mu \leq \tau - 2$ und L nicht durch p teilbar, so daß die betrachtete Summe nach Hilfssatz 7 den Wert

$$\begin{aligned} p^\mu \sum_{\substack{h=1 \\ (h,p)=1}}^{p^{\tau-\mu}} e^{\frac{2\pi i a L h^2}{p^{\tau-\mu}}} &= p^\mu \sum_{h=1}^{p^{\tau-\mu}} e^{\frac{2\pi i a L h^2}{p^{\tau-\mu}}} - p^{\mu+1} \sum_{h=1}^{p^{\tau-\mu-2}} e^{\frac{2\pi i a L h^2}{p^{\tau-\mu-2}}} \\ &= p^\mu \cdot p^{\frac{1}{2}(\tau-\mu)} \sigma_{p^{\tau-\mu}}(aL) - p^{\mu+1} \cdot p^{\frac{1}{2}(\tau-\mu-2)} \sigma_{p^{\tau-\mu}}(aL) = 0 \end{aligned}$$

hat.

Hilfssatz 11. Sind K, K_1 und K_2 drei ganze Zahlen $\neq 0$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1 und ist die natürliche Zahl q durch ein ungerades Quadrat > 1 teilbar, so verschwindet $H'_3(q, t)$ für jedes ganze t .

Beweis. Es bezeichne p eine ungerade Primzahl, τ eine ganze Zahl ≥ 2 . Das Produkt $\varphi^3(p^\tau) H'_3(p^\tau, t)$, das den Wert

$$\sum_{a=1}^{p^\tau} e^{\frac{-2\pi i a t}{p^\tau}} \sum_{\substack{h=1 \\ a, h, h_1 \text{ und } h_2 \text{ nicht durch } p \text{ teilbar}}}^{p^\tau} e^{\frac{2\pi i a K h}{p^\tau}} \sum_{h_1=1}^{p^\tau} e^{\frac{2\pi i a K_1 h_1^2}{p^\tau}} \sum_{h_2=1}^{p^\tau} e^{\frac{2\pi i a K_2 h_2^2}{p^\tau}}$$

besitzt, ist nach den Hilfssätzen 5 und 10 gleich Null, da wenigstens eine der Zahlen K, K_1 und K_2 nicht durch p teilbar ist. Nach Hilfssatz 4 verschwindet also $H'_3(q, t)$ für jedes durch p^τ teilbare q .

Hilfssatz 12. Sind K_1, K_2, K_3 und K_4 ganze Zahlen $\neq 0$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1, ist die natürliche Zahl q durch ein ungerades Quadrat > 1 teilbar, so verschwindet $H'_4(q, t)$ für jedes ganze t .

Beweis. Es bezeichne p eine ungerade Primzahl, τ eine ganze Zahl ≥ 2 . Das Produkt $\varphi^4(p^\tau) H'_4(p^\tau, t)$, das den Wert

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\tau} e^{-\frac{2\pi i a t}{p^\tau}} \prod_{q=1}^4 \sum_{\substack{h_q=1 \\ (h_q,p)=1}}^{p^\tau} e^{\frac{2\pi i a K_q h_q^2}{p^\tau}}$$

hat, ist nach Hilfssatz 10 gleich Null, da wenigstens eine der Zahlen K_1, K_2, K_3 und K_4 nicht durch p teilbar ist. Nach Hilfssatz 4 verschwindet also $H'_4(q, t)$ für jedes durch p^τ teilbare q .

Hilfssatz 13. Es seien K, K_1 und K_2 drei ganze Zahlen $\neq 0$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1; es bezeichne κ die größte ganze Zahl ≤ 3 mit der Eigenschaft, daß K durch $2^{\kappa-1}$ teilbar ist. Dann ist für jedes ganze $t \neq 0$

$$1 + H'_3(2, t) + H'_3(4, t) + H'_3(8, t) = 2^\kappa \text{ oder } 0,$$

je nachdem $t \equiv K + K_1 + K_2 \pmod{2^\kappa}$ ist oder nicht.

Beweis. Wird $K + K_1 + K_2 - t = L$ gesetzt, so hat man

$$H'_3(2, t) = e^{\pi i L} = (-1)^L$$

und

$$H'_3(4, t) = 2^{-3} \sum_{a, h, h_1, h_2=1 \text{ und } 3} e^{\frac{1}{2} \pi i a (K h + K_1 h_1^2 + K_2 h_2^2 - t)}$$

Ist K ungerade, so ist $\sum_h e^{\frac{1}{2} \pi i a K h} = 0$, also $H'_3(4, t) = 0$; ist dagegen K gerade, so ist

$$H'_3(4, t) = \sum_{a=1 \text{ und } 3} e^{\frac{1}{2} \pi i a L} = (-1)^{\frac{1}{2} L} \cdot 2 \text{ oder } 0,$$

je nachdem L gerade oder ungerade ist. Schließlich hat man noch

$$\begin{aligned} H'_3(8, t) &= 4^{-3} \sum_{a, h, h_1, h_2=1, 3, 5 \text{ und } 7} e^{\frac{1}{2} \pi i a (K h + K_1 h_1^2 + K_2 h_2^2 - t)} \\ &= 4^{-1} \sum_{a, h=1, 3, 5 \text{ und } 7} e^{\frac{1}{2} \pi i a (K h + K_1 + K_2 - t)}. \end{aligned}$$

Ist K nicht durch 4 teilbar, so ist $H'_3(8, t) = 0$. Ist dagegen K durch 4 teilbar, so ist

$$H'_3(8, t) = \sum_{a=1, 3, 5 \text{ und } 7} e^{\frac{1}{2} \pi i a L} = (-1)^{\frac{1}{2} L} \cdot 4 \text{ oder } 0,$$

je nachdem L durch 4 teilbar ist oder nicht.

Die Summe $1 + H'_3(2, t) + H'_3(4, t) + H'_3(8, t)$ hat somit den Wert

$$1 - 1 + 0 + 0 = 0 \quad \text{falls} \quad L \equiv 1 \pmod{2},$$

$$1 + 1 + 0 + 0 = 2^1 \quad \text{,,} \quad L \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{und} \quad K \equiv 1 \pmod{2},$$

$$1 + 1 - 2 + 0 = 0 \quad \text{,,} \quad L \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{,,} \quad K \equiv 0 \pmod{2},$$

$$\begin{aligned}
1 + 1 + 0 + 0 &= 2^1 & \text{falls } L \equiv 4 \pmod{8} & \text{ und } K \equiv 1 \pmod{2}, \\
1 + 1 + 2 + 0 &= 2^2 & ,, \quad L \equiv 4 \pmod{8} & ,, \quad K \equiv 2 \pmod{4}, \\
1 + 1 + 2 - 4 &= 0 & ,, \quad L \equiv 4 \pmod{8} & ,, \quad K \equiv 0 \pmod{4}, \\
1 + 1 + 0 + 0 &= 2^1 & ,, \quad L \equiv 0 \pmod{8} & ,, \quad K \equiv 1 \pmod{2}, \\
1 + 1 + 2 + 0 &= 2^2 & ,, \quad L \equiv 0 \pmod{8} & ,, \quad K \equiv 2 \pmod{4}, \\
1 + 1 + 2 + 4 &= 2^3 & ,, \quad L \equiv 0 \pmod{8} & ,, \quad K \equiv 0 \pmod{4}.
\end{aligned}$$

Hilfssatz 14. Bezeichnen K_1, K_2, K_3 und K_4 vier ganze Zahlen $\neq 0$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1, so ist für jedes ganze $t \neq 0$

$$1 + H'_4(2, t) + H'_4(4, t) + H'_4(8, t) = 8 \text{ oder } 0,$$

je nachdem $K_1 + K_2 + K_3 + K_4 - t$ durch 8 teilbar ist oder nicht.

Beweis. Wird $K_1 + K_2 + K_3 + K_4 - t = L$ gesetzt, so ist

$$H'_4(2, t) = e^{\pi i L} = (-1)^L,$$

$$\begin{aligned}
H'_4(4, t) &= 2^{-4} \sum_{a, h_1, h_2, h_3, h_4 = 1 \text{ und } 3} e^{\frac{1}{2} \pi i a (K_1 h_1^2 + \dots + K_4 h_4^2 - t)} \\
&= \sum_{a = 1 \text{ und } 3} e^{\frac{1}{2} \pi i a L} = (-1)^{\frac{1}{2} L} \cdot 2 \text{ oder } 0,
\end{aligned}$$

je nachdem L gerade oder ungerade ist,

$$\begin{aligned}
H'_4(8, t) &= 4^{-4} \sum_{a, h_1, h_2, h_3, h_4 = 1, 3, 5 \text{ und } 7} e^{\frac{1}{4} \pi i a (K_1 h_1^2 + \dots + K_4 h_4^2 - t)} \\
&= \sum_{a = 1, 3, 5 \text{ und } 7} e^{\frac{1}{4} \pi i a L} = (-1)^{\frac{1}{4} L} \cdot 4 \text{ oder } 0,
\end{aligned}$$

je nachdem L durch 4 teilbar ist oder nicht. Folglich hat die Summe $1 + H'_4(2, t) + H'_4(4, t) + H'_4(8, t)$ den Wert

$$\begin{aligned}
1 - 1 + 0 + 0 &= 0 & \text{falls } L \equiv 1 \pmod{2}, \\
1 + 1 - 2 + 0 &= 0 & ,, \quad L \equiv 2 \pmod{4}, \\
1 + 1 + 2 - 4 &= 0 & ,, \quad L \equiv 4 \pmod{8}, \\
1 + 1 + 2 + 4 &= 8 & ,, \quad L \equiv 0 \pmod{8}.
\end{aligned}$$

Hilfssatz 15. Es sei q eine natürliche durch 16 teilbare Zahl; t sei ganz.

Bezeichnen K, K_1, K_2 drei ganze Zahlen $\neq 0$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1, so verschwindet $H'_3(q, t)$.

Bezeichnen K_1, K_2, K_3, K_4 vier ganze Zahlen $\neq 0$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1, so verschwindet $H'_4(q, t)$.

Beweis. Es sei a ungerade; τ sei ganz ≥ 4 .

Ist K ungerade, so ist

$$\sum_{\substack{h=1 \\ h \text{ ungerade}}}^{\tau} e^{2 \pi i a K h^2 - \tau} = 0.$$

Ist K_1 ungerade, so ist

$$\sum_{\substack{h_1=1 \\ h_1 \text{ ungerade}}}^{2^r} e^{2\pi i s K_1 h_1^2} 2^{-r} = \sum_{\substack{h=1 \\ h \text{ ungerade}}}^{2^r-2} \sum_{k=0}^2 e^{2\pi i s K_1 (h+2^{r-2}k)^2} 2^{-r} \\ = \sum_{\substack{h=1 \\ h \text{ ungerade}}}^{2^r-2} 0 = 0.$$

Haben K , K_1 und K_2 den größten gemeinsamen Teiler 1, so ist wenigstens eine dieser drei Zahlen ungerade, und dann folgt aus den obigen Beziehungen, daß $H'_3(2^r, t)$ verschwindet. Haben K_1, \dots, K_4 einen größten gemeinsamen Teiler 1, so ist wenigstens eine dieser vier Zahlen ungerade, so daß dann $H'_4(2^r, t) = 0$ ist. Hieraus folgt mit Rücksicht auf Hilfssatz 4 die zu beweisende Behauptung.

Beweis von Satz 2. Ich brauche nur für jedes ganze $t \neq 0$ zu zeigen:

$$\sum_{q=1}^{\infty} H'_3(q, t) = \Omega_3(t).$$

Aus den Hilfssätzen 4, 11 und 15 folgt, daß die linke Seite den Wert

$$(70) \quad (1 + H'_3(2, t) + H'_3(4, t) + H'_3(8, t)) \prod_{p>3} (1 + H'_3(p, t))$$

hat. Es sei κ die größte ganze Zahl ≤ 3 mit der Eigenschaft, daß K durch $2^{\kappa-1}$ teilbar ist. Ist $t \not\equiv K + K_1 + K_2 \pmod{2^r}$, so ist nach Hilfssatz 13 der Ausdruck (70) gleich Null, also gleich $\Omega_3(t)$. Es sei weiter $t \equiv K + K_1 + K_2 \pmod{2^r}$ vorausgesetzt. Mit Rücksicht auf die Hilfssätze 13 und 8 geht (70) dann über in

$$(71) \quad 2^{\kappa} \prod_{p>3} (1 + H'_3(p, t)).$$

Geht der ungerade Primfaktor p von t in mindestens zwei der Zahlen K , K_1 und K_2 auf, so besitzen die zwei in (4) vorkommenden Zahlen λ und ϱ die Werte $\varrho = 0$, $\lambda = 3$ oder $\varrho = 1$, $\lambda = 2$, so daß $H'_3(p, t) = -1$ ist und der Ausdruck (71) den Wert Null, also den Wert $\Omega_3(t)$ hat. Enthält schließlich t keinen ungeraden Teiler > 1 , der in zwei der Zahlen K , K_1 , K_2 aufgeht, so ist $\Omega_3(t)$ durch (3) definiert, womit alles bewiesen ist.

Beweis von Satz 3. Ich brauche nur für jedes ganze $t \neq 0$ zu zeigen:

$$\sum_{q=1}^{\infty} H'_4(q, t) = \Omega_4(t).$$

Aus den Hilfssätzen 4, 12 und 15 folgt, daß die linke Seite den Wert

$$(72) \quad (1 + H'_4(2, t) + H'_4(4, t) + H'_4(8, t)) \prod_{p>3} (1 + H'_4(p, t))$$

hat. Ist $K_1 + \dots + K_4 - t$ nicht durch 8 teilbar, so ist dieser Ausdruck nach Hilfssatz 14 gleich Null, also gleich $\Omega_4(t)$. Sonst geht der Ausdruck nach den Hilfssätzen 14 und 9 über in

$$(73) \quad 8 \prod_{p>2} (1 + H_4(p, t)).$$

Geht der ungerade Primfaktor von t in drei der Zahlen K_1, K_2, K_3, K_4 auf, so ist die in der Definition von $H_4(p, t)$ vorkommende Zahl λ gleich 4, also $H_4(p, t) = -1$, so daß der Ausdruck (73) dann den Wert Null, also den Wert $\Omega_4(t)$ hat. In den übrigen Fällen wird $\Omega_4(t)$ durch (5) definiert, womit Satz 3 bewiesen ist.

§ 4.

Beweis von Satz 10.

In diesem Paragraphen werde ich Satz 10 herleiten. Zunächst zeige ich, daß ich nur den Spezialfall mit $U = K'L$ und $U' = KL$, wo L eine ganze Zahl $\neq 0$ bezeichnet, zu beweisen brauche. Es sei also dieser Spezialfall schon bewiesen und der allgemeine Fall zu beweisen.

Es werde $L = \frac{A}{KK'}$ gesetzt; w sei irgendeine zu $K'L$ teilerfremde, w' irgendeine zu KL teilerfremde ganze Zahl; $F(t, w, w')$ bezeichne die Anzahl der Darstellungen $t = Kp + K'p'$, wo die Primzahlen p und p' den Ungleichungen (22) und den Kongruenzen

$$p \equiv w \pmod{K'L}; \quad p' \equiv w' \pmod{KL}$$

genügen; $q(w, w')$ sei 1 oder 0, je nachdem es zwei Zahlen v und v' gibt mit

$$t \equiv Kv + K'v' \pmod{A}; \quad v \equiv w \pmod{K'L}; \quad v' \equiv w' \pmod{KL}$$

oder nicht.

Falls $t = 0$ und auch falls $KK'Lt$ ungerade ist, werde $\Omega(t, w, w') = 0$ gesetzt und sonst

$$(74) \quad \Omega(t, w, w') = \frac{2 \varphi(w, w')}{\varphi(|L|)} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p|KK'Lt \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}.$$

Der Spezialfall von Satz 10, mit $K'L$ und KL statt U und U' angewandt, liefert nun unter den Voraussetzungen von Satz 10

$$(75) \quad \sum_{|x| \leq Z} |F(\psi(x) + s, w, w') - \Omega(\psi(x) + s, w, w') \Phi_2(\psi(x) + s)| < c_{63} Z^{\sigma+1} Z^{-m}$$

mit $c_{63} = c_{63}(K, K', U, U', m, \psi)$.

Die in (24) auftretende Zahl ϱ ist gleich der Summe $\sum_{w, w'} \varrho(w, w')$, erstreckt über die Zahlen $w \equiv u \pmod{U}$ eines reduzierten Restsystems von $K'L$ und über die Zahlen $w' \equiv u' \pmod{U'}$ eines reduzierten Restsystems von KL . Hieraus geht hervor

$$(76) \quad \sum_{w, w'} \Omega(t, w, w') = \Omega(t);$$

denn ist $KK'Lt$ ungerade oder ist $t = 0$, so verschwinden beide Seiten, und sonst folgt (76) aus (74) und (24). Außerdem ist

$$(77) \quad F(t) = \sum_{w, w'} F(t, w, w')$$

gleich der Anzahl der Darstellungen $t = Kp + K'p'$, wobei die Primzahlen p und p' den Beziehungen (22) und (23) genügen, p ein Teiler von $K'L$ oder (und) p' ein Teiler von KL ist. Der Ausdruck (77) ist somit kleiner als $|K'L| + |KL|$. Durch Summation von (75) über w und w' findet man mit Rücksicht hierauf und auf (76) die Behauptung von Satz 10.

Hiermit ist gezeigt, daß ich weiter $U = K'L$ und $U' = KL$ setzen darf; hierin ist L irgendeine ganze Zahl $\neq 0$; außerdem ist $A = KK'L$.

Jetzt kann ich wiederum dieselbe Beweismethode wie in meiner 2., 3., 4. Arbeit anwenden. Dabei setze ich $r(v) = 1$ für jedes $v = Kp$, wo p eine Primzahl mit $A < p \leq B$ und $p \equiv u \pmod{U}$ bezeichnet; für die übrigen ganzen v wird $r(v) = 0$ gesetzt. Zunächst brauche ich für die Summe

$$\sum_{\substack{v \leq x \\ v \equiv k \pmod{q}}} r(v),$$

wo q und k natürliche Zahlen mit $k \leq q$ bezeichnen, einen Approximativwert. Diese Summe ist gleich der Anzahl der Primzahlen p mit

$$(78) \quad A < p \leq B, \quad Kp \leq x, \quad p \equiv u \pmod{K'L}, \quad Kp \equiv k \pmod{q}.$$

Für die Abschätzung dieser Anzahl benutze ich den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 16. Sind K, K', L, u, q, k ganze Zahlen $\neq 0$ mit $(K, K') = 1$ und $0 < k \leq q$, ist $2 \leq A < B$ und x reell, so hat die Anzahl der Primzahlen p mit (78) den Approximativwert

$$\chi(q, k) \sum_{\substack{A < v \leq B \\ K'v \leq x}} \frac{1}{\log v},$$

und zwar so, daß für jedes reelle m der Fehler absolut kleiner als $c_{64} M B (\log B)^{-m}$ ist mit $c_{64} = c_{64}(K, K', L, m)$. Hierbei ist

$$(79) \quad (q, K) = A, \quad \left(\frac{q}{A}, K'L\right) = d, \quad M = \frac{|qK'L|}{dA}$$

gesetzt, und $\varphi(M) \chi(q, k)$ ist gleich der Anzahl der natürlichen Zahlen $h \leq M$, die teilerfremd zu M sind und den Kongruenzen

$$(80) \quad h \equiv u \pmod{K'L}, \quad Kh \equiv k \pmod{q}$$

genügen.

Beweis. Die Anzahl der Primzahlen p mit (78), die in M aufgehen, ist höchstens M . Ich brauche also nur die Primzahlen mit (78) zu betrachten, die nicht in M aufgehen. Die Anzahl dieser Primzahlen ist ΣT_h , erstreckt über die zu M teilerfremden natürlichen Zahlen $h \leq M$; dabei ist T_h die Anzahl der Primzahlen p mit (78) und $p \equiv h \pmod{M}$. Für jedes h mit $T_h > 0$ ist $h \equiv u \pmod{K'L}$, denn dann gibt es wenigstens eine Primzahl p mit

$$h \equiv p \equiv u \pmod{K'L}.$$

Für jedes h mit $T_h > 0$ ist außerdem $Kh \equiv k \pmod{q}$; denn dann gibt es wenigstens eine Primzahl p mit

$$Kh \equiv Kp \equiv k \pmod{q}.$$

Ich kann also die Summe ΣT_h erstrecken über die natürlichen Zahlen h mit

$$(81) \quad h \leq M; \quad (h, M) = 1; \quad h \equiv u \pmod{K'L}; \quad Kh \equiv k \pmod{q}.$$

Für jede natürliche Zahl h mit (81) ist T_h die Anzahl der Primzahlen p mit

$$(82) \quad A < p \leq B, \quad Kp \leq x, \quad p \equiv h \pmod{M};$$

denn aus (81) und (82) folgt

$$p \equiv h \equiv u \pmod{K'L} \quad \text{und} \quad Kp \equiv Kh \equiv k \pmod{q}.$$

Für jede natürliche Zahl h mit (81) ist also nach dem Siegel-Walfiszschen Satze

$$|T_h - \varphi^{-1}(M) \sum_{\substack{A < p \leq B \\ Kp \leq x}} (\log p)^{-1}| < c_{66} B (\log B)^{-m}$$

mit $c_{65} = c_{65}(m)$. Hieraus folgt die Behauptung, da die Anzahl der in Betracht kommenden Zahlen h höchstens M ist.

Aus diesem Hilfssatz geht hervor, daß die Beweismethode meiner 2., 3., 4. Arbeit angewendet werden kann, wobei $\chi(q, k)$ die obige Funktion bezeichnet. Analog wird

$$(83) \quad (q, K') = d', \quad \left(\frac{q}{d'}, KL\right) = d', \quad M' = \frac{|qKL|}{d' d'}$$

gesetzt, und es ist $\varphi(M') \chi'(q, k)$ gleich der Anzahl der natürlichen Zahlen $h \leq M'$, die teilerfremd zu M' sind und den Kongruenzen

$$(84) \quad h \equiv u' \pmod{KL}, \quad K'h \equiv k' \pmod{q}$$

genügen. Weiter wird für jeden irreduziblen Bruch $\frac{a}{q}$

$$(85) \quad E\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{k=1}^q \chi(q, k) e^{\frac{2\pi i a k}{q}} \quad \text{und} \quad E'\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{k=1}^q \chi'(q, k) e^{\frac{2\pi i a k}{q}}$$

und außerdem für jedes ganze $t \neq 0$

$$(86) \quad H(q, t) = \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} E\left(\frac{a}{q}\right) E'\left(\frac{a}{q}\right) e^{-\frac{2\pi i a t}{q}}$$

gesetzt; $H(q, 0)$ sei Null. Die in meiner 2., 3., 4. Arbeit entwickelte Methode liefert

$$\sum_{|x| \leq z} |F(\psi(x) + s) - \Phi_2(\psi(x) + s)| \sum_{q=1}^{\infty} |H(q, \psi(x) + s)| < c_{66} Z^{q+1} z^{-m},$$

mit $c_{66} = c_{66}(K, K', L, m, \psi)$, so daß ich nur noch die Beziehung

$$(87) \quad \sum_{q=1}^{\infty} H(q, t) = \Omega(t)$$

abzuleiten brauche. Weiterhin setze ich

$$e(\beta) = e^{2\pi i \beta} \quad \text{und} \quad Z(q, m) = \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} e\left(\frac{a m}{q}\right),$$

wo q eine natürliche, m eine ganze Zahl bezeichnet.

Hilfssatz 17. 1. Sind die natürlichen Zahlen q_1 und q_2 zueinander teilerfremd, so ist

$$Z(q, m) = Z(q_1, m) Z(q_2, m).$$

2. Ist die natürliche Zahl q teilerfremd zu der ganzen Zahl m , so ist

$$Z(q, m) = \mu(q).$$

Dieser Hilfssatz ist bekannt^{b)}.

Hilfssatz 18. Für jede natürliche Zahl q und jedes ganze m ist

$$\sum_{d/q} Z(d, m) = q \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem m durch q teilbar ist oder nicht.

^{b)} Vergl. zum Beispiel J. G. van der Corput, Sur l'hypothèse de Goldbach pour presque tous les nombres pairs, Acta Arithmetica (1938).

Beweis. Man hat

$$\begin{aligned} \sum_{b=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i b m}{q}} &= \sum_{D|q} \sum_{\substack{b=0 \\ (b, q)=D}}^{q-1} e^{\frac{2\pi i b m}{q}} = \sum_{D|q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, \frac{q}{D})=1}}^{\frac{q}{D}-1} e^{\frac{2\pi i a D m}{q}} \\ &= \sum_{d|q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, d)=1}}^{d-1} e^{\frac{2\pi i a m}{d}} = \sum_{d|q} Z(d, m), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Hilfssatz 19. Ist δ ein positiver Teiler der natürlichen Zahl q und ist q teilerfremd zu der ganzen Zahl a , so ist

$$\sum_{\substack{h=1 \\ (h, \delta)=1}}^q e\left(\frac{a h}{q}\right) = \mu(q) \quad \text{falls } \delta = q, \\ = 0 \quad \text{falls } \delta < q.$$

Beweis. Ich unterscheide verschiedene Fälle.

1. Jeder Primfaktor von q gehe in δ auf. Die linke Seite der zu beweisenden Beziehung ist dann gleich $Z(q, a) = \mu(q)$ nach der zweiten Behauptung von Hilfssatz 17. Ist $\delta < q$, so geht jeder Primfaktor von $\frac{q}{\delta}$ in q , also in δ auf, so daß dann $q = \frac{q}{\delta} \cdot \delta$ nicht quadratfrei, also $\mu(q) = 0$ ist.

2. Wenigstens eine Primzahl von q geht nicht in δ auf. Wird $q = q_1 q_2$ gesetzt, wo q_2 den größten zu δ teilerfremden Teiler von q bezeichnet, so ist $q_2 > 1$ und die linke Seite der zu beweisenden Beziehung hat den Wert

$$\sum_{\substack{h=1 \\ (h, q_1)=1}}^q e\left(\frac{a h}{q}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k, q_1)=1}}^{q_1} \sum_{l=0}^{q_2-1} e\left(\frac{a(k+l q_1)}{q}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k, q_1)=1}}^{q_1} 0 = 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist, da in diesem Falle $\delta < q$ ist.

Hilfssatz 20. Ist Q eine natürliche Zahl und sind y, U, u ganze Zahlen $\neq 0$ mit

$$(Q, y) = 1, \quad (U, u) = 1 \quad \text{und} \quad (Q, U) = d,$$

so hat die Summe $\sum e\left(\frac{y k}{Q}\right)$, erstreckt über die natürlichen Zahlen k mit

$$k \leq \frac{|Q U|}{d}, \quad \left(k, \frac{Q}{d}\right) = 1 \quad \text{und} \quad k \equiv u \pmod{U},$$

den Wert $\mu\left(\frac{Q}{d}\right) e\left(\frac{y v}{Q}\right)$ oder 0, je nachdem $\frac{Q}{d}$ teilerfremd zu d ist oder nicht; v ist irgendeine Zahl, die den Kongruenzen

$$(88) \quad v \equiv 0 \pmod{\frac{Q}{d}} \quad \text{und} \quad v \equiv u \pmod{d}$$

genügt. (Sind $\frac{Q}{d}$ und d teilerfremd, so gibt es wirklich Zahlen v , die diese Kongruenzen zu gleicher Zeit erfüllen.)

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $U > 0$ annehmen. Wird $\Theta_k = 1$ oder 0 gesetzt, je nachdem $k \equiv u \pmod{U}$ ist oder nicht, so hat die betrachtete Summe den Wert $\sum_k \Theta_k e\left(\frac{yk}{Q}\right)$, erstreckt über die natürlichen Zahlen k mit

$$k \leq \frac{Q}{d}, \quad \left(k, \frac{Q}{d}\right) = 1 \text{ und } k \equiv u \pmod{d}.$$

Wird nun $k = h + lQ$ mit $1 \leq h \leq Q$ gesetzt, so durchläuft h die natürlichen Zahlen mit

$$(89) \quad h \leq Q, \quad \left(h, \frac{Q}{d}\right) = 1 \text{ und } h \equiv u \pmod{d};$$

l durchläuft die ganzen Zahlen ≥ 0 und $< \frac{U}{d}$. Dabei ist $e\left(\frac{yk}{Q}\right) = e\left(\frac{yh}{Q}\right)$, also

$$\sum_k \Theta_k e\left(\frac{yk}{Q}\right) = \sum_h e\left(\frac{yh}{Q}\right) S_h \text{ mit } S_h = \sum_{l=0}^{\frac{U}{d}-1} \Theta_{h+lQ}.$$

Da $\frac{Q}{d}$ und $\frac{U}{d}$ teilerfremd sind, gibt es bei festem h eine und nur eine ganze Zahl l mit

$$0 \leq l < \frac{U}{d} \text{ und } l \frac{Q}{d} \equiv \frac{u-h}{d} \pmod{\frac{U}{d}},$$

also auch eine und nur eine ganze Zahl l mit

$$0 \leq l < \frac{U}{d} \text{ und } h + lQ \equiv u \pmod{U}.$$

Folglich verschwinden alle Glieder von S_h bis auf eines, das den Wert 1 hat, so daß $S_h = 1$ und

$$\sum_k \Theta_k e\left(\frac{yk}{Q}\right) = \sum_h e\left(\frac{yh}{Q}\right)$$

ist.

Es bezeichne nun δ den größten zu d teilerfremden Teiler von $\frac{Q}{d}$. Jedes h mit (89) ist teilerfremd zu $\frac{Q}{d}$, also zu δ und genügt somit den Beziehungen

$$(90) \quad h \leq Q, \quad (h, \delta) = 1 \text{ und } h \equiv u \pmod{d}.$$

Umgekehrt folgt (89) aus (90); denn gilt (90), so würde ein gemeinsamer Faktor von h und $\frac{Q}{d}$ in $\frac{Q}{d}$ und nicht in δ , also in d , somit wegen $h \equiv u \pmod{d}$ auch in u aufgehen, in Widerspruch zu der Tatsache, daß u teilerfremd zu U ,

also erst recht zu d ist. Hiermit ist bewiesen, daß die Summe $\sum_h e\left(\frac{yh}{Q}\right)$ erstreckt wird über die natürlichen Zahlen h mit (90).

Da δ und d teilerfremd sind, ist die Kongruenz $\delta g \equiv u \pmod{d}$ lösbar. Wird $w = \delta g$ gesetzt, so ist

$$(91) \quad w \equiv 0 \pmod{\delta} \quad \text{und} \quad w \equiv u \pmod{d}.$$

Für jedes h mit (90) kann $h = w + dm$ gesetzt werden, wobei m ganz ist. Die Beziehung $(h, \delta) = 1$ gilt dann und nur dann, falls m teilerfremd zu δ ist. Folglich ist

$$\sum_h e\left(\frac{yh}{Q}\right) = \sum_m e\left(\frac{yw + ydm}{Q}\right),$$

wo \sum erstreckt wird über die zu δ teilerfremden ganzen Zahlen im Intervall $-\frac{w}{d} < m \leq \frac{Q-w}{d}$. Da $e\left(\frac{yw + ydm}{Q}\right)$ eine Funktion von m mit der Periode $\frac{Q}{d}$ ist und $\frac{Q}{d}$ ein Vielfaches von δ bezeichnet, so behält die Summe \sum_m denselben Wert, wenn sie erstreckt wird über die zu δ teilerfremden natürlichen Zahlen $m \leq \frac{Q}{d}$. Man bekommt daher

$$\sum_h e\left(\frac{yh}{Q}\right) = e\left(\frac{yw}{Q}\right) \sum_{\substack{m=1 \\ (m, \delta)=1}}^{\frac{Q}{d}} e\left(\frac{ydm}{Q}\right).$$

Man kann jetzt den vorigen Hilfssatz mit $q = \frac{Q}{d}$ anwenden, denn δ ist ein Teiler von $\frac{Q}{d}$, und y ist teilerfremd zu Q , also erst recht zu $\frac{Q}{d}$. Man findet so

$$(92) \quad \sum_h e\left(\frac{yh}{Q}\right) = \mu\left(\frac{Q}{d}\right) e\left(\frac{yw}{Q}\right) \quad \text{falls} \quad \delta = \frac{Q}{d},$$

$$(93) \quad = 0 \quad \text{falls} \quad \delta < \frac{Q}{d}.$$

Ist $\frac{Q}{d}$ teilerfremd zu d , so ist die Zahl δ , nach ihrer Definition, gleich $\frac{Q}{d}$, so daß dann (92) gilt; aus (91) und (88) folgt, daß $w - v$ durch die zueinander teilerfremden Zahlen $\frac{Q}{d}$ und d , also durch ihr Produkt Q teilbar ist, also $e\left(\frac{yw}{Q}\right) = e\left(\frac{yv}{Q}\right)$.

Ist dagegen $\frac{Q}{d}$ nicht teilerfremd zu d , so ist die zu d teilerfremde Zahl δ nicht gleich $\frac{Q}{d}$, also kleiner als $\frac{Q}{d}$, so daß dann (93) gilt.

Hiermit ist Hilfssatz 20 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 21. Sind K, K', L, u, q und k ganze Zahlen $\neq 0$ mit $q > 0$, $(K, K') = 1$ und $(u, K'L) = 1$ und bezeichnen $\chi(q, k)$, Δ, d und M die in Hilfssatz 16 definierten Zahlen, so hat die in (85) definierte Funktion $E\left(\frac{a}{q}\right)$ für jedes zu q teilerfremde ganze a den Wert

$$\varphi^{-1}(M) \mu\left(\frac{q}{\Delta}\right) e\left(\frac{a K v}{q}\right) \quad \text{falls} \quad \left(\frac{q}{\Delta}, d\right) = 1,$$

$$0 \quad \text{falls} \quad \left(\frac{q}{\Delta}, d\right) > 1;$$

hierin ist v irgendeine ganze Zahl, die den Kongruenzen

$$(94) \quad v \equiv 0 \pmod{\frac{q}{\Delta}}; \quad v \equiv u \pmod{d}$$

genügt.

Beweis. Aus (85) folgt

$$\varphi(M) E\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{a k}{q}\right) \sum_h 1,$$

wo \sum_h erstreckt wird über die natürlichen Zahlen $h \leq M$, die teilerfremd zu M sind und den Kongruenzen $h \equiv u \pmod{K'L}$ und $Kh \equiv k \pmod{q}$ genügen. Man hat also

$$(95) \quad \varphi(M) E\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_h e\left(\frac{a K h}{q}\right),$$

wobei die letzte Summe erstreckt wird über die natürlichen Zahlen $h \leq M$, die teilerfremd zu M und $\equiv u \pmod{K'L}$ sind.

Ich kann nun den vorigen Hilfssatz mit $Q = \frac{q}{\Delta}$, $y = \frac{aK}{\Delta}$, $U = K'L$ anwenden; denn wegen $\left(\frac{K}{\Delta}, \frac{q}{\Delta}\right) = 1$ und $(a, q) = 1$ ist $(y, Q) = 1$, und außerdem ist $d = \left(\frac{q}{\Delta}, K'L\right) = (Q, U)$. Dabei ist

$$\frac{Q U}{d} = \frac{q |K'L|}{\Delta d} = M.$$

Nach dem vorigen Hilfssatz hat somit die Summe $\sum_k e\left(\frac{a K k}{q}\right)$, erstreckt über die natürlichen Zahlen k mit

$$(96) \quad k \leq M, \quad \left(k, \frac{q}{\Delta}\right) = 1, \quad k \equiv u \pmod{K'L}$$

den Wert $\mu\left(\frac{q}{\Delta}\right) e\left(\frac{a K v}{q}\right)$ oder 0, je nachdem $\frac{q}{\Delta}$ teilerfremd zu d ist oder nicht. Da u teilerfremd zu $K'L$ ist, so folgt aus (96), daß k teilerfremd zu M ist,

so daß die Summe \sum_k erstreckt wird über die zu M teilerfremden natürlichen Zahlen $k \leq M$ mit $k \equiv u \pmod{K'L}$; Formel (95) geht also über in

$$\varphi(M) E\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_k e\left(\frac{aKk}{q}\right),$$

womit Hilfssatz 21 bewiesen ist.

Beweis von Satz 10. Ich brauche nur für jedes ganze $t \neq 0$ Beziehung (87) herzuleiten, wo $H(q, t)$ die durch (86) definierte Funktion bezeichnet. Die Zahlen $\Delta, d, M, \Delta', d', M'$ werden durch (79) und (83) definiert. Aus (79) folgt

$$\Delta d = (q, \Delta K'L) = (q, qK'L, KK'L) = (q, KK'L),$$

so daß der größte gemeinsame Teiler von q und $KK'L$, den ich mit D bezeichnen werde, gleich Δd , also auch gleich $\Delta'd'$ ist.

Ich betrachte zunächst die natürlichen Zahlen q mit der Eigenschaft, daß $\frac{q}{D}$ quadratfrei und teilerfremd zu $KK'L$ ist. Für diese q ist

$$\mu\left(\frac{q}{\Delta d}\right) \mu\left(\frac{q}{\Delta' d'}\right) = \mu^2\left(\frac{q}{D}\right) = 1,$$

also nach dem vorigen Hilfssatz:

$$\varphi(M) \varphi(M') H(q, t) = \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} e\left(\frac{a}{q} (Kv + K'v' - t)\right) = Z(q, Kv + K'v' - t),$$

wo v den Kongruenzen (94) und v' den analogen Kongruenzen

$$(97) \quad v' \equiv 0 \pmod{\frac{q}{\Delta' d'}}; \quad v' \equiv u' \pmod{d'}$$

genügt. Da $\frac{q}{D}$ teilerfremd zu $KK'L$, also zu D ist, folgt aus Hilfssatz 17:

$$Z\left(q, Kv + K'v' - t\right) = Z\left(\frac{q}{D}, Kv + K'v' - t\right) Z(D, Kv + K'v' - t),$$

und hierin ist, da v und v' durch $\frac{q}{D}$ teilbar sind,

$$Z\left(\frac{q}{D}, Kv + K'v' - t\right) = Z\left(\frac{q}{D}, -t\right).$$

D ist ein Teiler von $\frac{K}{\Delta} q$ und von $KK'L$, also auch von $\left(\frac{K}{\Delta} q, KK'L\right) = Kd$, daher auch von $K'd'$, so daß aus (94) und (97) folgt:

$$\begin{aligned} Kv + K'v' &\equiv Ku + K'u' \pmod{D}; \\ Z(D, Kv + K'v' - t) &= Z(D, Ku + K'u' - t). \end{aligned}$$

Für die natürlichen Zahlen q mit der Eigenschaft, daß $\frac{q}{D}$ quadratfrei und teilerfremd zu $KK'L$ ist, ist

$$\varphi(M) = \varphi\left(\frac{q}{D}\right) \varphi(|K'L|) \text{ und } \varphi(M') = \varphi\left(\frac{q}{D}\right) \varphi(|KL|),$$

also

$$\varphi^3\left(\frac{q}{D}\right) \varphi(|K'L|) \varphi(|KL|) H(q, t) = Z\left(\frac{q}{D}, -t\right) Z(D, Ku + K'u' - t).$$

Für die natürlichen Zahlen q mit der Eigenschaft, daß $\frac{q}{D}$ durch ein Quadrat > 1 teilbar ist, verschwindet $H(q, t)$ nach dem vorigen Hilfssatz. Noch zu untersuchen sind die natürlichen Zahlen q mit der Eigenschaft, daß $\frac{q}{D}$ quadratfrei und nicht zu $KK'L$ teilerfremd ist. Wäre $H(q, t) \neq 0$ für irgendeines dieser q , so wäre $\frac{q}{D}$ nach dem vorigen Hilfssatz teilerfremd zu d und zu d' ; dann besäße $KK'L$ einen Primfaktor, der in $\frac{q}{D}$, also auch in $\frac{q}{A}$ und in $\frac{q}{A'}$, aber nicht in d und nicht in d' , also wegen (79) und (83) nicht in $K'L$ und nicht in KL , folglich nicht in $KK'L$ aufgeht. Hiermit ist bewiesen, daß $H(q, t)$ für jedes dieser q verschwindet. Daher ist

$$\varphi(|K'L|) \varphi(|KL|) \sum_{q=1}^{\infty} H(q, t) = \sum_q \varphi^{-3}\left(\frac{q}{D}\right) Z\left(\frac{q}{D}, -t\right) Z(D, Ku + K'u' - t),$$

wo \sum_q erstreckt wird über die natürlichen Zahlen q mit der Eigenschaft, daß $\frac{q}{D}$ quadratfrei und teilerfremd zu $KK'L$ ist. Daher ist

$$\begin{aligned} & \varphi(|K'L|) \varphi(|KL|) \sum_{q=1}^{\infty} H(q, t) \\ &= \sum_{D|KK'L} Z(D, Ku + K'u' - t) \sum_h \varphi^{-3}(h) Z(h, -t), \end{aligned}$$

wo \sum_h erstreckt wird über die quadratfreien zu $KK'L$ teilerfremden natürlichen Zahlen h . Aus Hilfssatz 18 geht nun hervor:

$$(98) \quad \varphi(|K'L|) \varphi(|KL|) \sum_{q=1}^{\infty} H(q, t) = |KK'L| \sum_h \varphi^{-3}(h) Z(h, -t) \text{ oder } 0,$$

je nachdem $Ku + K'u' - t$ durch $KK'L$ teilbar ist oder nicht. Im letzten Fall verschwindet die in der Definition (24) von $\Omega(t)$ auftretende Zahl ϱ , also $\Omega(t)$ selbst, so daß dann (87) bewiesen ist. Ich kann daher annehmen, daß $Ku + K'u' - t$ durch $KK'L$ teilbar, also $\varrho = 1$ ist.

Nach der ersten und zweiten Behauptung von Hilfssatz 17 ist

$$\begin{aligned} \sum_h \varphi^{-3}(h) Z(h, -t) &= \prod_{p \nmid KK'L} \left(1 + \frac{Z(p, -t)}{(p-1)^3}\right) \\ &= \prod_{p \nmid KK'L} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^3}\right) \cdot \prod_{p \nmid KK'L} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right), \end{aligned}$$

so daß nach (98) dieser Ausdruck den Wert

$$\varphi(|L|) \prod_{p|KK'L} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} H(q, t)$$

hat. Ist $KK'Lt$ ungerade, so verschwinden daher $\sum_{q=1}^{\infty} H(q, t)$ und $\Omega(t)$, und sonst ist

$$\begin{aligned} \varphi(|L|) \sum_{q=1}^{\infty} H(q, t) &= 2 \prod_{\substack{p|KK'Lt \\ p>2}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p|KK'Lt \\ p>2}} \frac{p}{p-1} \\ &= 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p|KK'Lt \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} = \varphi(|L|) \Omega(t), \end{aligned}$$

womit Satz 10 vollständig bewiesen ist.

(Eingegangen am 6. 2. 1933.)

Über die Strenge vollständiger Systeme von Gruppenpostulaten.

Von

Wolfgang Pich in Wien.

In Band 45, S. 8–12, der Monatshefte für Mathematik und Physik veröffentlichte A. E. Mayer eine Untersuchung „Über die Strenge von Gruppenpostulaten“, die im wesentlichen ein Kriterium der Strenge eines einzelnen Postulates gab, und zwar in der Angabe der Wahrscheinlichkeit, mit der eine beliebig ausgefüllte Gruppentafel das Postulat erfüllt. Er vergleicht in dieser Arbeit zwei von Garver angegebene Postulatentripel¹⁾:

- I. Assoziativität, Umkehrbarkeit der linksseitigen Multiplikation, Umkehrbarkeit der rechtsseitigen Multiplikation.
- II. Assoziativität, Umkehrbarkeit der rechtsseitigen Multiplikation
Existenz eines rechtsseitigen Einheitselementes.

Dabei ist jedoch nur die Strenge je eines Postulates zu vergleichen, da die beiden anderen identisch sind in den beiden Systemen.

Diese Fragestellung erweist sich in zweierlei Hinsicht als zu eng. Erstens läßt sich für einzelne Postulate, wie z. B. für die Assoziativität, die allgemeine Wahrscheinlichkeit für Gruppentafeln aus n Elementen gar nicht berechnen. Zweitens liegt der Fall nicht immer so, daß nur ein Postulat in zwei Systemen verschieden ist. Sollen z. B. zwei Postulatentripel verglichen werden, in denen nur ein Postulat in beiden übereinstimmt, die beiden anderen aber verschieden sind, so kann es vorkommen, daß das eine Tripel sowohl das strengste wie auch das schwächste von allen sechs Postulaten enthält, in welchem Fall sich keine Entscheidung treffen läßt. Zur näheren Erklärung will ich das folgende Beispiel anführen:

Es sollen verglichen werden die beiden Systeme:

- II. Assoziativität, Umkehrbarkeit der rechtsseitigen Multiplikation,
Existenz eines rechtsseitigen Einheitselementes.
- III. Assoziativität (+), Umkehrbarkeit der linksseitigen Multiplikation,
Existenz eines idempotenten Elementes.

¹⁾ R. Garver, Note concerning group postulates, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934), S. 698–701; R. Garver, A definition of groups by means of three postulates, Amer. J. Math. 57 (1935), S. 276–280.

Dabei soll Assoziativität (+) der folgende Satz sein: „Sind $x, y, z, t, xy, yz, xt, (xy)z$ Elemente aus G und ist $(xy)z = xt$, so gilt $yz = t$.“ Und die Existenz eines idempotenten Elementes heißt: Es soll ein Element e aus G existieren, das mit sich selbst verknüpft nicht ändert: $ee = e$.

Zunächst der Beweis, daß die drei Axiome des Systems III tatsächlich die Gruppe definieren. Um mich kürzer auf die Axiome berufen zu können, bezeichne ich sie der Reihe nach mit A, B, C.

(I)	1	B	$\bar{a}a = e$
	2	C, I	$(\bar{a}a)e = \bar{a}a$
(II)	3	2, A	$ae = a$
	4	II	$\bar{a}e = \bar{a}$
	5	4	$(\bar{a}e)a = \bar{a}a$
(III)	6	5, A	$ea = a$
	7	II, III	$e\bar{a} = \bar{a}e$
	8	7, I	$(\bar{a}a)\bar{a} = ae$
(IV)	9	8, A	$a\bar{a} = e$
	10	B	$y\bar{b} = a$
	11	B	$zb = y$
	12	10, 11	$(zb)\bar{b} = a$
	13	12, IV	$((zb)\bar{b})\bar{a} = a\bar{a} = e$
	14	13, IV	$((zb)\bar{b})\bar{a} = (zb)(\bar{z}\bar{b})$
	15	14, A	$\bar{b}\bar{a} = (\bar{z}\bar{b})$
	16	15, I	$(\bar{b}\bar{a})(zb) = e$
	17	16, I	$(\bar{b}\bar{a})(zb) = \bar{b}b$
	18	17, A	$\bar{a}(zb) = b$
	19	18; III	$\bar{a}(zb) = eb$
	20	19, I	$\bar{a}(zb) = (\bar{a}a)b$
	21	20, A	$zb = ab$
(V)	22	11, 21	$ab = y$ aus G
	23	V	$a(\bar{a}b) = a(\bar{a}b)$
	24	23, III, IV	$(a\bar{a})(a(\bar{a}b)) = a(\bar{a}b)$
	25	24, A	$\bar{a}(a(\bar{a}b)) = \bar{a}b$
	26	25, II	$\bar{a}(a(\bar{a}b)) = (\bar{a}b)e$
	27	26, A	$a(\bar{a}b) = be$
(VI)	28	27, II	$a(\bar{a}b) = b$
(VII)	29	VI	Es gibt ein x aus G , so daß $ax = b$
	30	VII	$ax = (ab)c$
	31	30, A	$x = bc$
(VIII)	32	30, 31	$a(bc) = (ab)c$

Die Sätze V, VIII, III, I stellen die gewöhnlich benutzten Gruppenaxiome dar, d. h. das System III ist ein vollständiges Postulatensystem.

Sucht man nun die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Postulate (wie ich oben angegeben habe, gelingt dies nicht allgemein für n ; ich gebe hier die Wahrscheinlichkeiten für $n = 3$ an), so erhält man:

System I: 113, 216, 2107.

System II: 33, 216, 13851.

Durch Vergleich dieser beiden Zahlentripel kann man keine Entscheidung darüber treffen, welches der beiden Systeme im Sinne A. E. Mayers als strenger zu bezeichnen wäre. Irgendeine arithmetische Verknüpfung der drei Ziffern eines Systems zu einer einzigen Maßzahl hätte aber keinerlei logische Grundlage.

Ich habe nun eine neue Methode aufgestellt, die Strenge eines Postulates oder eines Postulatensystems zu messen, die die eben aufgezeigten Schwierigkeiten vermeidet und bei der die Berechnung der Maßzahlen durchwegs ganz allgemein möglich ist.

Der Grad der Strenge liegt meines Erachtens darin, daß in einem System mehr, in einem anderen weniger überflüssige Bestandteile enthalten sind. So ist z. B. das System: Assoziativität (+), Umkehrbarkeit der linksseitigen Multiplikation, Existenz eines linksseitigen Einheitselementes stärker als das oben angegebene System III. Das Mehrverlangen in dem Postulat nach einem linksseitigen Einheitselement gegenüber dem Postulat nach einem idempotenten Element ist eben ein überflüssiger Bestandteil.

Man muß also jenes System als schwächer bezeichnen, das aus schwächeren Sätzen aufgebaut ist, das mit anderen Worten weniger Bindungen verlangt.

Soll man die Gültigkeit eines Satzes in einer Menge von Elementen mit einer bestimmten Verknüpfungstafel nachweisen, so wird dies um so mehr Arbeit erfordern, je mehr Bindungen der betreffende Satz den Elementen auferlegt. Kann man diese Arbeit messen, so hat man im Vergleich der so erhaltenen Maßzahlen ein praktisches Kriterium der Strenge.

Die Arbeit, die man zu leisten hat, besteht im Verknüpfen von Elementen und im Vergleichen der durch das Verknüpfen gewonnenen Resultate. Die Anzahl der Operationen (Verknüpfungen und Vergleiche) nehme ich als Maß der Strenge. Je größer diese Zahl, desto strenger das Postulat.

Sucht man nun das Strengenmaß eines ganzen Systems, so addiert man die Maßzahlen der einzelnen Sätze, denn es summiert sich auch die Arbeit, wenn man die Gültigkeit mehrerer Sätze zu erproben hat. So erhält man auch für ein System nur eine einzige Maßzahl, die man natürlich mit jeder anderen Maßzahl vergleichen kann.

Ich berechne nun im folgenden die Maßzahlen einzelner Sätze, und zwar für fünf Elemente²⁾, in Klammern beigefügt für n Elemente:

1. Assoziativität: Hat man eine Menge von 5 (n) Elementen und soll versuchen, ob die Assoziativität in ihr erfüllt ist, so muß man für jede beliebige Einsetzung der 5 (n) Elemente für a, b, c die Richtigkeit von $(ab)c = a(bc)$ nachprüfen. Solcher Einsetzungen gibt es 5^3 (n^3). Für jede dieser Einsetzungen sind 4 Verknüpfungen und ein Vergleich durchzuführen, das sind also je 5 Operationen. Die Maßzahl ist daher 625 ($5n^3$).

2. Assoziativität (+): Hier benötigt man für jede Einsetzung 4 Verknüpfungen und 2 Vergleiche, das sind 6 Operationen. Die mögliche Zahl von Einsetzungen ist 5^4 (n^4). Maßzahl: 3750 ($6n^4$).

3. Umkehrbarkeit der rechtsseitigen Multiplikation: Bei diesem Postulat hat man für jedes geordnete Elementenpaar s, t zu prüfen, ob $sa_i = t$ für irgendein i zwischen $i = 1$ und $i = 5$ (n) ist. Man hat also für jedes Paar 5 (n) Verknüpfungen und 5 (n) Vergleiche durchzuführen. Die Anzahl geordneter Paare ist 25 (n^2). Die Maßzahl daher: 250 ($2n^3$).

4. Für die Umkehrbarkeit der linksseitigen Multiplikation erhält man die gleiche Maßzahl: 250 ($2n^3$).

5. Existenz eines rechtsseitigen Einheitselementes: Man muß für jedes Element s prüfen, ob $a_i s = a_i$ für $i = 1, 2, \dots, 5$ (n) ist. Das sind für jedes Element 5 (n) Verknüpfungen und 5 (n) Vergleiche, also 10 ($2n$) Operationen. Maßzahl: 50 ($2n^2$).

6. Existenz eines linksseitigen Einheitselementes: 50 ($2n^2$).

7. Existenz eines idempotenten Elementes: Es ist zu prüfen, ob eines der 5 (n) Elemente die Bedingung $ss = s$ erfüllt. Dazu hat man 5 (n) Verknüpfungen und 5 (n) Vergleiche durchzuführen. Die Maßzahl ist 10 ($2n$).

8. Existenz eines eindeutig bestimmten idempotenten Elementes. (Dieses Postulat werde ich später brauchen.) Seine Maßzahl ist 18 ($4n - 2$), denn man hat außer den Operationen bei Punkt 7 noch zu prüfen, ob für die

²⁾ Es genügt nämlich bei diesen Beispielen, den Vergleich für $n = 5$ durchzuführen. Denn faßt man die Maßzahlen als Funktionen von n auf, so ergeben sich lauter Parabeln, und zwar lauten die Funktionen für die unten zu vergleichenden Systeme I bis V: $y_1 = 9n^3$, $y_2 = 7n^3 + 2n^2$, $y_3 = 6n^4 + 2n^3 + 2n$, $y_4 = 6n^3 + 5n^2$, $y_5 = 7n^3 + 4n - 2$. Die richtigen Resultate kann man erst für ein solches n erwarten, das größer als alle Schnittpunktsabszissen ist. Da bei diesen fünf Parabeln noch zwischen $n = 4$ und $n = 5$ ein Schnittpunkt (von y_4 und y_5) liegt, muß hier zur Berechnung der Maßzahlen n mindestens gleich 5 genommen werden. Daß nach $n = 5$ kein Schnittpunkt mehr liegt, ist leicht einzusehen. Die Kurven passieren die Ordinate für $n = 5$ von unten nach oben in der Reihenfolge: $y_4 = 875$, $y_5 = 893$, $y_2 = 925$, $y_1 = 1125$ und $y_3 = 4010$. Die Differentialquotienten der y_i für $n = 5$ ergeben in der gleichen Reihenfolge: $y'_4 = 500$, $y'_5 = 529$, $y'_2 = 545$, $y'_1 = 675$, $y'_3 = 3152$. Die Kurven gehen von $n = 5$ an strahlenförmig auseinander.

4 ($n - 1$) von e verschiedenen Elemente $ss \neq s$ gilt. Das sind aber noch 8 ($2n - 2$) weitere Operationen.

9. Abgeschlossenheit: Wenn a und b aus G , so ist $ab = x$ aus G . Für jedes Paar 1 (1) Verknüpfung und 5 (n) Vergleiche. Es gibt 25 (n^2) Paare. Maßzahl: 150 ($n^3 + n^2$).

10. Existenz eines linksinversen Elementes: Für jedes Element s ist zu prüfen, ob $a_i s = e$ für irgendein i von 1 bis 5 (n) ist. Das sind pro Element 5 (n) Verknüpfungen und 5 (n) Vergleiche. Maßzahl: 50 ($2n^2$).

Aus diesen Maßzahlen erhält man nun die Maßzahlen für die oben angeführten Systeme:

I. Assoziativität, Umkehrbarkeit der rechtsseitigen Multiplikation, Umkehrbarkeit der linksseitigen Multiplikation.

Maßzahl: $625 + 250 + 250 = 1125$ ($5n^3 + 2n^3 + 2n^3 = 9n^3$).

II. Assoziativität, Umkehrbarkeit der rechtsseitigen Multiplikation, Existenz eines rechtsseitigen Einheitselementes.

Maßzahl: $625 + 250 + 50 = 925$ ($5n^3 + 2n^3 + 2n^2 = 7n^3 + 2n^2$).

III. Assoziativität (+), Umkehrbarkeit der linksseitigen Multiplikation, Existenz eines idempotenten Elementes.

Maßzahl: $3750 + 250 + 10 = 4010$ ($6n^4 + 2n^3 + 2n$).

Bezüglich I und II ergibt sich das gleiche Resultat wie bei A. E. Mayer, es ist nun aber auch möglich, das Verhältnis von III zu II zu entscheiden, was oben nicht möglich war, und zwar ist III strenger als II und auch als I.

Mit dieser Maßmethode kann man aber noch viel interessantere Ergebnisse erhalten. So ist es z. B. möglich, die Strenge eines drei- und eines viergliedrigen Postulatensystems zu vergleichen. Nehmen wir etwa das normale viergliedrige System:

IV. Abgeschlossenheit, Assoziativität, Existenz eines linksseitigen Einheitselementes, Existenz eines linksinversen Elementes. Maßzahl: $150 + 625 + 50 + 50 = 875$ ($n^3 + n^2 + 5n^3 + 2n^2 + 2n^2 = 6n^3 + 5n^2$).

Daraus folgt, daß beide Garverschen Systeme strenger sind als das gewöhnlich angewendete viergliedrige Postulatensystem. Die Verminderung der Zahl der Axiome brachte gleichzeitig einen Verlust an Schwäche.

Zum Abschluß dieser Untersuchung gebe ich ein noch schwächeres Postulatentripel als die beiden Garverschen Tripel an, das an Schwäche schon sehr nahe an das viergliedrige System IV herankommt.

V. Assoziativität, Umkehrbarkeit der rechtsseitigen Multiplikation, Existenz eines eindeutig bestimmten idempotenten Elementes. Seine Maßzahl ist: $625 + 250 + 18 = 893$ ($5n^3 + 2n^3 + 4n - 2 = 7n^3 + 4n - 2$).

Beweis der Vollständigkeit (die Axiome bezeichne ich wieder der Reihe nach mit A, B, C):

	1	B	$ex = a$
	2	B	$ey = x$
	3	1, 2	$e(ey) = a$
	4	C, 2	$(ee)y = ey = x$
	5	3, 4, A	$a = x$
(I)	6	1, 5	$ea = a$
(II)	7	B	$a\bar{a} = e$
	8	B	$ax = b$
	9	B	$\bar{a}y = x$
	10	8, 9	$a(\bar{a}y) = b$
	11	II, I	$(a\bar{a})y = ey = y$
	12	10, 11, A	$b = y$
(III)	13	10, 12	Wenn a und b aus G sind, so gilt $a(\bar{a}b) = b$
	14	B	$\bar{a}z = b$
	15	III	$a(\bar{a}z) = z$
	16	14	$a(\bar{a}z) = ab$
(IV)	17	15, 16	$ab = z$ aus G
	18	IV	$\bar{a}a = x$ aus G
	19	IV, A, II, I	$a(\bar{a}a) = (a\bar{a})a = ea = a$
	20	19, 18	$ax = a$
	21	20, IV, 18	$\bar{a}(ax) = \bar{a}a = x$
	22	21, A	$(\bar{a}a)x = x$
	23	22, 18	$xx = x$
	24	23, C	$x = e$
(V)	25	18, 24	$\bar{a}a = e$

Die Sätze: IV, A, I, V bilden das System IV. Das System IV folgt also aus System V, d. h. System V ist vollständig.

Dazu ist noch zu bemerken, daß eine weitere Abschwächung des dritten Axioms nicht mehr möglich ist, denn die nächst schwächere Stufe wäre die Forderung nach einem idempotenten Element ohne die Forderung der Eindeutigkeit. Daß dieses System nicht mehr vollständig wäre, beweist die folgende Tafel:

a	b	c
a	b	c
a	b	c

In dieser Tafel sind sowohl die Assoziativität als auch die Umkehrbarkeit der rechtsseitigen Multiplikation als auch die Existenz eines idempotenten Elementes erfüllt. Sie stellt aber keine Gruppe dar, sie hat z. B. kein rechtsseitiges Einheitsselement.

Ergebnis: Das schwächste uns derzeit zur Verfügung stehende Postulaten-system ist noch immer das viergliedrige System aus: Abgeschlossenheit, Assoziativität, Existenz eines linksseitigen Einheitselementes, Existenz eines linksinversen Elementes.

(Vorgetragen in der Mathematischen Gesellschaft in Wien
im November 1937.)

(Eingegangen am 23. 5. 1938.)

Über Isometrie und stetige Verbiegung von Flächen.

Von

H. Hopf in Zürich und H. Schilt in Biel.

1. Alle Flächen, von denen hier die Rede ist, sollen im dreidimensionalen Raume liegen, reell und analytisch¹⁾ und frei von Singularitäten sein. Es wird sich durchaus um Untersuchungen „im Kleinen“ handeln, also um die Betrachtung beliebig kleiner Umgebungen einzelner Flächenpunkte.

Zwei Flächen F und F' heißen „isometrisch“, wenn zwischen ihnen eine längentreue Abbildung oder „Isometrie“ besteht. Eine „stetige Verbiegung“ einer Fläche F in eine Fläche F' ist eine Schar $\{J_t\}$ von Isometrien der Fläche F auf Flächen F_t , wobei die Schar stetig von dem Parameter t , $0 \leq t \leq 1$, abhängt²⁾ und J_0 die Identität — also $F_0 = F$ — und $F_1 = F'$ ist. Die hier auftretende Isometrie J_1 nennen wir eine „Biegungsisometrie“, und die Flächen $F = F_0$ und $F' = F_1$ nennen wir einander „biegungsisometrisch“.

Wie kann man entscheiden, ob eine Isometrie J eine Biegungsisometrie und ob zwei isometrische Flächen einander biegunsisometrisch sind? Diese Frage ist unser Ausgangspunkt. Dabei stellen wir, um es noch einmal zu betonen, die Frage nur „im Kleinen“; das heißt: ist die isometrische Abbildung J der Fläche F auf die Fläche F' vorgelegt und ist o ein Punkt auf F , so fragen wir, ob es auf F eine Umgebung U von o gibt, innerhalb welcher J eine Biegungsisometrie ist, welche sich also in ihr Bild $U' = J(U)$, das ein Gebiet auf F' ist, stetig verbiegen läßt.

2. In diesem Zusammenhange sind, soviel wir wissen, die folgenden Tatsachen bekannt. Nachdem A. Voss 1895 darauf aufmerksam gemacht hatte, daß zwischen „Isometrie“ und „Biegungsisometrie“ zum mindesten begrifflich ein Unterschied besteht³⁾, hat E. E. Levi 1907 einige wichtige Sätze entdeckt⁴⁾:

Er hat zunächst bemerkt, daß dieser Unterschied nicht nur begrifflich, sondern tatsächlich vorhanden ist: die Spiegelung J eines positiv gekrümmten

¹⁾ Die meisten Sätze lassen sich so formulieren, daß die Voraussetzung hinreichend häufiger Differenzierbarkeit genügen würde.

²⁾ Die „stetige Abhängigkeit“ wird in Nr. 19 präzisiert werden.

³⁾ A. Voss, Über isometrische Flächen, Math. Annalen 46 (1895), S. 97; Enzykl. Math. Wiss. III D 6a, S. 362—363.

⁴⁾ E. E. Levi, Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili, Atti Accad. Torino 43 (1907/08), S. 292. — Neue Darstellung dieser Sätze und Beweise: H. Schilt, Über die isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitssätze, Compos. Math. 5 (1937), S. 239; wir zitieren diese Arbeit als „Schilt“.

Flächenstückes F an einer Ebene, die ja eine isometrische Abbildung von F auf das Spiegelbild F' von F ist, ist keine Biegungsisometrie⁶⁾. Jedoch wird man diese fast selbstverständliche Tatsache nicht als endgültige Antwort auf die Frage von Voss anerkennen, vielmehr wird man sich jetzt veranlaßt sehen, den Begriff der Biegungsisometrie zu erweitern: Die Isometrie J heiße eine „Biegungsisometrie im weiteren Sinne“, wenn es eine stetige Schar von Isometrien $\{J_t\}$, $0 \leq t \leq 1$, gibt, in welcher J_0 die Identität und entweder $J_1 = J$ oder $J_1 = SJ$ ist, wobei S die Spiegelung an einer Ebene bezeichnet — kurz gesagt also: F und F' sind biegungsisometrisch „im weiteren Sinne“, wenn sich F entweder in F' oder in das Spiegelbild von F' stetig verbiegen läßt. Die ursprünglich eingeführte Biegungsisometrie nennen wir jetzt eine solche „im engeren Sinne“.

Nach dieser Festsetzung erhebt sich nun wieder, in einer modifizierten Form, die von Voss angeschnittene Frage: Besteht ein tatsächlicher Unterschied zwischen den Begriffen der „Isometrie“ und der „Biegungsisometrie im weiteren Sinne“? Der folgende Satz von E. E. Levi verneint diese Frage für die meisten Flächen:

Satz L_1 . *In dem Punkt o der Fläche F sei die Gaußsche Krümmung $K \neq 0$; dann ist jede Isometrie J in einer Umgebung von o eine Biegungsisometrie im weiteren Sinne.*

Und hierzu gilt noch, wie ebenfalls E. E. Levi gezeigt hat, der folgende Zusatz, der ein Gegenstück zu der obigen Bemerkung über Flächen positiver Krümmung und ihre Spiegelbilder darstellt⁶⁾:

Satz L_2 . *In o sei $K < 0$; dann ist J in einer Umgebung von o sogar eine Biegungsisometrie im engeren Sinne; mit anderen Worten: jede Fläche negativer Krümmung läßt sich (im Kleinen) sogar stetig in ihr Spiegelbild verbiegen.*

Diese Untersuchungen sind vor kurzem von H. Silt fortgesetzt worden⁴⁾. Erstens wurde der Satz L_1 folgendermaßen verallgemeinert⁷⁾:

Satz L_1' . *Die Behauptung des Satzes L_1 bleibt richtig, wenn man in ihm die Voraussetzung, daß in o die Krümmung nicht 0 sei, durch die schwächere ersetzt: die Punkte o und $o' = J(o)$ seien nicht Flachpunkte⁸⁾.*

⁶⁾ Beweis: Die zweite Fundamentalform einer positiv gekrümmten Fläche ist definit; für die eine der Flächen F, F' ist sie positiv, für die andere negativ definit (in bezug auf ein gemeinsames Parametersystem); bei stetiger Verbiegung von F kann sich aber, da sie immer definit bleibt, ihr Vorzeichen nicht ändern. — Man vgl. auch Silt, Einleitung, Fußnote⁴⁾.

⁶⁾ Silt, Nr. 30, Satz XVII und Satz XVIIa.

⁷⁾ Silt, Nr. 29, Satz XVI.

⁸⁾ Ein Flachpunkt ist ein Punkt, in dem die zweiten Fundamentalgrößen $L = M = N = 0$ sind; einen Punkt, in dem zwar $LN - M^2 = 0$ ist, also die Krümmung verschwindet, aber nicht $L = M = N = 0$ ist, nennen wir parabolisch. — Wir weichen hierin von der sonst häufigen Terminologie ab, in der alle Punkte mit $LN - M^2 = 0$ parabolisch genannt werden.

Mit anderen Worten: höchstens dann, wenn wenigstens einer der Punkte o und o' Flachpunkt ist, kann es eine Isometrie zwischen Umgebungen dieser beiden Punkte geben, die keine Biegungsisometrie im weiteren Sinne ist; man muß also bei allen Untersuchungen in unserem Problemkreis den Flachpunkten besondere Aufmerksamkeit schenken. — Zweitens wurde bewiesen⁹⁾:

Satz S. *Es gibt Paare isometrischer Flächen $F, F' = J(F)$ und Punkte $o, o' = J(o)$ auf ihnen mit folgender Eigenschaft: in keiner (noch so kleinen) Umgebung von o ist J eine Biegungsisometrie im weiteren Sinne.*

Hiermit ist die Frage von Voss beantwortet und, unseres Wissens zum erstenmal, klargestellt worden, daß zwischen dem Begriff der Isometrie und dem der Biegungsisometrie (im weiteren Sinne) ein tatsächlicher Unterschied besteht.

3. Wir skizzieren hier den Gedankengang des Beweises von Schilt für den Satz S.

Es sei o ein Punkt der Fläche F ; in allen von o verschiedenen Punkten sei die Krümmung $K < 0$. Dann ist o ein „Sattelpunkt“ mit einer bestimmten endlichen „Sattellordnung“ s , d. h. bei horizontaler Lage der Tangentialebene von o laufen $s + 1$ „Täler“ und $s + 1$ „Berggrücken“ in o zusammen. Unter der Voraussetzung, daß $K < 0$ auch in o selbst, und sogar unter der schwächeren Voraussetzung, daß o nicht Flachpunkt ist, ist o ein „gewöhnlicher“ Sattel, d. h. es ist $s = 1$. Die Ordnung s ist, wie man ohne große Schwierigkeit zeigt, invariant bei stetiger Verbiegung einer Umgebung von o . Daher hat man ein Beispiel, wie es im Satz S genannt wird, gefunden, sobald man zu einer Fläche F , die einen Sattel o mit einer Ordnung $s > 1$ besitzt, eine isometrische Fläche F' konstruiert hat, auf welcher der entsprechende Punkt o' nicht Flachpunkt ist. Diese Konstruktion aber ist immer möglich auf Grund des folgenden Existenzsatzes, der sich aus dem klassischen Existenztheorem für partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung ergibt¹⁰⁾.

Existenzsatz. *Es sei o ein Punkt auf der analytischen Fläche F ; dann gibt es eine Fläche F' , die zu einer Umgebung von o auf F isometrisch und auf welcher der Punkt o' , der o entspricht, nicht Flachpunkt ist.*

4. Die so gefundenen Flächenpaare, die isometrisch, aber nicht biegungsisometrisch (im weiteren Sinne) sind, haben sämtlich den folgenden speziellen Typus: die betrachteten Punkte o, o' sind isolierte Nullstellen der Krümmung K , während sonst überall $K < 0$ ist. Es entsteht die Aufgabe, auch andere, möglichst allgemeine Typen von Flächen anzugeben, welche Beispiele zum

⁹⁾ Schilt, Nr. 27, Satz XIV.

¹⁰⁾ Schilt, Nr. 25, Satz XIIIa.

Satz 8 liefern — etwa solche, auf denen K in der Umgebung von o , o' positiv ist; in o , o' selbst muß nach Satz L_1 immer $K = 0$ sein.

Um derartige Beispiele zu finden, wird man versuchen, Eigenschaften eines Flächenpunktes o anzugeben, die *invariant bei stetiger Verbiegung, aber nicht invariant bei allen Isometrien* sind; dabei hat man, wie aus dem Satz L_1 hervorgeht, sein Augenmerk besonders auf Flachpunkte o zu richten. Ein Beispiel einer solchen Invariante ist gerade die oben besprochene Sattellordnung s ; sie kann, wie erwähnt, nur in Flachpunkten verschieden von 1 sein; aber sie ist nur definiert, wenn in der Umgebung von o überall $K < 0$ ist. Will man auch andere Flächen behandeln, so liegt es nahe, die Invarianzeigenschaften der „Berührungsordnung“ b im Punkte o nachzuprüfen, die folgendermaßen erklärt ist: Die Tangentialebene von F im Punkte o sei die (xy) -Ebene, F sei durch die Gleichung $z = f(x, y)$ dargestellt, in o sei $x = y = 0$, und $f(x, y)$ besitze in der Umgebung von o die Taylorsche Entwicklung

$$(1) \quad z = f(x, y) = f^{(b+1)}(x, y) + f^{(b+2)}(x, y) + \dots, f^{(b+1)}(x, y) \neq 0,$$

worin die $f^{(i)}$ Formen i -ten Grades sind; dabei ist immer $b \geq 1$; dann und nur dann ist $b \geq 2$, wenn o Flachpunkt ist.

Wenn in o die Krümmung $K \neq 0$ ist, so ist $b = 1$ für jede mit F isometrische Fläche; die Invarianzeigenschaften von b sind also problematisch nur für den Fall, daß $K = 0$ in o ist; dann kann $b = 1$ oder $b \geq 2$ sein; wir interessieren uns hier für Flachpunkte, also für $b \geq 2$. Dann ist b bestimmt *nicht invariant bei beliebigen Isometrien*; denn nach dem „Existenzsatz“ (Nr. 3) gibt es eine mit F isometrische Fläche F' , für welche in dem Punkt o' , der o entspricht, die Berührungsordnung $b = 1$ ist. Zu untersuchen bleibt die Frage, ob b eine Invariante der stetigen Verbiegungen ist.

5. Die Antwort auf diese Frage hängt von der Fläche F ab; es gibt nämlich sowohl Flächen, durch deren stetige Verbiegungen man die Berührungsordnung b in einem Flachpunkt abändern und den Flachpunkt sogar in einen gewöhnlichen parabolischen Punkt verwandeln kann, als auch Flächen, für welche die Ordnung b eines Flachpunktes bei allen stetigen Verbiegungen fest bleibt. Je nachdem sich b abändern läßt oder nicht, wollen wir den Punkt „labil“ oder „stabil“ nennen.

Die einfachsten Beispiele von Flächen mit labilen Punkten sind die Zylinder $z = x^{b+1}$, $b \geq 2$, und allgemeiner alle Torsen, die Flachpunkte besitzen; denn bekanntlich läßt sich jede Torse stetig in jede andere Torse verbiegen, also z. B. in den Zylinder $z = x^2$, der keinen Flachpunkt besitzt. Aber auch auf Flächen, die nicht Torsen sind, können labile Punkte auftreten. Wir zeigen dies hier an dem Beispiel einer speziellen Regelfläche:

Für jeden Wert von t sind durch die folgenden Differentialgleichungen (2) mit den Anfangsbedingungen (2₀) drei Vektoren $\eta_1(u)$, $\eta_2(u)$, $\eta_3(u)$ als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen u bestimmt:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{\eta}_1 = & t \eta_3 \\ \dot{\eta}_2 = -t \eta_1 & + u \eta_3 \\ \dot{\eta}_3 = & -u \eta_2 \end{cases}$$

$$(2_0) \quad \eta_1(0) = (1, 0, 0), \quad \eta_2(0) = (0, 0, 1), \quad \eta_3(0) = (0, 1, 0).$$

Aus (2) und (2₀) ergibt sich, daß η_1, η_2, η_3 für alle u ein normiertes (negativ orientiertes) Orthogonalsystem bilden. Wir setzen

$$x(u, v; t) = \int_0^u \eta_1(w) dw + v \cdot \eta_3(u).$$

Dann ist

$$x_u = \eta_1 - uv\eta_2, \quad x_v = \eta_3.$$

Infolge der Orthogonalität der η_i sind x_u, x_v linear unabhängig; folglich stellt der Vektor x bei beliebigem t für alle u, v eine reguläre Fläche F_t dar. Für die ersten Fundamentalgrößen findet man

$$(3) \quad E = 1 + u^2 v^2, \quad F = 0, \quad G = 1;$$

für die zweiten Fundamentalgrößen

$$(4) \quad L = \frac{t u^2 v^3 + t - v}{\sqrt{1 + u^2 v^2}}, \quad M = \frac{-u}{\sqrt{1 + u^2 v^2}}, \quad N = 0;$$

für die Krümmung

$$(5) \quad K = \frac{-u^2}{(1 + u^2 v^2)^2}.$$

Auf Grund bekannter Sätze über Differentialgleichungen folgt aus (2), daß die durch $x(u, v; t)$ dargestellte Flächenschar $\{F_t\}$ regulär vom Parameter t abhängt. Man sieht aus (5): die Flächen F_t sind keine Torsen; aus (3): ihr Linienelement hängt nicht von t ab, also stellt die Schar $\{F_t\}$ bei Änderung von t eine stetige Verbiegung dar, und zwar derart, daß die gemeinsamen Parameter u, v die isometrischen Abbildungen zwischen den verschiedenen Flächen vermitteln; aus (4): auf F_t gibt es genau einen Flachpunkt, nämlich den Punkt $u = 0, v = t$. Somit wird durch diese stetige Verbiegung die Berührungsordnung in dem Punkt $u = v = 0$ geändert: sie ist größer als 1 für $t = 0$ und gleich 1 für $t \neq 0$; der Flachpunkt $u = v = 0$ der Fläche F_0 wird durch die stetige Biegung in einen parabolischen Punkt verwandelt *).

Daß es andererseits auch stabile Flachpunkte gibt, wird nachher gezeigt werden; dies vorweggenommen, erkennt man, daß unsere frühere Frage nach der Biegungsinvarianz der Berührungsordnung b folgendermaßen formuliert werden muß:

Für welche Flächen läßt sich die Berührungsordnung in einem Punkt durch stetiges Verbiegen ändern? Wie kann man entscheiden, ob ein Punkt stabil oder labil ist?

6. Wir werden hier nur einen Beitrag von vorbereitendem Charakter zur Beantwortung dieser Frage liefern; wir wollen zeigen, daß die labilen Punkte in einem bestimmten Sinne *Ausnahmen* sind. Es gilt nämlich der folgende Satz, der im § 2 bewiesen werden wird:

Satz I. Für die Labilität des Punktes o auf der Fläche (1) ist notwendig, daß die Hessesche Determinante der Form $f^{(b+1)}$

$$H f^{(b+1)} = f_{xx}^{(b+1)} f_{yy}^{(b+1)} - (f_{xy}^{(b+1)})^2$$

(die eine Form des Grades $2b-2$ ist und auch identisch 0 sein kann), durch das Quadrat einer reellen Linearform $px + qy$ teilbar ist.

Für diese Teilbarkeitseigenschaft wiederum ist notwendig, daß die Diskriminante der Form $H f^{(b+1)}$ gleich 0 ist, daß also zwischen den Koeffizienten der Form $f^{(b+1)}$ eine bestimmte algebraische Relation besteht. Daher ist es berechtigt zu sagen, daß für „fast alle“ Flächen die Bedingung des Satzes I nicht erfüllt ist, daß also die labilen Punkte „Ausnahmen“ sind und die Berührungsordnung „fast immer“ invariant bei stetiger Verbiegung ist.

Beispiele, in denen die Bedingung aus Satz I erfüllt ist, sind erstens die Zylinder $z = f^{(b+1)}(x, y) = x^{b+1}$; hier ist $H f^{(b+1)} \equiv 0$. Ein weniger triviales Beispiel ist die Regelfläche F_0 aus Nr. 5, die für $u = v = 0$ einen labilen Flachpunkt hat; man findet leicht

$$x = u, \quad y = v + \dots, \quad z = -\frac{u^3 v}{2} + \dots,$$

also

$$z = -\frac{x^3 y}{2} + \dots, \quad b = 2, \quad f^{(3)} = -\frac{x^3 y}{2}, \quad H f^{(3)} = -x^2.$$

Andererseits kann man mit Hilfe des Satzes I beliebig viele Flächen F mit stabilen Flachpunkten angeben: für die Rotationsparaboloide höherer Ordnung

$$(6a) \quad z = f^{(2n)}(x, y) = (x^2 + y^2)^n$$

findet man

$$H f = c(x^2 + y^2)^{2n-2}, \quad c > 0,$$

folglich ist der Scheitel $x = y = 0$ stabil; für die Fläche

$$(6b) \quad z = f^{(3)}(x, y) = x^3 + y^3$$

ist

$$H f^{(3)} = 36xy,$$

also ist auch hier der Punkt $x = y = 0$ ein stabiler Flachpunkt.

Zu jeder dieser Flächen F , welche stabile Flachpunkte o haben, gibt es, wie zu jeder Fläche, nach dem Existenzsatz (Nr. 3) eine isometrische Fläche F' , auf welcher der entsprechende Punkt o' nicht Flachpunkt ist, in welche sich also F nicht stetig verbiegen läßt. Man kann daher den Beispielen isometrischer, aber nicht biegungsisometrischer Flächenpaare, die das frühere Verfahren von Schilt (Nr. 3) geliefert hat, jetzt auch solche Beispiele an die Seite stellen, bei denen o eine isolierte Nullstelle auf einer sonst *positiv* gekrümmten Fläche ist, oder solche, bei denen das Vorzeichen der Krümmung in der Umgebung von o wechselt: so ist für die Flächen (6a)

$$K = c(x^2 + y^2)^{n-2} \frac{1}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2},$$

also $K > 0$ in allen von o verschiedenen Punkten, und für die Flächen (6b)

$$K = 36xy \cdot \frac{1}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2},$$

also wechselt auf ihr die Krümmung in der Umgebung von o das Vorzeichen.

7. Die im Satz I genannte notwendige Bedingung ist für die Labilität eines Punktes nicht hinreichend; wir werden dies hier nur an einigen Beispielen zeigen, und zwar für gewisse *parabolische* Punkte¹¹⁾. In jedem parabolischen Punkt ist $b = 1$, und die quadratische Form $f^{(2)}$, also die zweite Fundamentalform der Fläche, ist von der Gestalt $f^{(2)} = \pm (px + qy)^2$; es ist also $Hf^{(2)} \equiv 0$, und die Bedingung aus Satz I ist somit immer erfüllt. Der Satz I kann daher unmittelbar kein Beispiel eines stabilen parabolischen Punktes liefern. Trotzdem erhält man im Anschluß an den Beweis des Satzes I sehr leicht viele solche Beispiele; es läßt sich nämlich zeigen (§ 2):

Satz II. Die Taylorsche Reihe für die Krümmung K der Fläche (1) sei

$$K(x, y) = K^{(n)}(x, y) + K^{(n+1)}(x, y) + \dots, \quad K^{(n)}(x, y) \neq 0,$$

worin die $K^{(i)}$ Formen i -ten Grades bezeichnen. Dann ist für die Stabilität des Punktes o jede einzelne der folgenden drei Bedingungen (a), (b), (c) hinreichend:

- (a) $n = 1$;
- (b) $n = 2$, die quadratische Form $K^{(2)}$ ist nicht von der Gestalt $\pm (ax + by)^2$;
- (c) n beliebig, die Form $K^{(n)}$ ist definit.

Mit Hilfe dieses Satzes erhält man unter anderen die folgenden Beispiele von Flächen (1), auf welchen der Punkt $x = y = 0$ parabolisch und stabil ist:

$$\text{zu (a): } z = x^2 + y^2, \quad n = 1, \quad K^{(1)} = 12y;$$

$$\text{zu (b): } z = x^2 + xy^2, \quad n = 2, \quad K^{(2)} = 12xy;$$

$$\text{zu (c): } z = x^2 + a(x^{2n} + y^{2n})y^2, \quad n \geq 1, \quad a \neq 0;$$

$$n = 2n, \quad K^{(n)} = 4a(x^{2n} + (n+1)(2n+1)y^{2n}).$$

¹¹⁾ Auch im Falle von Flachpunkten ist die Bedingung aus Satz I nicht hinreichend für die Labilität; die in dem Satz angegebene notwendige Bedingung läßt sich nämlich erheblich verschärfen; wir gehen darauf hier aber nicht ein, da wir bisher kein Ergebnis von abschließendem Charakter erhalten haben.

8. Die Betrachtung stabiler parabolischer Punkte führt leicht zur Beantwortung einer Frage, die an den Satz L_2 (Nr. 2) anknüpft. Die Tatsache, daß sich der Satz L_1 zu dem Satz L'_1 verallgemeinern ließ, legt nämlich die Frage nahe, ob man auch in dem Satz L_2 die Voraussetzung, daß in o die Krümmung $K < 0$ sei, durch die schwächere ersetzen kann: „ o ist nicht Flachpunkt, und in den von o verschiedenen Punkten ist $K < 0$.“ Eine solche Verallgemeinerung L'_2 des Satzes L_2 ist aber unzulässig; der nachstehende Satz III erlaubt es nämlich, Beispiele anzugeben, welche die soeben formulierte schwächere Voraussetzung erfüllen, sich aber nicht stetig in ihre Spiegelbilder verbiegen lassen¹²⁾.

Satz III. *Eine Spiegelung der Umgebung eines stabilen parabolischen Punktes (an einer Ebene) ist niemals eine Biegungsisometrie im engeren Sinne.*

Beweis des Satzes III. Die Flächenschar $\{F_t\}$ stelle eine stetige Verbiegung der Fläche $F = F_0$ dar, auf welcher o ein stabiler parabolischer Punkt ist. Die zu o gehörigen zweiten Fundamentalgrößen der Fläche F_t seien L_t, M_t, N_t ; da o für alle t parabolisch ist, ist immer $L_t N_t - M_t^2 = 0$, aber nie $L_t = M_t = N_t = 0$; folglich ist immer $L_t + N_t \neq 0$, also hat $L_t + N_t$ für alle t dasselbe Vorzeichen. Da das Spiegelbild von F die zweiten Fundamentalgrößen $-L_0, -M_0, -N_0$ hat, kann es daher nicht zu der Schar $\{F_t\}$ gehören.

Auf Grund des damit bewiesenen Satzes erhält man jetzt folgende Beispiele, welche die oben in Frage gestellte Verallgemeinerung L'_2 des Satzes L_2 widerlegen: in den Beispielen, die in Nr. 7 zu (c) angegeben wurden, setze man $a = -1$; dann ist die Form $K^{(a)}$ negativ definit, also ist auch die Krümmung $K < 0$ in allen von o verschiedenen Punkten einer Umgebung von o . Der Punkt o ist auf einer solchen Fläche F ein isolierter parabolischer Punkt, also ein „gewöhnlicher“ Sattel, d. h. es ist $s = 1$ (man vgl. Nr. 3); äußerlich unterscheidet sich F also kaum von einer Fläche, die auch in o selbst negative Krümmung besitzt und auf die daher der Satz L_2 anwendbar ist; trotzdem macht das Verschwinden der Krümmung in dem einen Punkt o die stetige Verbiegbarkeit von F in ihr Spiegelbild unmöglich.

Die Methode, mit der wir die Sätze I und II beweisen werden, steht in engem Zusammenhang mit einer Methode, die zu einem etwas anderen Zweck in der mehrfach erwähnten Arbeit von Schilt verwendet wurde¹³⁾; einige unserer Hilfssätze kommen bereits dort vor; die Kenntnis der Arbeit von Schilt wird aber nicht vorausgesetzt.

Im § 1 werden einige algebraische Hilfssätze behandelt, im § 2 die Sätze I und II bewiesen.

¹²⁾ Man vgl. Schilt, Nr. 30, Fußnote ²³⁾.

¹³⁾ Schilt, 3. Teil.

§ 1.

Hilfssätze über den Hesseschen Operator.

9. Der Hessesche Operator H ist für jede zweimal differenzierbare Funktion $f(x, y)$ durch

$$Hf = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

erklärt. Er hat die folgende Kovarianzeigenschaft, die bekannt und leicht durch Rechnung zu bestätigen ist:

Führt man durch die Transformation

$$(7) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \quad ad - bc \neq 0,$$

neue Veränderliche x', y' ein, faßt man dann $f(x, y)$ als Funktion von x', y' auf und bildet

$$H'f = f_{x'x'}f_{y'y'} - f_{x'y'}^2,$$

so ist

$$(8) \quad Hf = (ad - bc)^2 \cdot H'f.$$

Im folgenden wird f häufig eine (homogene) Form n -ten Grades sein; dann ist Hf eine Form des Grades $2n - 4$.

10. f sei eine Form, die durch $(ax + by)^n$ teilbar ist; dann ist Hf durch $(ax + by)^{2n-2}$ teilbar.

Beweis. In dem Spezialfall $ax + by = x$, also $f(x, y) = x^n \cdot g(x, y)$, bestätigt man die Richtigkeit der Behauptung durch eine kleine Rechnung. Der allgemeine Fall wird unter Benutzung der Kovarianz von Hf auf diesen Spezialfall zurückgeführt, indem man durch eine lineare Transformation neue Veränderliche x', y' mit $x' = ax + by$ einführt.

Korollar. Jeder mehrfache Linearfaktor von f ist zugleich mehrfacher Faktor von Hf .

11. f sei eine Form n -ten Grades. Behauptung: Dann und nur dann ist $Hf \equiv 0$, wenn $f = (ax + by)^n$ ist.¹⁴⁾

Beweis. Ist $f = (ax + by)^n$, so ist Hf nach Nr. 10 durch $(ax + by)^{2n-2}$ teilbar; da Hf eine Form des Grades $2n - 4$ ist, ist dies nur möglich, wenn $Hf \equiv 0$ ist.

Es sei andererseits die Form $f(x, y)$ nicht von der Gestalt $(ax + by)^n$, f enthalte also zwei Linearfaktoren $ax + by$ und $cx + dy$, die voneinander verschieden sind, d. h. für die $ad - bc \neq 0$ ist, und es sei $f \neq 0$; es soll gezeigt werden, daß $Hf \neq 0$ ist. Da man neue Veränderliche $x' = ax + by$,

¹⁴⁾ Satz von Hesse; Beweis z. B. bei Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie 2 (1887), S. 59.

$y' = cx + dy$ einführen kann, braucht man infolge der Kovarianz von Hf nur den Spezialfall zu behandeln, in dem f die Linearfaktoren x und y enthält. Ordnet man $f(x, y)$ nach fallenden Potenzen von x und ist dabei $ax^r y^{n-r}$ das erste Glied mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten, so folgt aus der Teilbarkeit von f durch xy , daß $1 \leq r \leq n-1$ ist. Bei Benutzung dieser Tatsache ergibt eine kleine Rechnung: in Hf hat das Potenzprodukt $x^{2r-2} y^{2n-2r-2}$ den Koeffizienten $-r(n-r)(n-1) \cdot a^2$; er ist nicht 0, also ist $Hf \neq 0$.

Bemerkung. In diesem Satz und Beweis sind unter a, b, c, d komplexe Zahlen zu verstehen. Für reelle Formen f ergibt sich aber unmittelbar der folgende Zusatz: Ist f eine reelle Form und $Hf \equiv 0$, so ist $f = \pm (ax + by)^n$ mit reellen a, b .

12. $f(x, y)$ sei eine analytische Funktion und $\neq 0$; die Taylorschen Reihen für f und Hf seien

$$(9) \quad f(x, y) = f^{(m)}(x, y) + f^{(m+1)}(x, y) + \dots, \quad f^{(m)}(x, y) \neq 0, \quad m \geq 2,$$

$$(10^0) \quad Hf = \sum_{i=0}^{\infty} h^{(i)}(x, y),$$

worin die $f^{(i)}$ und $h^{(i)}$ Formen i -ten Grades bezeichnen. Ist $Hf \neq 0$, so läßt sich (10⁰) so schreiben:

$$(10) \quad Hf = h^{(k)}(x, y) + h^{(k+1)}(x, y) + \dots, \quad h^{(k)}(x, y) \neq 0, \quad k \neq 0;$$

ist $Hf \equiv 0$, so setzen wir $k = \infty$.

Der Vergleich von (9) und (10⁰) ergibt für jedes n :

$$(11) \quad \begin{aligned} h^{(n)} &= \sum_{i+j=n+4} (f_{xx}^{(i)} f_{yy}^{(j)} - f_{xy}^{(i)} f_{xy}^{(j)}) \\ &= \sum_{i=m}^{n+4-m} (f_{xx}^{(i)} f_{yy}^{(n+4-i)} - f_{xy}^{(i)} f_{xy}^{(n+4-i)}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist also

$$\begin{aligned} h^{(n)} &\equiv 0 \quad \text{für} \quad n+4-m < m, \quad \text{d. h.} \quad n < 2m-4, \\ h^{(2m-4)} &= Hf^{(m)}. \end{aligned}$$

Demnach ist immer $k \geq 2m-4$, und zwar liegt immer einer der folgenden beiden Fälle vor:

$$\text{Fall I: } Hf^{(m)} \neq 0, \quad Hf^{(m)} = h^{(k)}, \quad k = 2m-4;$$

$$\text{Fall II: } Hf^{(m)} \equiv 0, \quad k > 2m-4.$$

Ist $Hf \equiv 0$, so befindet man sich immer im Falle II.

Aus Nr. 11 folgt: Der Fall II liegt dann und nur dann vor, wenn $f^{(m)} = (ax + by)^m$ ist.

13. Die folgenden Bemerkungen über die Wirkung einer Transformation (7) der Veränderlichen werden wir benutzen:

(a) Jede Form $f^{(r)}$ in der Reihe (9) geht gerade in die Form aller Glieder r -ten Grades über, die in der Reihenentwicklung von f nach x', y' auftreten. Dies ist selbstverständlich.

(b) Aus (8) folgt, daß das Analoge für die Reihe (10) gilt: Jede Form $h^{(n)}$ geht, wenn man x, y durch x', y' ausdrückt, bis auf den positiven Faktor $(ad - bc)^2$ gerade in die Form aller Glieder n -ten Grades über, die in der Reihenentwicklung von $H'f$ nach x', y' auftreten. Insbesondere beginnt die Entwicklung von $H'f$ ebenfalls mit einer Form k -ten Grades.

(c) Die Unterscheidung der Fälle I und II ist invariant bei einer Transformation (7). Dies ist aus der Charakterisierung des Falles II am Schlusse von Nr. 12 unmittelbar ersichtlich.

(d) Im Falle II, in dem $f = (ax + by)^m$ ist, können wir neue Variable x', y' so einführen, daß $x' = ax + by$ wird; schreiben wir dann wieder x, y statt x', y' , so ist $f^{(m)} = x^m$. Die Formel (11) bekommt dann die folgende Gestalt:

$$(12) \quad h^{(n)} = m(m-1)x^{m-2} \frac{f^{(n+4-m)}}{yy} + \sum_{i=m+1}^{n+3-m} (f_{xx}^{(i)} \frac{f^{(n+4-i)}}{yy} - f_{xy}^{(i)} \frac{f^{(n+4-i)}}{xy}).$$

14. Im Falle II sind die Formen $f^{(r)}$ für $r < k + 4 - m$ durch $f^{(m)}$ teilbar.

Beweis. Auf Grund der Bemerkungen (a), (c) und (d) in Nr. 13 dürfen wir für den Beweis unseres Satzes annehmen, daß $f^{(m)} = x^m$ ist und (12) gilt.

Die Behauptung, daß die $f^{(r)}$ für $r = m, m+1, \dots, k+3-m$ durch x^m teilbar sind, beweisen wir durch vollständige Induktion. Sie ist richtig für $r = m$; ein r mit $m < r < k+4-m$ sei vorgelegt, und die Behauptung sei schon für die $f^{(r')}$ mit $r' = m, m+1, \dots, r-1$ bewiesen.

Wir setzen in (12) $n = r + m - 4$; da $r < k + 4 - m$ ist, ist $n < k$, also $h^{(n)} \equiv 0$; ferner sind alle $f^{(i)}$ und $f^{(n+4-i)}$, die in (12) unter dem Summenzeichen auftreten, nach Induktionsvoraussetzung durch x^m teilbar, und die Summe ist daher durch x^{2m-2} teilbar. Somit folgt aus (12):

$$x^{m-2} \cdot \frac{f^{(r)}}{yy} + x^{2m-2} \cdot F(x, y) = 0,$$

also

$$\frac{f^{(r)}}{yy} = -x^m \cdot F(x, y)$$

und daher

$$f^{(r)} = P + Q \cdot y + x^m \cdot G(x, y),$$

worin P und Q Funktionen von x sind; und zwar ist, da $f^{(r)}$ eine Form r -ten Grades ist, $P = px^r$, $Q = qx^{r-1}y$ mit Konstanten p, q ; also:

$$f^{(r)} = px^r + qx^{r-1}y + x^m G(x, y).$$

Da $r \geq m+1$ ist, ist somit $f^{(r)}$ durch x^m teilbar.

Bemerkung. Satz und Beweis gelten auch für $Hf \equiv 0$, also $k = \infty$: dann sind alle $f^{(r)}$ durch $f^{(m)}$ teilbar.

15. Die nachstehende Folgerung aus dem soeben bewiesenen Satze wird später benutzt werden:

Es liege Fall II vor, f sei reell, und es sei $r \leq \frac{k+4}{2}$; dann enthält die Form $f^{(r)}$ einen mehrfachen reellen Linearfaktor.

Beweis. Nach Nr. 12 ist, da Fall II vorliegt, $m < \frac{k+4}{2}$, also $\frac{k+4}{2} < k+4-m$, also $r < k+4-m$, also $f^{(r)}$ nach Nr. 14 durch $f^{(m)}$ teilbar. Nach Nr. 11 (Bemerkung) ist $f^{(m)} = \pm (ax+by)^m$ mit reellen a, b . Da in (9) immer $m \geq 2$ vorausgesetzt ist, ist $f^{(r)}$ durch $(ax+by)^2$ teilbar.

16. *Es liege Fall II vor, es sei also $f^{(m)} = (ax+by)^m$; dann ist die Form $h^{(k)}$ durch $(ax+by)^{m-2}$ teilbar.*

Beweis. Auf Grund der Bemerkungen in Nr. 13 dürfen wir für den Beweis unserer Behauptung annehmen, daß $f^{(m)} = x^m$ ist, daß also (12) gilt. Wir setzen in (12) $n = k$; dann treten unter dem Summenzeichen nur solche $f^{(i)}$ und $f^{(n+4-i)}$ auf, deren Grade $< k+4-m$ sind, also solche, die nach Nr. 14 durch x^m teilbar sind; daher ist diese Summe durch x^{2m-2} , also erst recht durch x^{m-2} teilbar; folglich ist nach (12) auch $h^{(k)}$ durch x^{m-2} teilbar.

Korollar. *Es liege Fall II vor, f sei reell, und die Form $h^{(k)}$ sei definit; dann ist $m = 2$.*

Denn es ist $f^{(m)} = \pm (ax+by)^m$ mit reellen a, b ; wäre $m \geq 3$, so wäre nach dem soeben bewiesenen Satze $h^{(k)}$ durch $ax+by$ teilbar, also nicht definit.

§ 2.

Isometrische Flächen.

17. Auf einer Fläche F seien u, v reguläre Parameter; der Punkt mit $u = v = 0$ heiße o . Die Gaußsche Krümmung K besitzt, falls sie nicht identisch 0 ist, in der Umgebung von o eine Taylorsche Entwicklung

$$K(u, v) = K^{(x)}(u, v) + K^{(x+1)}(u, v) + \dots, \quad K^{(x)}(u, v) \neq 0,$$

worin die $K^{(i)}$ Formen i -ten Grades sind; ist $K \equiv 0$, so setzen wir $x = \infty$; bis auf weiteres sei $K \neq 0$.

Führen wir durch eine reguläre Transformation

$$\begin{aligned} u &= u(\bar{u}, \bar{v}) = \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} + \dots, \\ v &= v(\bar{u}, \bar{v}) = \gamma \bar{u} + \delta \bar{v} + \dots, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \end{aligned}$$

neue Parameter \bar{u}, \bar{v} ein und entwickeln dann K nach \bar{u}, \bar{v} , so beginnt diese Reihe offenbar mit der Form

$$\bar{K}^{(x)}(\bar{u}, \bar{v}) = K^{(x)}(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}, \gamma \bar{u} + \delta \bar{v}).$$

Die Anfangsformen $K^{(\alpha)}$ und $\bar{K}^{(\alpha)}$ in den Entwicklungen von K nach u, v bzw. \bar{u}, \bar{v} stellen also zwar nicht dieselbe Funktion des Ortes auf der Fläche dar, jedoch gehen sie durch eine reelle lineare Transformation der Variablen ineinander über; wir sagen hierfür: sie sind „linear verwandt“, und wir schreiben gelegentlich: $\bar{K}^{(\alpha)} \sim K^{(\alpha)}$.

Alle Flächen, die mit F isometrisch sind, besitzen dieselbe Krümmung; daher sieht man: *Zu jeder Klasse untereinander isometrischer Flächen gehört dieselbe Form $K^{(\alpha)}$, die bis auf lineare Verwandtschaft bestimmt ist.*

Diejenigen Eigenschaften von $K^{(\alpha)}$, die bei reeller linearer Transformation der Variablen ungeändert bleiben, sind mithin Invarianten der Isometrien. Zu diesen Eigenschaften gehört erstens der Grad α ; dann und nur dann ist $\alpha = 0$, wenn $K \neq 0$ in σ ist. Eine zweite Invariante, die nachher eine Rolle spielen wird, ist die folgende Zahl q : die Form $K^{(\alpha)}$ enthalte einen q -fachen, aber keinen $(q+1)$ -fachen reellen Linearfaktor; dann und nur dann ist $q = 0$, wenn die Form $K^{(\alpha)}$ definit ist.

18. Wir machen den Punkt σ der Fläche F zum Nullpunkt der (xyz) -Koordinaten im Raume und seine Tangentialebene zur (xy) -Ebene; dann läßt sich F durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ darstellen, wobei die Funktion f eine Taylorsche Entwicklung

$$(9) \quad f(x, y) = f^{(m)}(x, y) + f^{(m+1)}(x, y) + \dots, \quad f^{(m)}(x, y) \neq 0, \quad m \geq 2,$$

besitzt. Die Krümmung K ist bekanntlich durch

$$K = Hf \cdot \frac{1}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

gegeben. Daraus folgt: das Anfangsglied $h^{(k)}$ in der Entwicklung

$$(10) \quad Hf = h^{(k)}(x, y) + h^{(k+1)}(x, y) + \dots, \quad h^{(k)}(x, y) \neq 0,$$

ist zugleich das Anfangsglied in der Entwicklung von K nach x, y ; es ist also

$$(13) \quad h^{(k)} \sim K^{(\alpha)}, \quad k = \alpha.$$

Da nun die Form $K^{(\alpha)}$ bis auf lineare Verwandtschaft allen mit F isometrischen Flächen gemeinsam ist, so erkennt man: *Betrachtet man eine ganze Klasse \mathfrak{F} untereinander isometrischer Flächen, so gehören zu diesen Flächen zwar ganz verschiedene Entwicklungen (9); jedoch sind die Anfangsglieder $h^{(k)}$ der aus diesen Reihen (9) gebildeten Reihen (10) untereinander linear verwandt.*

Insbesondere ist die durch (10) bestimmte Zahl $k = \alpha$ allen Flächen aus \mathfrak{F} gemeinsam; dagegen gehören zu verschiedenen Flächen aus \mathfrak{F} im allgemeinen verschiedene Zahlen m in (9). Aus Nr. 12 folgt:

1. Für jede Fläche aus \mathfrak{F} ist die Zahl $m \leq \frac{\alpha+4}{2}$. Die Berührungsordnung $b = m - 1$ (Nr. 4) ist also durch die innere Differentialgeometrie einer Fläche nach oben beschränkt.

2. Entsprechend der Unterscheidung der Fälle I und II in Nr. 12 sind in der Klasse \mathfrak{F} zwei Typen von Flächen zu unterscheiden:

$$\text{Typus I: } m = \frac{\kappa + 4}{2}, \quad H f^{(m)} \neq 0, \quad H f^{(m)} = h^{(k)} \sim K^{(s)};$$

$$\text{Typus II: } m < \frac{\kappa + 4}{2}, \quad H f^{(m)} \equiv 0.$$

Wir haben bisher angenommen, daß $K \neq 0$, also auch $Hf \neq 0$ sei, daß also die Zahlen κ und k definiert sind; jetzt setzen wir, in Analogie mit Nr. 12, fest: ist $K \equiv 0$, $Hf \equiv 0$, so sei $\kappa = k = \infty$; alle Flächen mit $K \equiv 0$, also alle Torsen, haben den Typus II; ausschließen wollen wir lediglich die Ebenen, also den Fall, in dem $f(x, y) \equiv 0$ ist.

Wenn $\kappa = 0$, also $K \neq 0$ in o ist, so gibt es keine Fläche vom Typus II. Der interessante Fall ist: $0 < \kappa < \infty$; dann kann es Flächen beider Typen geben; und zwar folgt aus dem Existenzsatz (Nr. 3) leicht, daß es immer Flächen vom Typus II, und zwar solche mit $m = 2$, gibt; dagegen brauchen Flächen vom Typus I in der Klasse \mathfrak{F} nicht zu existieren: so existiert gewiß keine solche Fläche, wenn κ ungerade ist, und überhaupt überlegt man sich leicht, daß bei gegebener Form $K^{(s)}$ die Gleichung $H f^{(m)} = K^{(s)}$ nur in Ausnahmefällen durch eine Form $f^{(m)}$ befriedigt werden kann; diese Bemerkungen spielen übrigens für das folgende keine Rolle.

Eine Fläche vom Typus I hat, für $\kappa > 0$, in o immer einen Flachpunkt.

Aus Nr. 15 ergibt sich: Für jedes $r \leq \frac{\kappa + 4}{2}$ und für jede Fläche des Typus II ist die Form $f^{(r)}$ durch das Quadrat einer reellen Linearform teilbar.

19. Wir wollen jetzt „stetige Verbiegungen“ betrachten und müssen diesen Begriff zunächst präzisieren.

In einer Umgebung U des Punktes $u = v = 0$ der (uv) -Ebene sei für jeden Wert von t mit $0 \leq t \leq 1$ ein Vektor $\mathbf{x}(u, v; t)$ gegeben, der eine analytische Fläche F_t mit den Parametern u, v darstellt¹⁾; die Abbildung, welche für je zwei Werte t_1, t_2 durch u, v zwischen F_{t_1}, F_{t_2} vermittelt wird, sei eine Isometrie. Die noch ausstehende Festsetzung für die stetige Abhängigkeit vom Parameter t kann auf viele verschiedene Weisen getroffen werden, von denen hier die folgenden \mathfrak{A}_n und \mathfrak{B}_n , $0 \leq n \leq \infty$, eine Rolle spielen¹⁵⁾.

(\mathfrak{A}_n). Für $(u, v) \in U$ und $0 \leq t \leq 1$ sind sowohl $\mathbf{x}(u, v; t)$ als auch alle partiellen Ableitungen von \mathbf{x} nach u, v bis zur n -ten Ordnung stetige Funktionen von u, v, t .

¹⁵⁾ Unter den sonst noch möglichen Festsetzungen verdienen z. B. diejenigen Erwähnung, bei welchen Differenzierbarkeit nach t verlangt wird.

(\mathfrak{B}_n). Sowohl $\mathbf{x}(0, 0; t)$ als auch alle partiellen Ableitungen von \mathbf{x} nach u, v bis zur n -ten Ordnung an der Stelle $u = v = 0$ sind stetige Funktionen von t .

Unter $\mathfrak{A}_\infty, \mathfrak{B}_\infty$ sind die entsprechenden Bedingungen zu verstehen, die sich auf *alle* Ableitungen beziehen. Je nachdem, welche Definition zugrunde gelegt wird, sprechen wir von einer \mathfrak{A}_n -Verbiegung bzw. \mathfrak{B}_n -Verbiegung.

Alle in dieser Arbeit formulierten Sätze gelten jedenfalls für die \mathfrak{A}_∞ -Verbiegungen, also für den speziellsten unter den hier genannten Begriffen. Für die Sätze L_1, L_2, L'_1 (Nr. 2), sowie für die in Nr. 5 bewiesene Existenz nicht-trivialer labiler Punkte, also für diejenigen Sätze, in denen die *Möglichkeit* einer Verbiegung behauptet wird, bedeutet dies, daß sie in einem besonders scharfen Sinne gelten¹⁶⁾. Alle übrigen Sätze — also lauter Sätze, in denen die *Unmöglichkeit* gewisser Verbiegungen behauptet wird — haben aber allgemeinere Gültigkeit; sie gelten nämlich bereits bei Zugrundelegung schwächerer Bedingungen als \mathfrak{A}_∞ . Am wenigsten braucht für den Levischen Satz über positiv gekrümmte Flächen und ihre Spiegelbilder (Nr. 2, Fußnote 5)) und für den Satz III (Nr. 8) vorausgesetzt zu werden: die Beweise dieser Sätze gelten für die \mathfrak{B}_2 -Verbiegungen¹⁷⁾. Der Satz S (Nr. 2, Nr. 3) ist für die \mathfrak{A}_2 -Verbiegungen bewiesen¹⁸⁾, also für denjenigen Verbiegungsbegriff, der den üblichen Begriffen und Fragestellungen der Flächentheorie wohl am besten angepaßt ist. Die Sätze I und II (Nr. 6, Nr. 7) werden wir für die \mathfrak{B}_∞ -Verbiegungen beweisen¹⁹⁾.

Von jetzt an soll also der Begriff der „stetigen Verbiegung“ auf Grund von \mathfrak{B}_∞ erklärt sein; diese Voraussetzung läßt sich auch so aussprechen:

Die Koeffizienten $\alpha_{rs}(t)$ in den Taylorschen Reihen

$$(14) \quad \mathbf{x}(u, v; t) = \sum_{r,s} \alpha_{rs}(t) u^r v^s$$

sind stetige Funktionen von t .

20. Die Flächen F_t lassen sich folgendermaßen in eine spezielle Lage bringen. Für jedes t sei B_t diejenige — eindeutig bestimmte — eigentliche Bewegung, welche den Punkt $u = v = 0$ der Fläche F_t und die Richtungen

¹⁶⁾ In diesen Sätzen hängt die Schar $\{F_t\}$ sogar analytisch von t ab.

¹⁷⁾ Außerdem kann man die Voraussetzung, daß zwischen den Flächen F Isometrien bestehen, durch die viel schwächere ersetzen, daß in dem betrachteten Punkt $u = v = 0$ immer $K > 0$ bzw. $K = 0$ bleibt.

¹⁸⁾ Außerdem kann man die vorausgesetzten Isometrien durch Abbildungen ersetzen, bei welchen in dem Gebiet U lediglich das Vorzeichen der Krümmung ungeändert bleibt.

¹⁹⁾ In diesen Sätzen darf man überdies den Begriff der „Isometrie“ durch den allgemeineren der „krümmungstreuen Abbildung“ ersetzen.

der Tangentialvektoren $\mathbf{x}_u(0, 0; t)$, $\mathbf{x}_v(0, 0; t)$ mit dem entsprechenden Punkt und den entsprechenden Richtungen auf F_0 zur Deckung bringt. Dadurch, daß wir die Flächen F_t durch die Flächen $B_t(F_t)$ ersetzen, wird an unseren Voraussetzungen nichts geändert; daher dürfen wir von vornherein annehmen, daß alle Flächen F_t den Punkt o und seine Tangentialebene gemeinsam haben. Wir dürfen weiter annehmen, daß o der Nullpunkt der (xyz) -Koordinaten und seine Tangentialebene die (xy) -Ebene ist.

Jede Fläche F_t besitzt daher eine Darstellung $z = f(x, y; t)$ mit

$$(9_t) \quad f(x, y; t) = f^{(m)}(x, y; t) + \dots, \quad f^{(m)}(x, y; t) \neq 0^{20),} \quad m_t \geq 2.$$

Hierin sind x, y die ersten beiden Komponenten des Vektors \mathbf{x} , der die Entwicklung (14) besitzt; die Koeffizienten der Reihe (9_t) sind folgendermaßen aus denen der Reihe (14) zu berechnen: Die in (14) zusammengefaßten Entwicklungen für die Komponenten von \mathbf{x} bezeichnen wir mit (14_x) , (14_y) , (14_z) . Da die Vektoren $\mathbf{x}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\mathbf{x}_v = (x_v, y_v, z_v)$ infolge der Regularität der Flächen an der Stelle o linear unabhängig sind, dort aber $z_u = z_v = 0$ ist, ist in o die Funktionaldeterminante $D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$; folglich lassen sich u, v in Potenzreihen nach x, y entwickeln, deren Koeffizienten rationale Ausdrücke der Koeffizienten von (14_x) und (14_y) sind, wobei als Nenner nur Potenzen von D auftreten; setzt man diese Reihen für u, v in (14_z) ein, so entsteht (9_t). Hieraus sieht man: Die Koeffizienten von (9_t) sind stetige Funktionen der Koeffizienten von (14); aus der Voraussetzung \mathfrak{B}_∞ , die am Schluß von Nr. 19 formuliert worden ist, ergibt sich daher: *Die Koeffizienten der Reihen (9_t) sind stetige Funktionen von t .*

Hiervon werden wir nur zwei Konsequenzen α und β benutzen, deren Beweise wir wohl übergehen dürfen:

(α). Für einen Wert t^* sei $f^{(n)}(x, y; t^*) \neq 0$; dann ist $f^{(n)}(x, y; t) \neq 0$ für eine ganze Umgebung von t^* .²⁰⁾

(β). Für einen Wert t^* habe $f^{(n)}(x, y; t^*)$ keinen mehrfachen reellen Linearfaktor; dann hat $f^{(n)}(x, y; t)$ für eine ganze Umgebung von t^* keinen mehrfachen reellen Linearfaktor.

21. Beweis des Satzes I (Nr. 6). Die Berührungsordnung b im Punkte o der Fläche $F = F_0$ lasse sich durch stetige Verbiegung ändern; es wird behauptet, daß $H^{f^{(m_0)}}(x, y; 0)$ durch das Quadrat einer reellen Linearform teilbar ist. Dies ist trivial, falls $H^{f^{(m_0)}}(x, y; 0) \equiv 0$, d. h. falls F_0 vom Typus II ist (Nr. 18); es sei also F_0 vom Typus I.

²⁰⁾ „ $f^{(n)}(x, y; t) \neq 0$ “ bedeutet hier und im folgenden natürlich: „bei festem t nicht identisch 0 in x, y “.

Dann ist, in der Bezeichnungsweise aus Nr. 18,

$$(15) \quad m_0 = \frac{\kappa + 4}{2}, \quad H f^{(m_0)}(x, y; 0) \sim K^{(\kappa)}.$$

Für jede mit F_0 isometrische Fläche ist $m \leq \frac{\kappa + 4}{2} = m_0$; da sich $b = m_0 - 1$ durch stetige Biegung ändern läßt, läßt sich somit F_0 stetig in eine Fläche F_1 verbiegen, für welche $m_1 < \frac{\kappa + 4}{2}$ ist, welche also den Typus II hat. Diese stetige Verbiegung werde durch die Schar $\{F_t\}$, $0 \leq t \leq 1$ dargestellt; es gibt einen Wert t^* , der Häufungsstelle sowohl von t -Werten ist, zu denen Flächen des Typus I gehören, als auch von t -Werten, zu denen Flächen des Typus II gehören.

Die Fläche F_{t^*} hat den Typus I; denn andernfalls wäre $m_{t^*} < \frac{\kappa + 4}{2}$, $f^{(m_{t^*})}(x, y; t^*) \neq 0$, also nach Nr. 20, α , auch $f^{(m_{t^*})}(x, y; t) \neq 0$ für eine ganze Umgebung von t^* , also wären alle zu dieser Umgebung gehörigen Flächen F_t vom Typus II — entgegen der Definition von t^* . Da F_{t^*} somit den Typus I hat, ist

$$(15^*) \quad m_{t^*} = \frac{\kappa + 4}{2} = m_0, \quad H f^{(m_{t^*})}(x, y; t^*) \sim K^{(\kappa)}.$$

Für jede Fläche F_t des Typus II ist, wie am Schluß von Nr. 18 festgestellt wurde, die Form $f^{(m_0)}(x, y; t)$ durch das Quadrat einer reellen Linearform teilbar. Daraus folgt, daß auch die Form $f^{(m_0)}(x, y; t^*)$ dieselbe Eigenschaft hat; denn andernfalls würden nach Nr. 20, β , alle $f^{(m_0)}(x, y; t)$ für eine ganze Umgebung von t^* höchstens einfache reelle Linearfaktoren enthalten, also alle zu dieser Umgebung gehörigen Flächen F_t den Typus I haben — entgegen der Definition von t^* .

Somit hat die Form $f^{(m_0)}(x, y; t^*)$ die Eigenschaft, durch das Quadrat einer reellen Linearform teilbar zu sein. Dieselbe Eigenschaft hat dann nach dem Korollar in Nr. 10 auch die Form $H f^{(m_0)}(x, y; t^*)$, also nach (15*) auch die Form $K^{(\kappa)}$ und nach (15) auch die Form $H f^{(m_0)}(x, y; 0)$ — w. z. b. w.

22. Beweis des Satzes II (Nr. 7). (a) Aus $\kappa = 1$ und aus

$$(16) \quad 2 \leq m \leq \frac{\kappa + 4}{2} \quad (\text{Nr. 18})$$

folgt $m = 2$, $b = 1$. Unter der Voraussetzung (a) gibt es also nur Flächen vom Typus II²¹⁾, und der Punkt o ist auf allen von ihnen parabolisch; die Berührungsordnung $b = 1$ ist also invariant bei allen Isometrien.

(b) Aus $\kappa = 2$ und (16) folgt $m = 2$, $b = 1$ für alle Flächen des Typus II; für die Flächen des Typus I ist $m = 3$, $b = 2$. Für eine Fläche des Typus I ist $H f^{(3)} \sim K^{(3)}$, und $K^{(3)}$ hat nach Voraussetzung (b) keinen mehrfachen

²¹⁾ Dies gilt offenbar immer, wenn κ ungerade ist.

Linearfaktor; daher ist für eine solche Fläche die Bedingung aus Satz I nicht erfüllt, und sie läßt sich daher nicht stetig in eine Fläche des Typus II verbiegen. Unter der Voraussetzung (b) bleibt somit bei stetiger Verbiegung der Typus der Fläche und daher auch die Berührungsordnung $b = 1$ bzw. $b = 2$ ungeändert.

(c) Da $K^{(x)}$ definit ist, folgt aus dem Korollar in Nr. 16, daß für jede Fläche des Typus II $m = 2$, $b = 1$ ist; für die Flächen des Typus I ist $m = \frac{x+4}{2}$. Aus der Definitheit von $K^{(x)}$ folgt weiter, daß für die Flächen des Typus I die Bedingung aus Satz I nicht erfüllt ist. Flächen verschiedener Typen lassen sich daher nicht ineinander verbiegen, und daher bleiben auch die Berührungsordnungen $b = 1$ bzw. $b = \frac{x+2}{2}$ bei stetigen Verbiegungen ungeändert.

(Eingegangen am 14. 6. 1938.)

Das allgemeine Perron-Stieltjessche Integral [(PS)-Integration II].

Von

J. Ridder in Groningen (Niederlande).

Die folgenden Seiten bilden die Fortsetzung einer in der Math. Zeitschr. **43** (1938), S. 637—681 erschienenen Arbeit, hier immer zitiert als „(PS)-Int. I“, in welcher wir u. a. ein spezielles Perron-Stieltjessches (und ein damit äquivalentes, spezielles Denjoy-Stieltjessches) Integrationsverfahren behandelten „in bezug auf“ eine Funktion $\alpha(x)$, welche im betrachteten Intervall (a, b) endlich und BVV^* ¹⁾ ist. Das zugehörige unbestimmte $\alpha(x)$ -Integral $S_{\alpha(x)}(x)$ hat die Eigenschaft, daß (a, b) sich, ausgenommen die Punkte einer abzählbaren Menge, überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen (Q_k) derart, daß auf jedem Q_k die Funktion $\alpha(x)$ BV^* und $S_{\alpha(x)}(x)$ totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ ²⁾ ist. Das bringt schon die Vermutung nahe (und die l. c. ausgeführten näheren Untersuchungen bestätigen es), daß diese Denjoy-Stieltjesschen und Perron-Stieltjesschen Integrationen für $\alpha(x) \equiv x$ in die spezielle Denjoysche Integration bzw. in die mit dieser äquivalente Perronsche Integration übergehen.

Die allgemeine Denjoysche Integration und eine mit ihr äquivalente, „verallgemeinerte“ Perronsche Integration³⁾ hat die Eigenschaft, daß das

¹⁾ D. h. (a, b) läßt sich, bis auf eine abzählbare Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) , auf deren jeder $\alpha(x)$ von beschränkter Variation* (abgekürzt: BV^*) ist. Dabei ist $\alpha(x)$ von beschränkter Variation* auf einer Teilmenge E von (a, b) , wenn sich eine positive Zahl N finden läßt derart, daß für jedes System von nicht-übereinandergreifenden Intervallen (a_k, b_k) , deren Endpunkte zu E gehören,

$$\sum_{(k)} \Omega_k \leq N$$

ist; hierbei bedeutet Ω_k die Oszillation von $\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a_k, b_k) .

²⁾ D. h. die Summen von Funktionsdifferenzen

$$\sum_{(j)} \{S_{\alpha}(b_j^{(k)}) - S_{\alpha}(a_j^{(k)})\} \quad \text{und} \quad \sum_{(j)} \{S_{\alpha}(c_j^{(k)}) - S_{\alpha}(a_j^{(k)})\},$$

wobei $a_j^{(k)} \leq c_j^{(k)} \leq b_j^{(k)}$ ist und die Paare $\{a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\}$ zu Q_k gehörende Endpunkte von endlich vielen, nicht-übereinandergreifenden Intervallen sind, haben (bei willkürlichem, aber festem k) einen Limes = 0, sobald die Summe $\sum_{(j)} \omega_{\alpha}(a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$ gegen Null konvergiert; hierbei deutet $\omega_{\alpha}(a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$ die Oszillation von $\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall $(a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$ an. — Auch $S_{\alpha(x)}(x)$ ist dadurch BVV^* in (a, b) .

³⁾ Siehe Ridder, Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 234—269, insbesondere S. 258—269.

Integrationsintervall sich für jedes zugehörige unbestimmte Integral $S(x)$, die Punkte einer abzählbaren Teilmenge ausgenommen, überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen (R_k) , auf deren jeder $S(x)$ totalstetig ist⁴⁾. Man kommt dadurch zu der Frage, ob es möglich sei, in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, welche im betrachteten Intervall (a, b) endlich und BVV⁵⁾ ist, ein unbestimmtes Perron-Stieltjessches Integral zu definieren, das in (a, b) in bezug auf $\alpha(x)$ Totalstetigkeitseigenschaften von analoger Art hat wie diejenigen des verallgemeinerten Perronschen Integrals (in bezug auf die Funktion $\alpha(x) = x$). Im folgenden wird diese Frage in positivem Sinne beantwortet (siehe insbesondere Satz 12 und die darauf folgende Bemerkung).

Es zeigt sich daneben, daß auch die übrigen Eigenschaften des neu-eingeführten Integrals in weitgehender Weise mit denen des verallgemeinerten Perronschen Integrals übereinstimmen (siehe insbesondere Satz 16); für $\alpha(x) \equiv x$ fallen beide Integralbegriffe zusammen.

I. Das allgemeine Perron-Stieltjessche Integral in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, welche in (a, b) stetig und BVV ist.

§ 1.

Da sich die Definitionen und Sätze am einfachsten bei einer stetigen Bezugsfunktion formulieren lassen, fangen wir mit diesem Fall an.

Definition 1. E sei eine Teilmenge des abgeschlossenen Intervalls (a, b) . Eine in den Punkten von (a, b) definierte Funktion $F(x)$ heiße von beschränkter Variation (abgekürzt BV) auf E , wenn sich eine positive Zahl N finden läßt derart, daß für jedes System von nicht-übereinandergreifenden, abgeschlossenen Intervallen (a_k, b_k) , deren Endpunkte zu E gehören,

$$\sum_{(k)} \Omega_k \leq N$$

ist; hierbei bedeutet Ω_k die Oszillation von $F(x)$ auf $E \cdot (a_k, b_k)$.

Definition 2. Eine für $a \leq x \leq b$ definierte Funktion $F(x)$ ist in (a, b) von beschränkter Variation im verallgemeinerten Sinne (abgekürzt: BVV), wenn (a, b) sich, bis auf eine abzählbare Menge, überdecken läßt durch

⁴⁾ D. h. die Summe von Funktionsdifferenzen

$$\sum_{(j)} \{S(b_j^{(k)}) - S(a_j^{(k)})\},$$

wobei die Paare $\{a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\}$, mit $a_j^{(k)} < b_j^{(k)}$, zu R_k gehörende Endpunkte von endlich vielen, nicht-übereinandergreifenden Intervallen sind, hat (bei willkürlichem, aber festem k) einen Limes $= 0$, sobald die Summe $\sum_{(j)} (b_j^{(k)} - a_j^{(k)})$ gegen Null konvergiert. — $S(x)$ ist dadurch auch BVV in (a, b) (Definition 2).

⁵⁾ Siehe Definition 2.

abzählbar viele perfekte Mengen (M_n), auf deren jeder $F(x)$ von beschränkter Variation ist.

Definition A_1 . $f(x)$ sei endlich und $\alpha(x)$ stetig und BVV im abgeschlossenen Intervall (a, b) . Dann soll eine in (a, b) stetige Funktion eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$ -Majorante $\psi_a^{(3)}(x)$ heißen, wenn: I. $\psi_a^{(3)}(a) = 0$ ist; II. (a, b) sich, bis auf eine abzählbare Teilmenge, überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) derart, daß $\alpha(x)$ BV ist auf jeder Menge P_k und daß auf P_k immer gilt: 1. zu jedem Punkte ξ von P_k , abzählbar viele ausgenommen, gehört ein positives $h(\xi)$ mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkte von $P_k \cdot [\xi - h(\xi), \xi + h(\xi)]$ mit $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ gilt

$$\psi_a^{(3)}(x) \geq \psi_a^{(3)}(\xi) \quad \text{oder} \quad \leq \psi_a^{(3)}(\xi), \quad \text{je nachdem } x \geq \xi \text{ oder } \leq \xi \text{ ist;}$$

2. in jedem Punkte x von P_k , wieder mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen, sind

$$\underline{D}_{\alpha(x); r_1}^{(P_k)} \psi_a^{(3)}(x) \quad \text{und} \quad \underline{D}_{\alpha(x); l_1}^{(P_k)} \psi_a^{(3)}(x) \geq f(x),$$

daneben

$$\bar{D}_{\alpha(x); r_2}^{(P_k)} \psi_a^{(3)}(x) \quad \text{und} \quad \bar{D}_{\alpha(x); l_2}^{(P_k)} \psi_a^{(3)}(x) \leq f(x),$$

soweit in dem Punkte x diese extremen $\alpha(x)$ -Derivierten⁶⁾ existieren⁷⁾.

⁶⁾ Die beiden unteren Derivierten sind unterer Grenzwert von

$$\frac{\psi_a^{(3)}(x) - \psi_a^{(3)}(\xi)}{\alpha(x) - \alpha(\xi)}$$

für alle nach x konvergierenden Punkte (ξ) von P_k mit $\xi > x$ und $\alpha(\xi) > \alpha(x)$, bzw. mit $\xi < x$ und $\alpha(\xi) < \alpha(x)$; die beiden oberen Derivierten sind oberer Grenzwert dieses Bruches in x mit $\xi \in P_k$ und $> x$, $\alpha(\xi) < \alpha(x)$ bzw. mit $\xi \in P_k$ und $< x$, $\alpha(\xi) > \alpha(x)$. Siehe (PS)-Int. I, S. 638 (Def. 1).

⁷⁾ Die in den Sätzen 1 und 2 ausgesprochenen Eigenschaften der Majoranten und Minoranten sind lediglich Folgerungen der Bedingungen II in den Definitionen A_1 und B_1 . Beim Beweise von Satz 3 hat man, außer den eben genannten Eigenschaften, auch noch die Stetigkeit der Majoranten und Minoranten zu benutzen; diese Bedingung läßt sich in mannigfacher Art abändern, ohne daß darum Satz 3 seine Gültigkeit verliert. So könnte man die Bedingung der Stetigkeit in den Definitionen A_1 und B_1 u. a. durch eine der folgenden ersetzen: 1. $\psi_a^{(3)}(x)$ und $\varphi_a^{(3)}(x)$ haben nur Unstetigkeiten erster Art in (a, b) , wobei die links- und rechtsseitigen Stetigkeitssprünge endlich und bei den Majoranten nicht-negativ, bei den Minoranten nicht-positiv sind; oder: 2. $\psi_a^{(3)}(x)$ und $\varphi_a^{(3)}(x)$ sind endliche Ableitungen einer (primitiven) Funktion; oder: 3. sie sind approximativ stetig in bezug auf eine in (a, b) stetige, bestimmt zunehmende Funktion $\beta(x)$ (d. h. für $x_1 < x_2$ ist immer $\beta(x_1) < \beta(x_2)$). [Eine Funktion $F(x)$ soll dabei in x approximativ stetig in bezug auf $\beta(x)$ heißen, wenn es eine Teilmenge von (a, b) gibt, mit einer $\beta(x)$ -Dichte 1 in x , auf welcher $F(x)$ stetig ist in x]. In dieser Weise erhält man verschiedene Möglichkeiten, auf deren Existenz wir für den Fall $\alpha(x) \equiv x$ schon früher hinwiesen; siehe Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 184—199, insbesondere S. 191—199.

Definition B₁. Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$ -Minorante $\varphi_{\alpha}^{(3)}(x)$ soll in (a, b) stetig sein und daneben den folgenden Bedingungen genügen: I. $\varphi_{\alpha}^{(3)}(a) = 0$; II. (a, b) läßt sich, bis auf eine abzählbare Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (Q_k) derart, daß $\alpha(x)$ BV ist auf jeder Menge Q_k , daneben auf dieser immer folgendes gilt: 1. zu jedem Punkte ξ von Q_k , abzählbar viele ausgenommen, gehört ein positives $k(\xi)$ mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkte x von $Q_k \cdot [\xi - k(\xi), \xi + k(\xi)]$ mit $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ gilt

$$\varphi_{\alpha}^{(3)}(x) \leq \varphi_{\alpha}^{(3)}(\xi) \quad \text{oder} \quad \geq \varphi_{\alpha}^{(3)}(\xi), \quad \text{je nachdem } x \geq \xi \quad \text{oder} \quad \leq \xi \text{ ist;}$$

2. in jedem Punkte x von Q_k , wieder mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen, sind

$$\overline{D}_{\alpha(x); r_1}^{(Q_k)} \varphi_{\alpha}^{(3)}(x) \quad \text{und} \quad \overline{D}_{\alpha(x); l_1}^{(Q_k)} \varphi_{\alpha}^{(3)}(x) \leq f(x),$$

daneben

$$\underline{D}_{\alpha(x); r_2}^{(Q_k)} \varphi_{\alpha}^{(3)}(x) \quad \text{und} \quad \underline{D}_{\alpha(x); l_2}^{(Q_k)} \varphi_{\alpha}^{(3)}(x) \geq f(x),$$

soweit in x diese extremen $\alpha(x)$ -Derivierten existieren.

Definition 3. $F(x)$ und $\alpha(x)$ seien endlich im abgeschlossenen Intervall (a, b) ; $\alpha(x)$ sei BV auf der abgeschlossenen Teilmenge E von (a, b) . Dann heißt $F(x)$ auf E unterhalb totalstetig [oberhalb totalstetig] in bezug auf $\alpha(x)$, wenn die Summen von Funktionsdifferenzen

$$\sum_{(j)} \{F(b_j) - F(c_j)\} \quad \text{und} \quad \sum_{(j)} \{F(c_j) - F(a_j)\},$$

wobei $a_j \leq c_j \leq b_j$, $c_j \in E$, und die Paare $\{a_j, b_j\}$ zu E gehörende Endpunkte von endlich vielen, nicht-übereinandergreifenden, abgeschlossenen Intervallen sind, immer einen unteren Limes ≥ 0 [einen oberen Limes ≤ 0] haben, sobald die Summe $\sum_{(j)} \omega_{\alpha} \{(a_j, b_j) \cdot E\}$ gegen Null konvergiert; hierbei deutet $\omega_{\alpha} \{(a_j, b_j) \cdot E\}$ die Oszillation von $\alpha(x)$ auf $(a_j, b_j) \cdot E$ an.

Satz 1. Die stetige Funktion $\alpha(x)$ sei BVV in (a, b) . Wenn dann $\varphi_{\alpha}^{(3)}(x)$ eine gemäß Definition A₁ in (a, b) zu einer endlichwertigen Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$ -Majorante ist, läßt jede in (a, b) liegende, perfekte Menge T sich, bis auf abzählbar viele Punkte, überdecken durch abzählbar viele perfekte Teilmengen (R_k) , auf deren jeder $\alpha(x)$ BV und $\varphi_{\alpha}^{(3)}(x)$ unterhalb totalstetig in bezug auf $U_{\alpha_{R_k}(x)}(x)$ ist⁶⁾; hierbei ist $U_{\alpha_{R_k}(x)}(x)$ in den Punkten (x) von (a, b) definiert durch

$$(1) \quad V_{\alpha_{R_k}(x)}(x) + \sum_{(n)}^x \{b_n^{(k)} - a_n^{(k)}\} + \{x - a_n^{(k)}(x)\},$$

⁶⁾ Daraus folgt, daß $\varphi_{\alpha}^{(3)}(x)$ in (a, b) BVV ist.

wo $V_{\alpha_{R_k}(x)}(x)$ die Totalvariation über (a, x) darstellt der Funktion $\alpha_{R_k}(x)$, welche in a und b und in den Punkten von R_k mit $\alpha(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu $R_k + (a) + (b)$ komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen $(a_n^{(k)}, b_n^{(k)})$ von (a, b) , und die Summation geschieht über diejenigen Intervalle $(a_n^{(k)}, b_n^{(k)})$, für die $b_n^{(k)} \leq x$ ist, während das letzte Glied in (1) nur dann auftritt, wenn x innerer Punkt eines zu R_k komplementären Intervalles $(a_n^{(k)}(x), b_n^{(k)}(x))$ ist⁹⁾.

Der Satz, welcher ein Spezialfall von Satz 8 ist, läßt sich auch in direkter Weise beweisen (nach demselben Verfahren wie Satz 8), wobei dann nur Bedingung II der Definition A_1 (und die Endlichwertigkeit von $\varphi_a^{(3)}(x)$) benutzt zu werden braucht.

Satz 2. $\alpha(x)$ sei in (a, b) stetig und BVV. Wenn dann $\varphi_a^{(3)}(x)$ eine gemäß Definition B_1 in (a, b) zu der endlichwertigen Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$ -Minorante ist, läßt jede in (a, b) liegende, perfekte Menge T sich, bis auf abzählbar viele Punkte, überdecken durch abzählbar viele perfekte Teilmengen (S_k) , auf deren jeder $\alpha(x)$ BV und $\varphi_a^{(3)}(x)$ oberhalb totalstetig in bezug auf die (wie $U_{\alpha_{R_k}(x)}(x)$ in Satz 1 definierte) zugehörige Funktion $U_{\alpha_{S_k}(x)}(x)$ ist¹⁰⁾.

Dieser Satz ist ein Spezialfall von Satz 9.

Definition 4. $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b) . Zu jeder $\alpha(x)$ -meßbaren Teilmenge E von (a, b) läßt sich eine Funktion $\beta(x)$ definieren, welche für jeden Punkt x von (a, b) gleich dem $\alpha(x)$ -Maße (L) derjenigen Teilmenge T_x von E ist, die zum abgeschlossenen Intervall (a, x) gehört; bei der Bestimmung des $\alpha(x)$ -Maßes von T_x betrachte man in jedem Punkte $\xi > x$ den (in dieser Weise im allgemeinen abgeänderten) Wert von $\alpha(\xi)$ gleich $\alpha(x)$. Nun soll die Menge E in einem Punkte x von (a, b) die $\alpha(x)$ -Dichte 1 haben, wenn die Funktion $\beta(x)$ in diesem Punkte in bezug auf (a, b) eine $\alpha(x)$ -Ableitung¹¹⁾ = 1 hat.

⁹⁾ Vgl. (PS)-Int. I, S. 656 (Def. 17 und Fußnote 24).

¹⁰⁾ Dadurch ist $\varphi_a^{(3)}(x)$ auch BVV in (a, b) .

¹¹⁾ Hier wird die folgende Definition angewandt: Eine in (a, b) endliche Funktion $F(x)$ hat in einem zu einer Teilmenge E von (a, b) gehörenden, beiderseitigen Verdichtungspunkt x von E eine $\alpha(x)$ -Ableitung, $D_{\alpha(x)}^{(E)} F(x)$, in bezug auf E , wenn: 1^o eine Umgebung von x existiert, in deren zu E gehörenden Punkten (ξ) mit $\alpha(\xi) = \alpha(x)$ auch immer $F(\xi) = F(x)$ ist; 2^o die extremen $\alpha(x)$ -Derivierten $\underline{D}_{\alpha(x)}^{(E)} F(x)$, $\bar{D}_{\alpha(x)}^{(E)} F(x)$, $\underline{D}_{\alpha(x); r_1}^{(E)} F(x)$, $\bar{D}_{\alpha(x); r_1}^{(E)} F(x)$ und die vier zugehörigen, linksseitigen, extremen $\alpha(x)$ -Derivierten in bezug auf E (vgl. Fußnote 6) einander gleich sind (soweit sie existieren); ihr gemeinsamer Wert (falls es einen solchen gibt) sei dann der Wert von $D_{\alpha(x)}^{(E)} F(x)$. Siehe (PS)-Int. I, S. 639 (Def. 3).

Definition 5. Die in (a, b) definierte Funktion $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation auf einer abgeschlossenen Teilmenge E von (a, b) ; $\alpha_E(x)$ falle in a und b und in den Punkten von E mit $\alpha(x)$ zusammen und ändere sich linear in den zu E komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b) . Wenn es dann zu einem Punkte x von E eine Teilmenge P_x von E gibt, welche in x die $\alpha_E(x)$ -Dichte 1 hat und auf der es in x eine $\alpha_E(x)$ -Ableitung $D_{\alpha_E(x)}^{(P_x)} F(x)$ von bestimmtem Werte gibt, so definiere dieser Wert die approximative $\alpha(x)$ -Ableitung von $F(x)$ in x in bezug auf E :

$$D_{\text{appr.}; \alpha(x)}^{(E)} F(x) = D_{\alpha_E(x)}^{(P_x)} F(x).$$

Aus der Definition A_1 und Ridder, Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 134 (Satz III), 132 (Text bei Fußnote 10 und Satz II) folgt nun, daß eine Majorante $\psi_a^{(3)}(x)$ in den Punkten einer jeden perfekten Menge E , auf welcher die in der Definition A_1 auftretende Funktion $\alpha(x)$ BV ist, die Punkte einer Teilmenge vom $V_{\alpha_E}(x)$ -Maß Null ausgenommen, eine endliche approximative $\alpha(x)$ -Ableitung in bezug auf E hat, welche $\geq f(x)$ oder $\leq f(x)$ ist, je nachdem die (in diesen Punkten ebenfalls existierende und die Werte $+1$ oder -1 annehmende) Ableitung $D_{V_{\alpha_E}} \alpha_E(x)$ daselbst den Wert $+1$ oder den Wert -1 hat¹²⁾; hierbei ist $V_{\alpha_E}(x)$ die Totalvariation über (a, x) ($a \leq x \leq b$) der Funktion $\alpha_E(x)$, welche in a und b und in den Punkten von E mit $\alpha(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu E komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b) . Jede $\alpha(x)$ -Minorante $\varphi_a^{(3)}(x)$ hat eine analoge Eigenschaft (wobei dann die Ungleichheitsrelationen umgekehrt sind).

Satz 3. Ist $\alpha(x)$ in (a, b) stetig und BVV und sind $\psi_a^{(3)}(x)$, $\varphi_a^{(3)}(x)$ adjungierte Majorante und Minorante zu der endlichen Funktion $f(x)$, so ist $\psi_a^{(3)}(x) - \varphi_a^{(3)}(x)$ eine monoton zunehmende Funktion (im weiteren Sinne).

Dieser Satz folgt als Spezialfall aus Satz 10¹³⁾.

Definition 6. $f(x)$ sei endlich und $\alpha(x)$ stetig und BVV im abgeschlossenen Intervall (a, b) . Wenn $f(x)$ in (a, b) $\alpha(x)$ -Majoranten $\{\psi_a^{(3)}(x)\}$ und $\alpha(x)$ -Minoranten $\{\varphi_a^{(3)}(x)\}$ hat, setze man den Wert des unbestimmten (allgemeinen) oberen $\alpha(x)$ -Integrals $\Psi_a^{(3)}(x)$ in einem willkürlichen Punkte x von (a, b) gleich der unteren Schranke aller $\psi_a^{(3)}(x)$ -Werte in diesem Punkte

¹²⁾ Mit Hilfe von Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 132 (Satz II) sieht man sofort, daß in den Punkten von E , wieder mit Ausnahme einer Teilmenge vom V_{α_E} Maß Null, auch eine endliche approximative Ableitung $D_{\text{appr.}; V_{\alpha_E}(x)}^{(E)} \psi_a^{(3)}(x)$ existiert, welche $\geq f(x)$ oder $\leq -f(x)$ ist, je nachdem die (in diesen Punkten ebenfalls existierende und die Werte $+1$ oder -1 annehmende) Ableitung $D_{V_{\alpha_E}} \alpha_E(x)$ daselbst den Wert $+1$ oder den Wert -1 hat.

¹³⁾ Es gibt natürlich auch einen direkten Beweis; siehe Fußnote 7.

und den Wert des *unbestimmten (allgemeinen) unteren* $\alpha(x)$ -Integral $\Phi_a^{(3)}(x)$ in x gleich der oberen Schranke aller $\varphi_a^{(3)}(x)$ -Werte in x . Wir schreiben:

$$\Psi_a^{(3)}(x) \equiv \int_a^x (P S^{(3)}) f(x) d\alpha(x) = \text{fin inf } \psi_a^{(3)}(x)$$

und

$$\Phi_a^{(3)}(x) \equiv \int_a^x (P S^{(3)}) f(x) d\alpha(x) = \text{fin sup } \varphi_a^{(3)}(x).$$

Wenn in (a, b) $\Psi_a^{(3)}(x) = \Phi_a^{(3)}(x)$ ist, so definiere ihr gemeinsamer Wert das *unbestimmte (allgemeine) $\alpha(x)$ -Integral* $S_a^{(3)}(x)$ von $f(x)$ in (a, b) ¹⁴⁾.

Es ist immer $\Psi_a^{(3)}(x) \geq \Phi_a^{(3)}(x)$.

Satz 4. Wenn das *bestimmte (allgemeine) $\alpha(x)$ -Integral* (bei $\alpha(x)$ stetig und BVV in (a, b)) der *endlichen Funktion* $f(x)$ über (a, b) existiert, d. h. $\Psi_a^{(3)}(b) = \Phi_a^{(3)}(b)$ ist, so existiert in (a, b) auch das *unbestimmte (allgemeine) $\alpha(x)$ -Integral* $S_a^{(3)}(x)$ und ist eine in (a, b) stetige Funktion.

Das (allgemeine) $\alpha(x)$ -Integral $S_a^{(3)}(x)$ besitzt die gewöhnlichen elementaren Eigenschaften eines jeden Integralbegriffes.

Satz 5. Das *unbestimmte $\alpha(x)$ -Integral* $S_a^{(3)}(x)$ einer in (a, b) endlichen Funktion $f(x)$ in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, welche in (a, b) stetig und BVV ist, hat in den Punkten einer jeden perfekten Teilmenge E von (a, b) , auf der $\alpha(x)$ BV ist, eine approximative $\alpha(x)$ -Ableitung in bezug auf E gleich $f(x)$, die Punkte einer Teilmenge von E vom V_{α_E} -Maß Null ausgenommen; hierbei ist $V_{\alpha_E}(x)$ die Totalvariation über (a, x) ($a \leq x \leq b$) der Funktion $\alpha_E(x)$, welche in a und b und auf E mit $\alpha(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu E komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b) .

Beweis¹⁵⁾. Wenn $\{\psi_{a; k}^{(3)}(x)\}$ und $\{\varphi_{a; k}^{(3)}(x)\}$ Folgen von α -Majoranten bzw. α -Minoranten sind, welche mit zunehmendem k (gleichmäßig) nach $S_a^{(3)}(x)$ konvergieren, so wird, nach den Sätzen 1 und 2, E sich, bis auf abzählbar viele Punkte, überdecken lassen durch abzählbar viele perfekte Teil-

¹⁴⁾ Auch wenn $\alpha(x)$ in (a, b) nur stetig (also nicht mehr BVV) zu sein braucht, läßt sich ein *unbestimmtes allgemeines Perron-Stieltjesches $\alpha(x)$ -Integral* einführen als Verallgemeinerung des unbestimmten speziellen $\alpha(x)$ -Integrals der Definition 4 in (PS)-Int. I; dabei werden die Majoranten und Minoranten in analoger Weise definiert wie hier in den Definitionen A_1 und B_1 . Wir gehen hierauf jedoch nicht näher ein.

¹⁵⁾ Ein zweiter Beweis läßt sich liefern nach der in Ridder, Fund. Math. 21 (1933), S. 5, 6 angewandten Methode. Vgl. (PS)-Int. I (Beweise der Sätze 7, 19, 25). — Im hier folgenden Beweise (und ebenso in den weiteren Teilen dieser Arbeit) sind Funktionen $\{U_{\alpha_P}(x)\}$, gehörend zu abgeschlossenen Mengen $\{P\}$, auf welchen $\alpha(x)$ BV ist, immer in derselben Weise konstruiert wie $\{U_{\alpha_{R_k}}(x)\}$ in Satz 1.

mengen (P_j) , auf deren jeder $\psi_{\alpha;1}^{(3)}(x)$ unterhalb und $\varphi_{\alpha;1}^{(3)}(x)$ oberhalb totalstetig in bezug auf die zugehörige Funktion $U_{\alpha P_j}(x)$ ist¹⁶⁾.

Zu jedem $k = 1, 2, 3, \dots$ wächst die Differenz $\psi_{\alpha;k}^{(3)}(x) - \varphi_{\alpha;k}^{(3)}(x)$ in (a, b) monoton; somit auch $\psi_{\alpha;k,j}^{(3)}(x) - \varphi_{\alpha;k,j}^{(3)}(x)$, wobei $\psi_{\alpha;k,j}^{(3)}(x)$ und $\varphi_{\alpha;k,j}^{(3)}(x)$ in den Punkten der perfekten Menge P_j und in a und b mit

¹⁶⁾ Es wird hier der zweite (unschwer beweisbare) Teil des folgenden Satzes benutzt: Wenn in (a, b) $f(x)$ endlich und $\alpha(x)$ stetig [endlich] und BVV ist und P eine in (a, b) liegende, abgeschlossene Menge ist, auf welcher $\alpha(x)$ BV ist, wird eine gemäß Definition A₁ [Definition A₂] zu $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$ -Majorante $\psi_{\alpha}^{(3)}(x)$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge σ von P unterhalb totalstetig in bezug auf $U_{\alpha P}(x)$ sein, sobald sie auf σ unterhalb totalstetig in bezug auf $U_{\alpha \sigma}(x)$ ist, und umgekehrt. (Auch für Minoranten gibt es eine analoge Eigenschaft.) Wir beweisen den ersten Teil des Satzes. Dazu betrachten wir eine Folge von Summen $\sum_{(j)} \{U_{\alpha P}(b_j^{(k)}) - U_{\alpha P}(a_j^{(k)})\}$ ($k = 1, 2, \dots$), deren jede endlich viele Glieder enthält, gehörend zu nicht-übereinandergreifenden Intervallen $(a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$ mit $a_j^{(k)}, b_j^{(k)} \in \sigma$, und deren Werte mit zunehmendem k nach Null konvergieren. Es wird genügen zu zeigen, daß nun $\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{(j)} \{\psi_{\alpha}^{(3)}(b_j^{(k)}) - \psi_{\alpha}^{(3)}(a_j^{(k)})\} \geq 0$ ist (siehe Definition 3).

Ordnen wir diejenigen zu σ komplementären Teilintervalle von (a, b) , welche ganz zu P gehören und über die die Totalvariation von $\alpha(x)$, und somit auch von $\alpha_P(x)$, gleich Null ist, nach abnehmender Länge: $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n), \dots$! Diejenigen der Intervalle $(a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$ (k fest), welche eines oder mehrere der (endlich vielen) Intervalle $(p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k)$ enthalten, werden durch die Endpunkte dieser Intervalle in endlich viele Teile $(c_i^{(k,j)}, d_i^{(k,j)})$ zerlegt; wir ersetzen für jedes derartige Intervall $(a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$ die zugehörige Differenz in der Summe $\sum_{(j)} \{U_{\alpha P_j}(b_j^{(k)}) - U_{\alpha P_j}(a_j^{(k)})\}$ durch die Summe der Differenzen der $U_{\alpha P_j}(x)$ -Werte in den Endpunkten derjenigen Teilintervalle $(c_i^{(k,j)}, d_i^{(k,j)})$ des betrachteten $(a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$, welche nicht mit einem der Intervalle $(p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k)$ zusammenfallen. Die in dieser Weise abgeänderte Summe (deren Wert jedoch derselbe geblieben ist) sei

$$\sum_{(p)} \{U_{\alpha P}(\bar{b}_p^{(k)}) - U_{\alpha P}(\bar{a}_p^{(k)})\}.$$

Dann wird auch die zugehörige Summe

$$\sum_{(p)} \{U_{\alpha \sigma}(\bar{b}_p^{(k)}) - U_{\alpha \sigma}(\bar{a}_p^{(k)})\}$$

für $k \rightarrow \infty$ nach Null konvergieren, somit

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{(p)} \{\psi_{\alpha}^{(3)}(\bar{b}_p^{(k)}) - \psi_{\alpha}^{(3)}(\bar{a}_p^{(k)})\} \geq 0$$

sein. Da aus der Definition der $\alpha(x)$ -Majorante folgt, daß für jedes Intervall (p_n, q_n)

$$\psi_{\alpha}^{(3)}(q_n) - \psi_{\alpha}^{(3)}(p_n) \geq 0$$

ist, wird um so mehr

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{(j)} \{\psi_{\alpha}^{(3)}(b_j^{(k)}) - \psi_{\alpha}^{(3)}(a_j^{(k)})\} \geq 0$$

sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

$\varphi_{a;k}^{(3)}(x)$ bzw. mit $\varphi_{a;1}^{(3)}(x)$ zusammenfallen und sich linear ändern in den zu P_j komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b) . Da $\varphi_{a;1}^{(3)}(x)$ auf der Menge P_j oberhalb totalstetig in bezug auf $U_{aP_j}(x)$ ist, ist $\varphi_{a;1,j}^{(3)}(x)$ in (a, b) von beschränkter Variation, somit auch $\varphi_{a;k,j}^{(3)}(x)$ als Summe von zwei Funktionen von beschränkter Variation.

Aus Satz 1 folgt, daß $\varphi_{a;k,j}^{(3)}(x)$ auf einer jeden von abzählbar vielen perfekten Teilmengen $\{Q_{k,j}^{(p)}\}$ ($p = 1, 2, \dots$) von P_j , welche P_j bis auf eine abzählbare Menge überdecken, unterhalb totalstetig in bezug auf $U_{aQ_{k,j}^{(p)}}(x)$ ist. Sie ist es dadurch auf jeder Menge $Q_{k,j}^{(p)}$ auch in bezug auf $U_{aP_j}(x)$ ¹⁷⁾.

Aus der Theorie der totaladditiven Mengenfunktionen¹⁸⁾ folgt unter Anwendung einer mittels der Funktion $t = U_{aP_j}(x)$ hervorgebrachten Abbildung von (a, b) auf ein Intervall der t -Achse, daß die auf P_j zu $\varphi_{a;k,j}^{(3)}(x)$ gehörende, totaladditive Mengenfunktion $\varphi_{a;k,j}^{(3)}(e)$ einen nicht-negativen (totaladditiven) singulären Bestandteil in bezug auf die zu $U_{aP_j}(x)$ gehörende totaladditive Mengenfunktion $U_{aP_j}(e)$ hat. Daher ist $\varphi_{a;k,j}^{(3)}(x)$ in (a, b) unterhalb totalstetig in bezug auf $U_{aP_j}(x)$; sie ist es somit auch auf der Menge P_j .

Nach Fußnote 12 wird in den Punkten von P_j , mit Ausnahme einer Teilmenge vom V_{aP_j} -Maß Null (auch ihr U_{aP_j} -Maß ist dadurch Null), eine endliche approximative $V_{aP_j}(x)$ -Ableitung von $\varphi_{a;k}^{(3)}(x)$ in bezug auf P_j ,

$$D_{\text{appr.}; V_{aP_j}(x)}^{(P_j)} \varphi_{a;k}^{(3)}(x),$$

existieren und $\geq f(x)$ oder $\leq -f(x)$ sein, je nachdem die (in diesen Punkten ebenfalls existierende und die Werte $+1$ oder -1 annehmende) Ableitung $D_{V_{aP_j}(x)} \alpha_{P_j}(x)$ daselbst den Wert $+1$ oder den Wert -1 hat. In den Punkten von P_j , wieder mit Ausnahme einer Teilmenge vom $U_{aP_j}(x)$ -Maß Null, existiert eine endliche Ableitung $D_{U_{aP_j}(x)} \varphi_{a;k,j}^{(3)}(x)$ ¹⁹⁾ und eine endliche Ableitung $D_{U_{aP_j}(x)} V_{aP_j}(x)$ vom Werte 1 ²⁰⁾. Dadurch wird in

¹⁷⁾ Hier wird der Satz der vorigen Fußnote angewandt.

¹⁸⁾ Siehe de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue*, etc. (2^e Éd. 1934), Chap. 6, insbesondere S. 91.

¹⁹⁾ Vgl. z. B. l. c. ¹²⁾, S. 142 (Text bei Fußnote 22).

²⁰⁾ Zum Beweise vergleiche man (PS)-Int. I, S. 657 (Fußnote 27, Zweite Hälfte).

den Punkten von P_j , diejenigen einer Teilmenge vom $U_{aP_j}(x)$ -Maß Null ausgenommen, auch

$$D_{U_{aP_j}(x)} \psi_{a;k,j}^{(3)}(x) \geq f(x) \text{ oder } \geq -f(x)$$

sein, je nachdem in diesen Punkten die daselbst existierende Ableitung

$$D_{V_{aP_j}(x)} \alpha_{P_j}(x) = +1 \text{ oder } = -1$$

ist.

In (a, b) läßt sich bei festgehaltenem j und $k = 1, 2, \dots$ eine endliche Funktion $g_j(x)$ angeben, welche auf P_j mit $f(x)$ zusammenfällt in denjenigen Punkten, in welchen $D_{V_{aP_j}(x)} \alpha_{P_j}(x) = +1$ ist, und mit $-f(x)$ in denjenigen Punkten, in welchen $D_{V_{aP_j}(x)} \alpha_{P_j}(x) = -1$ ist, und bei der die Funktionen $\{\psi_{a;k,j}^{(3)}(x)\}$ und die in gleicher Weise [aus den $\{\varphi_{a;k}^{(3)}(x)\}$] abgeleiteten Funktionen $\{\varphi_{a;k,j}^{(3)}(x)\}$ $U_{aP_j}(x)$ -Majoranten bzw. $U_{aP_j}(x)$ -Minoranten im Sinne von (PS)-Int. I, S. 649, Def. A₂ bzw. Def. B₂ sind. $g_j(x)$ besitzt ein $U_{aP_j}(x)$ -Integral, $S_{U_{aP_j}(x)}^{(1^{***})}(x)$, im Sinne von l. c., S. 649, Def. 8, und in den Punkten von (a, b) , eine Teilmenge vom $U_{aP_j}(x)$ -Maß Null ausgenommen, existiert

$$D_{U_{aP_j}(x)} S_{U_{aP_j}(x)}^{(1^{***})}(x) \text{ und ist gleich } g_j(x).$$

In den Punkten von P_j ist

$$S_{U_{aP_j}(x)}^{(1^{***})}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{a;k,j}^{(3)}(x) = S_a^{(3)}(x).$$

Dadurch folgt aus dem Vorigen, daß in den Punkten von P_j , eine Teilmenge H_j vom V_{aP_j} -Maß Null ausgenommen,

$$g_j(x) = D_{U_{aP_j}(x)}^{(P_j)} S_a^{(3)}(x) = D_{V_{aP_j}(x)}^{(P_j)} S_a^{(3)}(x),$$

schließlich

$$(2) \quad D_{a(x)}^{(P_j)} S_a^{(3)}(x) = f(x)$$

ist.

Da H_j ein V_{aP_j} -Maß Null hat und eine Teilmenge von P_j ist, wird auch ihr V_{aE} -Maß gleich Null sein²¹⁾. In den Punkten von $P_j - H_j$, eine Teil-

²¹⁾ Dies folgt unschwer aus der Tatsache, daß in jedem Teilintervall (p, q) von (a, b)

$$V_{aE}(q) - V_{aE}(p) \leq V_{aP_j}(q) - V_{aP_j}(p) + \sum_{(n)}^q \{V_{aE}(b_n^{(j)}) - V_{aE}(a_n^{(j)})\}$$

ist; hierbei geschieht die Summation über die teilweise oder ganz zu (p, q) gehörenden, zu P_j komplementären, offenen Teilintervalle $(a_n^{(j)}, b_n^{(j)})$ von (a, b) .

menge K_j vom V_{α_E} -Maß Null ausgenommen, gibt es eine $\alpha_E(x)$ -Dichte von P_j gleich $+1^{22}$). Dadurch folgt aus (2), daß in den Punkten von $P_j - H_j - K_j$

$$D_{\text{appr.}; \alpha(x)}^{(E)} S_{\alpha}^{(3)}(x)$$

existiert und gleich $f(x)$ ist. Da die Mengen (P_j) E , bis auf abzählbar viele Punkte, überdecken, ist hiermit der Satz bewiesen.

§ 2.

Definition 7. Wenn $\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) stetig und BVV ist, hat die in (a, b) endliche Funktion $f(x)$ daselbst ein *unbestimmtes (allgemeines Denjoy-Stieltjesches) $\alpha(x)$ -Integral* $S_{\alpha}^{(3*)}(x)$, falls $S_{\alpha}^{(3*)}(x)$ die folgenden Eigenschaften hat. 1. $S_{\alpha}^{(3*)}(a) = 0$; 2. $S_{\alpha}^{(3*)}(x)$ ist stetig in (a, b) ; 3. es läßt sich (a, b) , ausgenommen die Punkte einer abzählbaren Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_j) derart, daß auf jedem P_j $\alpha(x)$ BV und $S_{\alpha}^{(3*)}(x)$ totalstetig in bezug auf die zugehörige Funktion $U_{\alpha_{P_j}(x)}(x)^{15}$ ist²³; 4. wenn zu jeder in 3. genannten Menge P_j $V_{\alpha_{P_j}(x)}(x)$ die in der Definition von $U_{\alpha_{P_j}(x)}(x)$ auftretende Totalvariation ist, ist die approximative $\alpha(x)$ -Ableitung von $S_{\alpha}^{(3*)}(x)$ in bezug auf P_j gleich $f(x)$ in allen zu P_j gehörenden Punkten ihrer Existenzmenge²⁴), diejenigen einer Teilmenge vom $V_{\alpha_{P_j}}$ -Maß Null ausgenommen.

Satz 6. Die Integraldefinitionen 6 und 7 sind einander äquivalent.

Beweis. Wenn das Integral $S_{\alpha}^{(3)}(x)$ für die endliche Funktion $f(x)$ in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, welche in (a, b) stetig und BVV ist, existiert, gibt es eine Folge von $\alpha(x)$ -Majoranten $\{\psi_{\alpha; k}^{(3)}(x)\}$ und eine Folge von

²²) Siehe l. c. ¹²), S. 132 (Satz II).

²³) Das soll heißen: $S_{\alpha}^{(3*)}(x)$ ist auf P_j sowohl oberhalb wie unterhalb totalstetig in bezug auf $U_{\alpha_{P_j}}(x)$.

²⁴) Die Punkte von P_j , in welchen es keine endliche approximative $\alpha(x)$ -Ableitung von $S_{\alpha}^{(3*)}(x)$ in bezug auf P_j gibt, bilden eine Menge vom $V_{\alpha_{P_j}}$ -Maß Null.

Das läßt sich in folgender Weise zeigen. $S_{\alpha}^{(3*)}(x)$ ist BV auf P_j . Nun gilt in den Punkten dieser Menge, die Punkte einer Teilmenge vom $V_{\alpha_{P_j}}$ -Maß Null ausgenommen, folgendes:

1. es existiert eine endliche Ableitung $D_{V_{\alpha_{P_j}}(x)}^{(P_j)} S_{\alpha}^{(3*)}(x)$ [siehe l. c. ¹²), S. 135 (Fußnote 13)]; 2. $D_{V_{\alpha_{P_j}}(x)} S_{\alpha}^{(3*)}(x) = +1$ oder -1 [siehe Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* (2^e Éd. 1928), S. 259, 260]; 3. die $\alpha_{P_j}(x)$ -Dichte von P_j ist $+1$ [siehe l. c. ¹²), S. 132 (Satz II)]. Daraus folgt die Behauptung.

$\alpha(x)$ -Minoranten $\{\varphi_{\alpha; k}^{(3)}(x)\}$, adjungiert zu $f(x)$ gemäß den Definitionen A_1 bzw. B_1 , für die

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\alpha; k}^{(3)}(b) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\alpha; k}^{(3)}(b) = S_{\alpha}^{(3)}(b)$$

ist.

Aus dem Beweise des vorigen Satzes geht hervor, daß (a, b) sich überdecken läßt durch eine abzählbare Menge H und abzählbar viele perfekte Teilmengen (P_j) , derartig, daß auf einer jeden der Mengen (P_j) $\alpha(x)$ BV, jede Majorante $\varphi_{\alpha; k}^{(3)}(x)$ unterhalb totalstetig in bezug auf die zugehörige Funktion $U_{\alpha P_j(x)}(x)$ und jede Minorante $\varphi_{\alpha; k}^{(3)}(x)$ oberhalb totalstetig in bezug auf $U_{\alpha P_j(x)}(x)$ ist.

$S_{\alpha}^{(3)}(x)$ muß auf jedem P_j totalstetig in bezug auf $U_{\alpha P_j(x)}(x)$ sein. Sonst existierte für eine dieser Mengen, P_j , eine z. B. positive Zahl Δ und eine Folge von Mengen (M_n) , welche jede für sich von endlich vielen, nicht-über-einandergreifenden, abgeschlossenen Intervallen $(a_p^{(n)}, a_{p+1}^{(n)})$ gebildet würden, deren Endpunkte zu P_j gehörten und so, daß gleichzeitig

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(p)} \{S_{\alpha}^{(3)}(a_{p+1}^{(n)}) - S_{\alpha}^{(3)}(a_p^{(n)})\} = \Delta \\ \text{und} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(p)} \{U_{\alpha P_j(x)}(a_{p+1}^{(n)}) - U_{\alpha P_j(x)}(a_p^{(n)})\} = 0 \end{array} \right.$$

wäre.

$\varphi_{\alpha; k'}^{(3)}(x)$ sei eine Funktion der Folge $\{\varphi_{\alpha; k}^{(3)}(x)\}$ mit

$$S_{\alpha}^{(3)}(b) - \varphi_{\alpha; k'}^{(3)}(b) < \frac{1}{2} \Delta.$$

Da $S_{\alpha}^{(3)}(x) - \varphi_{\alpha; k'}^{(3)}(x)$ in (a, b) wächst, ist bei willkürlich, aber fest gewähltem n

$$(4) \quad \sum_{(p)} \{S_{\alpha}^{(3)}(a_{p+1}^{(n)}) - S_{\alpha}^{(3)}(a_p^{(n)})\} - \sum_{(p)} \{\varphi_{\alpha; k'}^{(3)}(a_{p+1}^{(n)}) - \varphi_{\alpha; k'}^{(3)}(a_p^{(n)})\} \\ \leq S_{\alpha}^{(3)}(b) - \varphi_{\alpha; k'}^{(3)}(b) < \frac{1}{2} \Delta.$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{(p)} \{\varphi_{\alpha; k'}^{(3)}(a_{p+1}^{(n)}) - \varphi_{\alpha; k'}^{(3)}(a_p^{(n)})\} > \frac{1}{2} \Delta.$$

Da $\varphi_{\alpha; k'}^{(3)}(x)$ auf P_j oberhalb totalstetig in bezug auf $U_{\alpha P_j(x)}(x)$ ist, gelangen wir zu einem Widerspruch.

Auch ein negativer Wert von Δ ist unmöglich. $S_{\alpha}^{(3)}(x)$ ist somit auf jedem P_j totalstetig in bezug auf die zugehörige Funktion $U_{\alpha P_j(x)}(x)$.

Mit Satz 5 folgt hieraus, daß $S_{\alpha}^{(3)}(x)$ für die Funktion $f(x)$ auch den Bedingungen der Definition 7 genügt.

Wenn umgekehrt bekannt ist, daß $f(x)$ in (a, b) ein unbestimmtes $\alpha(x)$ -Integral $S_{\alpha}^{(3*)}(x)$ gemäß Definition 7 hat, so wird für jede der nach Definition 7,

Bedingung 3 auftretenden, perfekten Mengen (P_j) die Funktion $K_j(x)$, welche in a und b und in den Punkten der betrachteten Menge P_j mit $S_a^{(3*)}(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu P_j komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b) , in (a, b) totalstetig in bezug auf die zugehörige Funktion $U_{aP_j}(x)$ sein. Es läßt sich eine in (a, b) endliche, eindeutige Funktion $g_j(x)$ angeben, welche gleich $f(x) \times D_{U_{aP_j}(x)} \alpha_{P_j}(x)$ ist in denjenigen Punkten von P_j , in welchen $D_{V_{aP_j}(x)} \alpha_{P_j}(x) = +1$ oder -1 und $D_{U_{aP_j}(x)} V_{aP_j}(x) = +1$ ist, den Wert Null hat in den übrigen Punkten von P_j und daneben in den zu P_j komplementären offenen Teilintervallen von (a, b) derartige konstante Werte annimmt, daß $K_j(x)$ Lebesgue-Stieltjessches $U_{aP_j}(x)$ -Integral von $g_j(x)$ über (a, x) ist ($a \leq x \leq b$)²⁵⁾.

Bei willkürlich positivem ε läßt sich nun eine in (a, b) monoton zunehmende, stetige Funktion $\chi_j(x)$ konstruieren, mit $\chi_j(a) = 0$, $\chi_j(b) < \frac{\varepsilon}{2j}$, welche, zu $K_j(x)$ addiert, eine in (a, b) zu $g_j(x)$ gemäß (PS)-Int. I, S. 644, Def. A₁ adjungierte U_{aP_j} -Majorante liefert, die eine U_{aP_j} -Ableitung $= +\infty$ hat in denjenigen Punkten von P_j , welche nicht zur Menge Q_j (definiert in Fußnote 25) gehören und in deren jeder Umgebung außerdem $U_{aP_j}(x)$ auf keiner Seite konstant ist²⁶⁾. Durch Addition von $S_a^{(3*)}(x)$ und $\sum_{(j)} \chi_j(x)$ entsteht eine $\alpha(x)$ -Majorante von $f(x)$ im Sinne der Definition A₁ (§ 1), welche in (a, b) um weniger als ε von $S_a^{(3*)}(x)$ abweicht.

Da sich zu $f(x)$ in analoger Weise $\alpha(x)$ -Minoranten im Sinne der Definition B₁ (§ 1) konstruieren lassen, welche beliebig wenig von $S_a^{(3*)}(x)$ abweichen, ist $S_a^{(3*)}(x)$ auch unbestimmtes $\alpha(x)$ -Integral von $f(x)$ im Sinne der Definition 6.

§ 3.

Definition 8. $\alpha(x)$ sei in (a, b) stetig und BVV; zu einer jeden von abzählbar vielen perfekten Mengen (P_j) , auf welchen $\alpha(x)$ BV ist und welche sämtlich (a, b) bis auf eine abzählbare Menge überdecken, sollen $\alpha_{P_j}(x)$ und $V_{aP_j}(x)$ für die Punkte von (a, b) in schon mehrfach angegebener Weise

²⁵⁾ Siehe Fußnote 24 und den Text bei Fußnote 20. Die Punkte von P_j , in welchen $g_j(x) = f(x) \times D_{U_{aP_j}(x)} \alpha_{P_j}(x)$ angenommen wird, bilden eine Teilmenge Q_j von P_j von gleichem U_{aP_j} -Maß wie P_j .

²⁶⁾ Die Möglichkeit einer derartigen Konstruktion folgt aus de la Vallée Poussin, l. c. ¹⁵⁾, S. 78—81.

definiert sein. Nun wird eine Funktion $f(x)$, welche in (a, b) endlich ist, ausgenommen in den Punkten einer Menge E , für die das $V_{\alpha_{P_j}}(x)$ -Maß von $E \cdot P_j$ immer Null ist ($j = 1, 2, \dots$), in (a, b) ein unbestimmtes $\alpha^{(3)}$ -Integral, $\int_a^x (PS^{(3)}) f(x) d\alpha(x)$, haben, wenn die Funktion

$$f^*(x) = f(x) \text{ in den Punkten von } (a, b), \text{ in welchen } f(x) \text{ endlich ist,} \\ = 0 \text{ in den übrigen Punkten von } (a, b)$$

in (a, b) ein unbestimmtes $\alpha^{(3)}$ -Integral gemäß Definition 6 hat. Wir setzen dann:

$$\int_a^x (PS^{(3)}) f(x) d\alpha(x) = \int_a^x (PS^{(3)}) f^*(x) d\alpha(x).$$

Satz 7. $\alpha(x)$ sei in (a, b) stetig und BVV; $P_j, \alpha_{P_j}(x), V_{\alpha_{P_j}}(x)$ mögen die in Definition 8 angegebene Bedeutung haben. Dann sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, welche nur unendlich werden oder voneinander verschieden sein können auf einer Menge E mit $m_{V_{\alpha_{P_j}}(x)}(E \cdot P_j) = 0$ ($j = 1, 2, \dots$), entweder beide $\alpha^{(3)}$ -integrierbar über (a, b) oder nicht. Im Falle der $\alpha^{(3)}$ -Integrierbarkeit ist für jedes x von (a, b)

$$\int_a^x (PS^{(3)}) f(x) d\alpha(x) = \int_a^x (PS^{(3)}) g(x) d\alpha(x).$$

Der Beweis folgt aus Definition 8, Satz 6 und Definition 7²⁷).

II. Das allgemeine Perron-Stieltjessche Integral in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, welche in (a, b) endlich und BVV ist.

§ 4.

Definition A₂. Im abgeschlossenen Intervall (a, b) sei $f(x)$ endlich, $\alpha(x)$ endlich und BVV. Dann soll eine in (a, b) endliche Funktion eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$ -Majorante $\psi_a^{(3)}(x)$ heißen, wenn sie den Bedingungen genügt: I. $\psi_a^{(3)}(a) = 0$; II. es läßt sich (a, b) , bis auf eine abzählbare Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) derart, daß $\alpha(x)$ auf jedem P_k BV ist und daß daneben: 1. zu jedem Punkte ξ von P_k , in welchem $\alpha(x)$ stetig ist auf P_k , abzählbar viele dieser Punkte ausgenommen,

²⁷) Man benutze auch die folgende Eigenschaft: Wenn $\alpha(x)$ endlich und BV ist auf einer perfekten Teilmenge H von (a, b) , wird eine in (a, b) endliche Funktion $F(x)$, welche auf H totalstetig in bezug auf $U_{\alpha_H}(x)$ ¹⁵⁾ ist, auf einer willkürlichen perfekten Teilmenge T von H totalstetig in bezug auf die zugehörige Funktion $U_{\alpha_T}(x)$ sein. Vgl. Fußnote 16.

ein positives $h(\xi)$ gehört so, daß in jedem Punkte x von $P_h \cdot [\xi - h(\xi), \xi + h(\xi)]$ mit $\alpha(x) = \alpha(\xi)$

$$\psi_a^{(3)}(x) \leq \psi_a^{(3)}(\xi) \text{ oder } \geq \psi_a^{(3)}(\xi)$$

ist, je nachdem $x \leq \xi$ oder $\geq \xi$ ist; 2. in diesem Punkte ξ

$$\underline{D}_{a(x); r_1}^{(P_h)} \psi_a^{(3)}(\xi) \text{ und } \underline{D}_{a(x); l_1}^{(P_h)} \psi_a^{(3)}(\xi) \geq f(\xi),$$

dabei

$$\overline{D}_{a(x); r_2}^{(P_h)} \psi_a^{(3)}(\xi) \text{ und } \overline{D}_{a(x); l_2}^{(P_h)} \psi_a^{(3)}(\xi) \leq f(\xi)$$

sind, soweit in ξ diese extremen Derivierten existieren; III. a. auf jeder Teilmenge E von (a, b) , welche einen willkürlichen, nicht unter III b bzw. III b* fallenden Punkt ξ von (a, b) entweder zum linksseitigen oder zum rechtsseitigen Häufungspunkt hat, ohne selbst diesen Punkt zu enthalten, existiert ein endlicher Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \xi; x \in E} \psi_a^{(3)}(x)$, sobald $\lim_{x \rightarrow \xi; x \in E} \alpha(x)$ existiert;

1° ist $\alpha(x)$ auf $E + (\xi)$ stetig in ξ , so hat $\psi_a^{(3)}(x)$ in ξ auf $E + (\xi)$ einen nichtnegativen Stetigkeitssprung; 2° ist $\alpha(x)$ auf $E + (\xi)$ unstetig in ξ , so gilt auf $P \equiv E + (\xi)$

$$\underline{D}_{a(x); l_1}^{(P)} \psi_a^{(3)}(\xi) \geq f(\xi); \quad \overline{D}_{a(x); l_2}^{(P)} \psi_a^{(3)}(\xi) \leq f(\xi),$$

bzw.

$$\underline{D}_{a(x); r_1}^{(P)} \psi_a^{(3)}(\xi) \geq f(\xi); \quad \overline{D}_{a(x); r_2}^{(P)} \psi_a^{(3)}(\xi) \leq f(\xi),$$

soweit in dem Punkte ξ diese extremen $\alpha(x)$ -Derivierten existieren; III. b [III. b*]. zu jedem Punkte $\xi \neq a$ [$\xi \neq b$], welcher linksseitiger [rechtsseitiger] Häufungspunkt einer Teilmenge von (a, b) ist, auf der in ξ ein unendlicher Grenzwert von $\alpha(x)$ existiert, gehört ein Intervall mit dem rechten [linken] Endpunkt ξ , für dessen innere Punkte (x)

$$\psi_a^{(3)}(\xi) - \psi_a^{(3)}(x) \geq f(\xi) \cdot \{\alpha(\xi) - \alpha(x)\}$$

$$[\text{bzw. } \psi_a^{(3)}(x) - \psi_a^{(3)}(\xi) \geq f(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}]$$

ist²⁸⁾.

²⁸⁾ Gemeint wird hier, daß jede Majorante den beiden Bedingungen III b, III b* genügen soll. — Ebenso wie in den Definitionen A_1 und B_1 die Bedingung der Stetigkeit, lassen sich in den Definitionen A_2 und B_2 die Bedingungen III a, III b, III b* in mannigfacher Art abändern. Beim Beweise der Sätze 8 und 9 werden sie nicht benutzt. Damit wir das Perronsche Integrationsverfahren anwenden können, brauchen wir derartige Bedingungen nur immer so zu wählen, daß Satz 10 gelten bleibt. So ist es u. a. möglich, die Bedingungen III a, III b, III b* für alle Punkte von (a, b) durch eine der in Fußnote 7 gegebenen Bedingungen 1, 2, 3 zu ersetzen; um so mehr wird es genügen, die Majoranten und Minoranten in allen Punkten von (a, b) stetig anzunehmen. In jedem besonderen Fall entsteht die Frage, ein gleichwertiges Denjoy-Stieltjesches Integrationsverfahren anzugeben. — Nachträgliche Bemerkung zu (PS)-Int. I: Um eine größere Analogie zwischen den Definitionen des speziellen und des allgemeinen

Definition B_2 der zu $f(x)$ adjungierten $\alpha(x)$ -Minoranten $\{\varphi_a^{(3)}(x)\}$ bei $\alpha(x)$ endlich und BVV in (a, b) geht in analoger Weise aus Definition B_1 hervor wie Definition A_2 aus Definition A_1 .

Satz 8 [Satz 9]. $\alpha(x)$ sei in (a, b) endlich und BVV. Wenn dann $\varphi_a^{(3)}(x)$ [$\varphi_a^{(3)}(x)$] eine gemäß Definition A_2 [Definition B_2] in (a, b) zu einer endlichen Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$ -Majorante [$\alpha(x)$ -Minorante] ist, läßt jede in (a, b) enthaltene perfekte Menge T sich, bis auf eine abzählbare Teilmenge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Teilmengen (M_k) [(N_k)], auf deren jeder $\alpha(x)$ BV und $\varphi_a^{(3)}(x)$ unterhalb totalstetig in bezug auf $U_{\alpha, M_k}(x)$ (x)¹⁸⁾ [$\varphi_a^{(3)}(x)$ oberhalb totalstetig in bezug auf $U_{\alpha, N_k}(x)$ (x)] ist²⁹⁾.

Beweis (von Satz 8). Nach Definition A_2 (Bedingung II)³⁰⁾ läßt T sich, bis auf eine abzählbare Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Teilmengen (P_k) , auf deren jeder $\alpha(x)$ BV ist, und wobei es für jeden Punkt x einer Menge P_k , in welchem $\alpha(x)$ auf P_k stetig ist, abzählbar viele derartige Punkte ausgenommen, eine natürliche Zahl $n(x; P_k)$ gibt derart, daß aus $0 < x' - x < \frac{1}{n(x; P_k)}$, $x' \in P_k$,

$$(5) \quad \varphi_a^{(3)}(x') - \varphi_a^{(3)}(x) \geq -n(x; P_k) \cdot |\alpha(x') - \alpha(x)|$$

folgt und aus $0 > x' - x > -\frac{1}{n(x; P_k)}$, $x' \in P_k$,

$$(6) \quad \varphi_a^{(3)}(x) - \varphi_a^{(3)}(x') \geq -n(x; P_k) \cdot |\alpha(x') - \alpha(x)|.$$

Bei festem n sei $Q_{k,n}$ die Menge der Punkte (x) von P_k , in welchen (5) und (6) unter den angegebenen Bedingungen gelten. Zu jedem n gehören endlich viele, abgeschlossene Intervalle $(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ (wobei i eine ganze Zahl), welche Punkte von $Q_{k,n}$ enthalten; es gibt somit auch endlich viele, nicht leere Durchschnittsmengen $(Q_{k,n,i})$ von $Q_{k,n}$ mit derartigen Intervallen.

$H_{k,n,i}$ sei die abgeschlossene Hülle von $Q_{k,n,i}$. Wenn $V_{\alpha, H_{k,n,i}}(x)$ die Totalvariation über (a, x) ist der (nach einem schon mehrfach angewendeten

(PS)-Integrals zu erreichen, lese man in Definition A_6 , Bedingung 2 von (PS)-Int. I statt „außerdem ist $\varphi_a^{(3)}(x)$ auf $E + (\xi)$ stetig in ξ , wenn $\alpha(x)$ es ist“ folgendes: „ist $\alpha(x)$ auf $E + (\xi)$ stetig in ξ , so hat $\varphi_a^{(3)}(x)$ in ξ auf $E + (\xi)$ einen nicht-negativen Stetigkeitsprung“. Das bringt nur einige (leicht ersichtliche) Abänderungen im Anfang und am Ende des Beweises von Satz 24 mit sich; vergleiche auch hier den Beweis von Satz 10. — Das soeben über die Bedingungen III a, III b, III b* Gesagte läßt sich auf die Bedingungen 2, 4 a, 4 b, 4 b* der Definitionen A_6 , B_6 in (PS)-Int. I übertragen.

²⁹⁾ $\varphi_a^{(3)}(x)$ und $\varphi_a^{(3)}(x)$ sind dadurch BVV in (a, b) .

³⁰⁾ Der Beweis beruht ausschließlich auf der Anwendung dieser Bedingung.

Verfahren) in (a, b) aus $\alpha(x)$ und $H_{k,n,i}$ abgeleiteten Funktion $\alpha_{H_{k,n,i}}(x)$, so folgt aus (5) und (6), daß die Funktion

$$\chi_{k,n,i}(x) \equiv \psi_a^{(3)}(x) + n \cdot V_{\alpha_{H_{k,n,i}}(x)}(x)$$

auf $Q_{k,n,i}$ monoton zunimmt, während ihre Werte in den zu $H_{k,n,i}$ gehörenden, inneren Punkten eines Intervalls (x_1, x_2) , dessen Endpunkte zu $Q_{k,n,i}$ gehören, im abgeschlossenen Intervall $[\chi_{k,n,i}(x_1), \chi_{k,n,i}(x_2)]$ liegen. Definieren wir nun $\chi_{k,n,i}^*(x)$: 1° gleich $\chi_{k,n,i}(x)$ in den Punkten von $Q_{k,n,i}$ und in den nicht zu $Q_{k,n,i}$ gehörenden, beiderseitigen Häufungspunkten von $Q_{k,n,i}$; 2° gleich dem rechtsseitigen Grenzwert von $\chi_{k,n,i}(x)$ auf $Q_{k,n,i}$ in jedem nicht zu $Q_{k,n,i}$ gehörenden Punkt, welcher nur rechtsseitiger Häufungspunkt von $Q_{k,n,i}$ ist; und 3° gleich dem linksseitigen Grenzwert von $\chi_{k,n,i}(x)$ auf $Q_{k,n,i}$ in jedem nicht zu $Q_{k,n,i}$ gehörenden Punkt, welcher nur linksseitiger Häufungspunkt von $Q_{k,n,i}$ ist, so wird $\chi_{k,n,i}^*(x)$ in allen Punkten von $H_{k,n,i}$ definiert sein und auf dieser Menge monoton zunehmen; für jedes zu $H_{k,n,i}$ komplementäre Intervall $(a_{k,n,i}^{(m)}, b_{k,n,i}^{(m)})$ ist

$$\text{und} \quad \chi_{k,n,i}^*(a_{k,n,i}^{(m)}) \leq \chi_{k,n,i}(a_{k,n,i}^{(m)}) \leq \chi_{k,n,i}^*(b_{k,n,i}^{(m)})$$

$$\chi_{k,n,i}^*(a_{k,n,i}^{(m)}) \leq \chi_{k,n,i}(b_{k,n,i}^{(m)}) \leq \chi_{k,n,i}^*(b_{k,n,i}^{(m)}).$$

Hieraus läßt sich ableiten, daß $\psi_a^{(3)}(x)$ auf $H_{k,n,i}$ unterhalb totalstetig in bezug auf die zu $\alpha(x)$, $H_{k,n,i}$ gehörende Funktion $U_{\alpha_{H_{k,n,i}}(x)}(x)$ ¹⁵⁾ ist.

Ist der perfekte Kern $K_{k,n,i}$ von $H_{k,n,i}$ nicht leer, so ist $\psi_a^{(3)}(x)$ auch auf diesem Kern unterhalb totalstetig in bezug auf $U_{\alpha_{H_{k,n,i}}(x)}(x)$, somit, nach Fußnote 16, ebenfalls in bezug auf $U_{\alpha_{K_{k,n,i}}(x)}(x)$. Die abzählbar vielen, nicht leeren Kerne $\{K_{k,n,i}\}$ überdecken T bis auf abzählbar viele Punkte; sie können somit betrachtet werden als die Mengen (M_k) , deren Existenz durch den Satz 8 behauptet wird.

Aus der Definition A_2 (Bedingung II) und l. c.¹²⁾, S. 135 (Fußnote 13), 132 (Text bei Fußnote 10 und Satz II) folgt, daß eine $\alpha(x)$ -Majorante $\psi_a^{(3)}(x)$, für die die nach Definition A_2 zugehörige Funktion $\alpha(x)$ auf einer perfekten Menge $E \subset BV$ ist, in denjenigen Punkten von E , in welchen $\alpha(x)$ auf E stetig ist, die Punkte einer Teilmenge vom V_{α_E} -Maß Null ausgenommen, eine endliche approximative $\alpha(x)$ -Ableitung in bezug auf E hat, welche $\geq f(x)$ oder $\leq f(x)$ ist, je nachdem die (in diesen Punkten ebenfalls existierende und die Werte $+1$ oder -1 annehmende) Ableitung $D_{V_{\alpha_E}(x)} \alpha_E(x)$ daselbst den Wert $+1$ oder den Wert -1 hat²¹⁾. ($\alpha_E(x)$ und $V_{\alpha_E}(x)$ sind dabei in üblicher Weise

²¹⁾ Mit Hilfe von l. c.¹³⁾, S. 132 (Satz II) sieht man nun sofort, daß in den Punkten von E , in welchen $\alpha(x)$ auf E stetig ist, wieder mit Ausnahme derjenigen einer Teilmenge vom V_{α_E} -Maß Null, auch eine endliche approximative Ableitung $D_{V_{\alpha_E}(x)}^{(K)} \alpha_E(x)$ existiert, welche $\geq f(x)$ oder $\leq -f(x)$ ist, je nachdem die (in diesen Punkten ebenfalls existierende) Ableitung $D_{V_{\alpha_E}(x)} \alpha_E(x)$ daselbst den Wert $+1$ oder den Wert -1 hat.

aus $\alpha(x)$ und E hergeleitet.) Jede $\alpha(x)$ -Minorante $\varphi_a^{(3)}(x)$ hat eine analoge Eigenschaft (wobei dann die Ungleichheitsrelationen umgekehrt sind).

Satz 10. Ist $\alpha(x)$ in (a, b) endlich und BVV und sind $\varphi_a^{(3)}(x)$, $\varphi_a^{(3)}(x)$ α -Majorante und α -Minorante einer endlichen Funktion $f(x)$, so ist $\varphi_a^{(3)}(x) - \varphi_a^{(3)}(x)$ eine monoton zunehmende Funktion (im weiteren Sinne).

Beweis. Für die Punkte von (a, b) sei $\omega(x) = \varphi_a^{(3)}(x) - \varphi_a^{(3)}(x)$. Wenn die Menge E der Punkte von (a, b) , in deren jeder Umgebung Punkte x' und x'' mit $x' < x''$ und $\omega(x') > \omega(x'')$ liegen, nicht leer ist, so ist sie abgeschlossen. E ist dann sogar perfekt. Denn jeder Punkt ξ von E ist zugleich Häufungspunkt von E ; es genügt hierfür zu zeigen, daß eine willkürliche Umgebung $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_2)$ einen von ξ verschiedenen Punkt von E enthält. Nur folgende Fälle sind möglich: 1. es gibt zwei Punkte x_1, x_2 entweder mit $\xi < x_1 < x_2 < \xi + \delta_2$ oder mit $\xi - \delta_1 < x_1 < x_2 < \xi$, während daneben $\omega(x_1) > \omega(x_2)$ ist; dann liefert fortgesetzte Halbierung von (x_1, x_2) einen von ξ verschiedenen, zu E gehörenden Grenzpunkt; 2. es gibt einen Punkt x_3 mit $\xi < x_3 < \xi + \delta_3$ und $\omega(\xi) > \omega(x_3)$; sowohl im Falle, daß $\alpha(x)$ in ξ rechtsseitig stetig ist, somit nach Definition A₂ (Bedingung IIIa, 1^o) und Definition B₂ $\omega(x)$ daselbst einen nicht-negativen, rechtsseitigen Stetigkeitssprung hat, wie auch im Falle, daß $\alpha(x)$ in ξ rechtsseitig unstetig ist und somit in ξ jedenfalls eine der Bedingungen IIIa, 2^o; IIIb* von Definition A₂ und eine damit parallel laufende Bedingung der Definition B₂ erfüllt ist, gibt es einen Punkt x_4 mit $\xi < x_4 < x_3$ und $\omega(x_4) > \omega(x_3)$; damit ist dieser Fall auf Fall 1 zurückgeführt; 3. es gibt einen Punkt x_5 mit $\xi - \delta_1 < x_5 < \xi$ und $\omega(x_5) > \omega(\xi)$; auch dies läßt sich wieder auf Fall 1 zurückführen.

In jedem zu E komplementären, abgeschlossenen Teilintervall von (a, b) nimmt $\omega(x)$ monoton zu; also wird jedes Stück von E Punkte ξ', ξ'' enthalten, für die gleichzeitig $\xi' < \xi''$ und $\omega(\xi') > \omega(\xi'')$ ist.

Es gibt ein Stück σ von E , auf welchem eine der nach Satz 8 (mit $T \equiv (a, b)$) auftretenden Mengen (M_k) , M_{k_1} , und eine der nach Satz 9 (ebenfalls mit $T \equiv (a, b)$) auftretenden Mengen (N_k) , N_{k_2} , überall dicht liegen. Die Funktion $\omega_a(x)$ ändere sich linear in den zu $\sigma + (a) + (b)$ komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b) und falle in den Punkten von σ und in a und b mit $\omega(x)$ zusammen. Da auf σ $\varphi_a^{(3)}(x)$ unterhalb totalstetig in bezug auf $U_{aM_{k_1}}(x)$ und $\varphi_a^{(3)}(x)$ oberhalb totalstetig in bezug auf $U_{aN_{k_2}}(x)$ ist, wird $\omega_a(x)$ auf σ unterhalb totalstetig in bezug auf eine Funktion $\mathfrak{T}(x)$ sein, welche in (a, b) definiert ist durch

$$(7) \quad V_{aM_{k_1} + N_{k_2}}(x) + \sum_{(n)}^x (b_n - a_n) + (x - a_n(x));$$

hierbei ist $V_{aM_{k_1} + N_{k_2}}(x)$ die Totalvariation über (a, x) der Funktion $\alpha_{M_{k_1} + N_{k_2}}(x)$, welche in den Punkten der Menge $M_{k_1} + N_{k_2} + (a) + (b)$ mit

$\alpha(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu dieser Menge komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen (a_n, b_n) von (a, b) , während die Summation geschieht über diejenigen Intervalle (a_n, b_n) , welche ganz zum abgeschlossenen Intervall (a, x) gehören, und die Differenz $x - a_{n(x)}$ nur dann in (7) auftritt, wenn x innerer Punkt eines komplementären Intervalles $(a_{n(x)}, b_{n(x)})$ ist. Auch im Intervall (a, b) ist $\omega_\sigma(x)$ unterhalb totalstetig in bezug auf $\mathfrak{I}(x)$ ³²⁾.

Aus Fußnote 31 und l. c.¹²⁾, S. 132 (Satz II) folgt, daß in den Punkten von σ , in welchen $\alpha(x)$ auf $M_{k_1} + N_{k_2}$ stetig ist³³⁾, diejenigen einer Teilmenge vom $V_{\alpha_{M_{k_1} + N_{k_2}}(x)}$ -Maß Null ausgenommen, eine endliche approximative Ableitung $D_{\text{appr.}; V_{\alpha_{M_{k_1} + N_{k_2}}(x)}}^{(w)} \psi_\alpha^{(3)}(x)$ existiert, welche dabei $\geq f(x)$ oder $\leq -f(x)$ ist, je nachdem die (in diesen Punkten ebenfalls existierende) Ableitung $D_{V_{\alpha_{M_{k_1} + N_{k_2}}(x)}} \alpha_{M_{k_1} + N_{k_2}}(x)$ daselbst den Wert $+1$ oder den Wert -1 hat. In den Punkten von σ , in welchen $\alpha(x)$ auf σ stetig ist, die Punkte einer Teilmenge vom $\mathfrak{I}(x)$ -Maß Null ausgenommen, existiert die Ableitung $D_{\mathfrak{I}(x)} V_{\alpha_{M_{k_1} + N_{k_2}}(x)}$ und hat den Wert $+1$ ³⁴⁾ und existiert die Ableitung $D_{\mathfrak{I}(x)} \omega_\sigma(x)$ ³⁵⁾.

Aus dem vorigen Absatz und einer korrespondierenden Eigenschaft von $\varphi_\alpha^{(3)}(x)$ läßt sich ableiten, daß in den Punkten von σ , in welchen $\mathfrak{I}(x)$ auf σ stetig ist, eine Teilmenge vom $\mathfrak{I}(x)$ -Maß Null ausgenommen, $D_{\mathfrak{I}(x)} \omega_\sigma(x)$ existiert und ≥ 0 ist.

Für jeden zu σ gehörenden, linksseitigen [rechtsseitigen] Unstetigkeitspunkt ξ von $\mathfrak{I}(x)$, der immer auch linksseitiger [rechtsseitiger] Häufungspunkt von σ sein wird, läßt sich aus Definition A_2 (Bedingungen IIIa, b, b*) und Definition B_2 ableiten, daß für den nach Fußnote 32 existierenden, endlichen Grenzwert $\omega_\sigma(\xi - 0)$ [$\omega_\sigma(\xi + 0)$] gilt:

$$\frac{\omega_\sigma(\xi) - \omega_\sigma(\xi - 0)}{\mathfrak{I}(\xi) - \mathfrak{I}(\xi - 0)} \geq 0 \left[\frac{\omega_\sigma(\xi + 0) - \omega_\sigma(\xi)}{\mathfrak{I}(\xi + 0) - \mathfrak{I}(\xi)} \geq 0 \right].$$

Für die zu σ gehörenden, linksseitigen [rechtsseitigen] Stetigkeitspunkte von $\mathfrak{I}(x)$ folgt aus den gleichen Bedingungen, daß der zugehörige Stetigkeitsprung von $\omega_\sigma(x)$ nicht-negativ ist.

³²⁾ Hieraus und aus den Bedingungen III der Definitionen A_2 und B_2 läßt sich ableiten, daß $\omega_\sigma(x)$ in (a, b) von beschränkter Variation ist.

³³⁾ Die Menge dieser Punkte und die der Punkte von σ , in welchen $\mathfrak{I}(x)$ stetig ist auf σ , sind bis auf abzählbar viele Punkte identisch.

³⁴⁾ Das folgt mit Hilfe von (PS)-Int. I, S. 657 (Fußnote 27).

³⁵⁾ Das folgt aus Fußnote 32 und l. c.¹²⁾, S. 135 (Fußnote 13).

Achtet man außerdem darauf, daß $\omega_\sigma(x)$ in den zu σ komplementären Teilintervallen von (a, b) nicht abnimmt, so läßt sich folgern, daß $\omega_\sigma(x)$ eine in (a, b) zu der Funktion $h(x) \equiv 0$ adjungierte $\mathfrak{T}(x)$ -Majorante im Sinne von (PS)-Int. I, S. 653 (Definition A_4)²⁶⁾ ist. Da $h(x)$ in (a, b) außerdem eine $\mathfrak{T}(x)$ -Minorante im Sinne von (PS)-Int. I, S. 653 (Definition B_4)²⁶⁾ hat, welche identisch Null ist, nimmt $\omega_\sigma(x)$ als Differenz einer $\mathfrak{T}(x)$ -Majorante und einer $\mathfrak{T}(x)$ -Minorante in (a, b) nicht ab. $\omega(x)$ nimmt auf σ monoton zu; wir gelangen zu einem Widerspruch.

Definition 9. In (a, b) sei $f(x)$ endlich, $\alpha(x)$ endlich und BVV. Dann definieren wir für $a \leq x \leq b$:

$$\Psi_\alpha^{(3)}(x) = \int_a^x (P S^{(3)}) f(x) d\alpha(x) = \text{fin inf } \psi_\alpha^{(3)}(x)$$

und

$$\Phi_\alpha^{(3)}(x) = \int_a^x (P S^{(3)}) f(x) d\alpha(x) = \text{fin sup } \varphi_\alpha^{(3)}(x),$$

während ihr gemeinsamer Wert (falls dieser existiert) das $\alpha^{(3)}$ -Integral von $f(x)$ über (a, x) , $S_\alpha^{(3)}(x) \equiv \int_a^x (P S^{(3)}) f(x) d\alpha(x)$, sein soll.

In gleicher Weise wie Satz 5²⁷⁾ läßt sich beweisen der

Satz 11. Das unbestimmte $\alpha(x)$ -Integral $S_\alpha^{(3)}(x)$ einer in (a, b) endlichen Funktion $f(x)$ in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, welche in (a, b) endlich und BVV ist, hat in jedem Punkte ξ von (a, b) die Eigenschaft, daß

$$\lim_{x \rightarrow \xi} [S_\alpha^{(3)}(x) - S_\alpha^{(3)}(\xi) - f(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}] = 0$$

ist; für jede perfekte Menge E , auf welcher $\alpha(x)$ BV ist, hat $S_\alpha^{(3)}(x)$ in den Punkten von E , in welchen $\alpha(x)$ stetig ist auf E , eine approximative $\alpha(x)$ -Ableitung in bezug auf E gleich $f(x)$, die Punkte einer Teilmenge vom V_{α_E} -Maß Null ausgenommen; $V_{\alpha_E}(x)$ hat hierbei die gleiche Bedeutung wie in Satz 5.

²⁶⁾ Nur muß man dabei, l. c. (§§ 6, 7), in den Definitionen $A_3, A_4 [B_3, B_4]$ in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ von den Majoranten [Minoranten] keine linksseitige bzw. rechtsseitige Stetigkeit fordern, sondern die Existenz eines endlichen, linksseitigen bzw. rechtsseitigen Grenzwertes, wobei der zugehörige Stetigkeitssprung nicht-negativ [nicht-positiv] ist. Diese Änderungen lassen den Wortlaut der Sätze (und den Umfang der zugehörigen Integraldefinitionen) übrigens ungeändert, wie sich unschwer einsehen läßt. (In den Beweisen der Sätze 13 bis 15 führe man auch jeden Punkt, in welchem $\alpha(x)$ stetig ist, und die in jenen Beweisen auftretenden, durch die Definitionen A_3, A_4, B_3, B_4 eingeführten Funktionen nicht alle stetig sind, in ein Intervall über, in welchem man $\alpha^*(x)$ konstant annehme und die aus den ebengenannten Funktionen hervorgehenden Funktionen sich linear ändern lasse.)

²⁷⁾ Man benutze dabei auch die in der vorigen Fußnote enthaltenen Bemerkungen.

§ 5.

Definition 10. Wenn $\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) endlich und BVV ist, wird die in (a, b) endliche Funktion $f(x)$ daselbst ein unbestimmtes (allgemeines Denjoy-Stieltjessches) $\alpha(x)$ -Integral $S_a^{(\alpha^*)}(x)$ haben, falls $S_a^{(\alpha^*)}(x)$ die folgenden Eigenschaften hat: 1. $S_a^{(\alpha^*)}(a) = 0$; 2. $S_a^{(\alpha^*)}(x)$ ist endlich, hat nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, während in einem linksseitigen oder rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte ξ von $\alpha(x)$ immer

$$\lim_{x \rightarrow \xi; x < \xi} [S_a^{(\alpha^*)}(x) - S_a^{(\alpha^*)}(\xi) - f(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}] = 0,$$

bzw.

$$\lim_{x \rightarrow \xi; x > \xi} [S_a^{(\alpha^*)}(x) - S_a^{(\alpha^*)}(\xi) - f(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}] = 0$$

ist; 3. es läßt sich (a, b) , ausgenommen die Punkte einer abzählbaren Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_i) derart, daß auf jedem P_i $\alpha(x)$ BV und $S_a^{(\alpha^*)}(x)$ totalstetig in bezug auf die zugehörige Funktion $U_{aP_i(x)}(x)^{15)}$ ist²³⁾; 4. wenn zu jeder in 3. genannten Menge P_i $V_{aP_i(x)}(x)$ die übliche Bedeutung hat, ist die approximative $\alpha(x)$ -Ableitung von $S_a^{(\alpha^*)}(x)$ in bezug auf P_i gleich $f(x)$ in allen zu P_i gehörenden Punkten ihrer Existenzmenge, welche Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ in bezug auf P_i sind²⁴⁾, eine Teilmenge vom $V_{aP_i(x)}(x)$ -Maß Null ausgenommen²⁵⁾.

Unter Anwendung von Satz 11 läßt sich in gleicher Weise wie Satz 6 beweisen⁴⁰⁾:

²³⁾ Die Punkte von P_i , welche Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ in bezug auf P_i sind und in welchen es keine endliche approximative $\alpha(x)$ -Ableitung von $S_a^{(\alpha^*)}(x)$ in bezug auf P_i gibt, bilden eine Menge vom $V_{aP_i(x)}$ -Maß Null. Vgl. Fußnote 24.

²⁴⁾ Die eindeutige Bestimmtheit von $S_a^{(\alpha^*)}(x)$ folgt durch Anwendung des Verfahrens, das Denjoy bei dem konstruktiven Aufbau seines (allgemeinen) Integrals anwandte [siehe z. B. Hobson, Theory of functions I (Third Ed. 1927), S. 694—697, 715, 716], unter Zuhilfenahme des in Fußnote 27 enthaltenen Satzes. Gibt es nur abzählbar viele Punkte von (a, b) , in welchen oberer und unterer Limes von $\alpha(x)$ nicht beide endlich sind, so ist diese eindeutige Bestimmtheit auch eine unmittelbare Folge von Satz 12. — Die l. c. 7), S. 186 (Fußnote 7) gegebene, abstrakte Integraldefinition umfaßt Definition 10 (11).

⁴⁰⁾ Man beachte, daß bei der Herleitung einer $\alpha(x)$ -Majorante $\varphi_a^{(3)}(x)$ aus $S_a^{(\alpha^*)}(x)$ zu dieser, damit die Majorante in den (nach Annahme) abzählbar vielen Punkten (x_n) , in welchen oberer und unterer Limes von $\alpha(x)$ nicht beide endlich sind, den Bedingungen III b, III b* von Definition A₂ genügen könne, u. a. eine Funktion $\varepsilon \cdot \chi(x)$ addiert werden muß; hierbei ist ε willkürlich positiv und $\chi(x)$ eine in (a, b) monoton zunehmende, endliche Funktion, welche in a gleich Null und in (a, b) linksseitig bzw. rechtsseitig unstetig ist in allen und nur in allen den Punkten unter den (x_n) , in welchen $\alpha(x)$ linksseitig bzw. rechtsseitig unstetig ist.

Satz 12. Wenn $\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) endlich und BVV ist, und eine endliche Funktion $f(x)$ in (a, b) ein unbestimmtes $\alpha(x)$ -Integral $S_a^{(3)}(x)$ gemäß Definition 9 hat, so existiert in (a, b) auch ihr unbestimmtes $\alpha(x)$ -Integral $S_a^{(3*)}(x)$ nach Definition 10, und es ist $S_a^{(3*)}(x) = S_a^{(3)}(x)$. Sind oberer und unterer Limes von $\alpha(x)$ in höchstens abzählbar vielen Punkten nicht beide endlich ⁴¹⁾, so folgt auch umgekehrt die Existenz von $S_a^{(3)}(x)$ aus der von $S_a^{(3*)}(x)$.

Bemerkung. Die im vorangehenden enthaltenen Beweisverfahren können auch dazu dienen, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz. Ersetzt man in den Definitionen A_2 und B_2 die Bedingungen IIIa, IIIb und IIIb* durch die zugehörigen, im folgenden unter 1, 2 oder 3 angegebenen Bedingungen, läßt man den Wortlaut der Definition 9 ungeändert und ersetzt man daneben die Bedingung 2 der Definition 10 durch die zugehörige, im folgenden unter 1, 2 oder 3 angegebene Bedingung, so sind im Falle 1 die so abgeänderten Integraldefinitionen 9 und 10 einander äquivalent bei jeder Funktion $\alpha(x)$, welche in (a, b) endlich und BVV ist, während sie in den Fällen 2 und 3 einander äquivalent sind, wenn $\alpha(x)$ in (a, b) stetig und BVV ist.

Fall 1. $\psi_a^{(3)}(x)$ und $\varphi_a^{(3)}(x)$ haben nur Unstetigkeiten erster Art in (a, b) , wobei die linksseitigen und rechtsseitigen Stetigkeitssprünge immer endlich und bei den Majoranten nicht-negativ, bei den Minoranten nicht-positiv sind; $S_a^{(3*)}(x)$ ist stetig in (a, b) .

Fall 2. $\psi_a^{(3)}(x)$, $\varphi_a^{(3)}(x)$ und $S_a^{(3*)}(x)$ sind endliche Ableitungen einer (primitiven) Funktion.

Fall 3. $\psi_a^{(3)}(x)$, $\varphi_a^{(3)}(x)$ und $S_a^{(3*)}(x)$ sind approximativ stetig in bezug auf eine in (a, b) stetige, bestimmt zunehmende Funktion $\beta(x)$ ⁴²⁾.

Dieser Satz bleibt auch dann gelten, wenn $f(x)$ nicht immer endlich zu sein braucht; nur muß man dann die Definitionen 10 und 9 erweitern in der durch Definition 11 und Fußnote 43 angegebenen Weise. Man erhält dann als besonderen Fall von 1, und zwar bei $\alpha(x) \equiv x$, die allgemeine Denjoysche Integration und die mit ihr äquivalente „verallgemeinerte“ Perronsche Integration [l. c. ³⁾, S. 258–269]; als Spezialfall von 2, und zwar bei $\alpha(x) \equiv x$, eine von S. Verblunsky eingeführte Integration [l. c. ⁷⁾, S. 190, 191 (§ 4: 3) und S. 198 (§ 8: 3)]; als Spezialfall von 3, bei $\alpha(x) \equiv \beta(x) \equiv x$, die „ β -Integration“ [Ridder, Fund. Math. 22 (1934), S. 147–162], während die in Fall 3 bei $\alpha(x) \equiv \beta(x)$ erhaltene Spezialisierung äquivalent ist mit den Definitionen

⁴¹⁾ Dies ist z. B. der Fall, wenn $\alpha(x)$ in (a, b) BVV* ist [siehe (PS)-Int. I, S. 655 (Def. 15)].

⁴²⁾ Siehe Fußnote 7.

15—18 aus l. c. ¹²⁾, S. 150—157 (die „ β “-Integration im Stieltjesschen Sinne) immer dann, wenn, l. c., $\alpha(x)$ in (a, b) bestimmt zunehmend ist.

Bemerkung. Die in (PS)-Int. I enthaltenen Beweisverfahren können auch dazu dienen, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz. Ersetzt man in den Definitionen A_4 und B_4 von (PS)-Int. I die Bedingungen 2, 4a, 4b und 4b* durch die zugehörigen, im folgenden unter 4, 5 oder 6 genannten Bedingungen, läßt man, l. c., den Wortlaut der Definition 20 ungeändert und ersetzt man daneben, l. c., die Bedingung 2 der Definition 21 durch die zugehörige, im folgenden unter 4, 5 oder 6 gegebene Bedingung, so sind im Falle 4 die so abgeänderten Integraldefinitionen 20 und 21 von (PS)-Int. I einander äquivalent bei jeder Funktion $\alpha(x)$, welche in (a, b) endlich und BVV* ist, während sie in den Fällen 5 und 6 einander äquivalent sind, wenn $\alpha(x)$ in (a, b) stetig und BVV* ist.

Fall 4. $\psi_a^{(2)}(x)$ und $\varphi_a^{(2)}(x)$ haben nur Unstetigkeiten erster Art in (a, b) , wobei die linksseitigen und rechtsseitigen Stetigkeitssprünge immer endlich und bei den Majoranten nicht-negativ, bei den Minoranten nicht-positiv sind; $S_a^{(2*)}(x)$ ist stetig in (a, b) .

Fall 5. $\psi_a^{(2)}(x)$, $\varphi_a^{(2)}(x)$ und $S_a^{(2*)}(x)$ sind endliche Ableitungen einer (primitiven) Funktion.

Fall 6. $\psi_a^{(2)}(x)$, $\varphi_a^{(2)}(x)$ und $S_a^{(2*)}(x)$ sind approximativ stetig in bezug auf eine in (a, b) stetige, bestimmt zunehmende Funktion $\beta(x)$ ¹³⁾.

Auch dieser Satz bleibt gelten, wenn $f(x)$ nicht immer endlich zu sein braucht; nur muß man dann die Definitionen 20 und 21 von (PS)-Int. I erweitern in der l. c. durch Definition 23 angegebenen Weise. Man erhält dann als besonderen Fall von 4, und zwar bei $\alpha(x) \equiv x$, die *spezielle Denjoysche Integration und die mit ihr äquivalente Perronsche Integration*; als Spezialfall von 5, und zwar bei $\alpha(x) \equiv x$, eine „spezielle“ *Verblunskysche Integration* [von uns eingeführt, l. c. ⁷⁾, S. 190, 191 (§ 4: 3) und S. 198 (§ 8: 3)]; schließlich als Spezialfall von 6, bei $\alpha(x) \equiv \beta(x) \equiv x$, die „ α “-Integration [Ridder, Fund. Math. 22 (1934), S. 137—147].

§ 6.

Definition 11. $\alpha(x)$ sei in (a, b) endlich und BVV. Bei einer in (a, b) definierten Funktion $f(x)$, welche unendlich wird auf einer Menge E von Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ (in bezug auf (a, b)), sollen die abzählbar vielen perfekten Mengen (P_j) derartig gewählt werden können, daß sie (a, b) bis auf abzählbar viele Punkte überdecken, daß $\alpha(x)$ auf jeder Menge P_j BV ist und daß das $V_{\alpha P_j(x)}(x)$ -Maß von $E \cdot P_j$ immer Null ist ($j = 1, 2, \dots$); hierbei sind $\alpha_{P_j}(x)$, $V_{\alpha P_j(x)}(x)$ in bekannter Weise in (a, b) aus $\alpha(x)$ und P_j hergeleitet. Eine der-

artige Funktion $f(x)$ hat in (a, b) ein unbestimmtes $\alpha^{(3*)}$ -Integral, $S_a^{(3*)}(x)$

$\equiv \int_a^x (PS^{(3*)}) f(x) d\alpha(x)$, wenn die Funktion

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{in den Punkten von } (a, b), \text{ in welchen } f(x) \text{ endlich ist,} \\ 0 & \text{in den übrigen Punkten von } (a, b) \end{cases}$$

in (a, b) ein unbestimmtes $\alpha^{(3*)}$ -Integral gemäß Definition 10 hat. Wir setzen dann:

$$\int_a^x (PS^{(3*)}) f(x) d\alpha(x) = \int_a^x (PS^{(3*)}) f^*(x) d\alpha(x).^{43)}$$

Das durch Definition 11 eingeführte Integral besitzt wieder die gewöhnlichen elementaren Integraleigenschaften.

Satz 13. $\alpha(x)$ sei in (a, b) endlich und BVV. Die in (a, b) definierten Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sollen nur unendlich werden oder voneinander verschieden sein können auf einer Menge E von Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ (in bezug auf (a, b)), zu welcher es eine Überdeckung von (a, b) durch eine abzählbare Menge H und abzählbar viele perfekte Mengen (P_j) gibt derart, daß $\alpha(x)$ auf jedem P_j BV ist und daß das zugehörige $V_{\alpha P_j}$ -Maß von $E \cdot P_j$ immer Null ist. Dann sind $f(x)$ und $g(x)$ entweder beide $\alpha^{(3*)}$ -integrierbar über (a, b) (gemäß Definition 11) oder nicht. Im Falle der $\alpha^{(3*)}$ -Integrierbarkeit ist für jedes x von (a, b) :

$$\int_a^x (PS^{(3*)}) f(x) d\alpha(x) = \int_a^x (PS^{(3*)}) g(x) d\alpha(x).$$

Der Beweis folgt aus den Definitionen 11 und 10 unter Anwendung des in Fußnote 27 enthaltenen Satzes.

Satz 14 (Zusammenhang von primitiver Funktion und unbestimmtem Integral). $\alpha(x)$ sei in (a, b) endlich und BVV; die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte sei abzählbar. Die in (a, b) endliche Funktion $F(x)$ besitze die folgenden Eigenschaften: 1. sie hat nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, wobei zu jedem linksseitigen oder (und) rechtsseitigen Unstetigkeitspunkt ξ von $F(x)$ eine endliche Zahl $A(\xi)$ gehört, für die

$$\lim_{x \rightarrow \xi; x < \xi} [F(x) - F(\xi) - A(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}] = 0$$

bzw. (und)

$$\lim_{x \rightarrow \xi; x > \xi} [F(x) - F(\xi) - A(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}] = 0$$

⁴³⁾ Unter Anwendung von Definition 9 läßt sich für die Funktion $f(x)$ in analoger Weise ein $\alpha^{(3)}$ -Integral $S_a^{(3)}(x)$ einführen.

ist; 2. (a, b) läßt sich, bis auf eine abzählbare Menge T , überdecken durch abzählbar viele perfekte Teilmengen (P_j) , auf deren jeder $\alpha(x)$ BV ist, und so, daß: a) für jeden Punkt ξ von P_j (j willkürlich), in welchem $\alpha(x)$ auf P_j stetig ist, höchstens abzählbar viele derartige Punkte ausgenommen, ein Intervall existiert mit ξ als Endpunkt⁴⁴⁾, für dessen innere, zu P_j gehörende Punkte (x) , in welchen $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ ist, auch immer $F(x) = F(\xi)$ ist; b) auf derselben Seite von ξ alle extremen $\alpha(x)$ -Derivierten von $F(x)$ in ξ in bezug auf P_j ⁴⁵⁾, soweit sie existieren, endlich sind.

Dann ist $F(x) - F(a)$ gemäß Definition 11 das unbestimmte $\alpha(x)$ -Integral einer jeden eindeutigen Funktion $f(x)$, welche in den Unstetigkeitspunkten (ξ) von $\alpha(x)$ gleich $A(\xi)$ ist und deren Werte in den übrigen Punkten man in folgender Weise erhält. Man überdecke (a, b) bis auf abzählbar viele Punkte durch abzählbar viele perfekte Mengen (Q_j) , auf deren jeder $\alpha(x)$ BV ist und für die jede Durchschnittsmenge $Q_j \cdot Q_k$ ($j \neq k$) abzählbar ist⁴⁶⁾; in denjenigen zu einer Menge Q_j gehörenden Punkten, in welchen $\alpha(x)$ stetig ist [auf (a, b)], welche zu keiner der übrigen Mengen (Q_k) gehören und in welchen es eine endliche approximative $\alpha(x)$ -Ableitung von $F(x)$ in bezug auf Q_j gibt, setze man $f(x)$ gleich dieser; in den übrigen Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ nehme man $f(x)$ willkürlich (endlich oder bestimmt unendlich) an⁴⁶⁾.

Beweis. Aus den Bedingungen 2a und 2b läßt sich (unter Beachtung der Bedingung 1) ableiten, daß (a, b) sich bis auf eine abzählbare Menge überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen (R_j) , auf deren jeder $\alpha(x)$ BV und $F(x)$ totalstetig in bezug auf die zugehörige Funktion $U_{\alpha R_j}(x)$ ist⁴⁷⁾. Dadurch folgt der Satz jedoch leicht aus den Definitionen 11 und 10 und dem Satze von Fußnote 27.

Aus den Eigenschaften des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals und unter Anwendung des Denjoeschen konstruktiven Integrationsverfahrens⁴⁸⁾, welches zu einer mit Definition 10 äquivalenten Integraldefinition führt, läßt sich ableiten der

Satz 15. $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ seien in (a, b) endlich und BVV. Hat dann die in (a, b) eindeutige Funktion $f(x)$ daselbst unbestimmte $\alpha(x)$ - und $\beta(x)$ -Integrale

⁴⁴⁾ Ob ξ linker oder rechter Endpunkt ist, darf sich mit ξ ändern.

⁴⁵⁾ Die Möglichkeit einer derartigen Überdeckung folgt nach dem Verfahren, das Denjoy bei seiner konstruktiven Integraldefinition anwandte.

⁴⁶⁾ Auch Satz X aus Ridder, Fund. Math. 22 (1934), S. 157 hat ein Analogon beim $\alpha^{(3*)}$ -Integral.

⁴⁷⁾ Man vergleiche den Beweis von Satz 8 und l. c. ⁴⁶⁾, S. 144, 145 (Beweis des Lemmas).

⁴⁸⁾ Siehe Hobson, l. c. ³⁹⁾, S. 694—697, 715, 716. Man benutze daneben den in Fußnote 27 gegebenen Satz.

gemäß Definition 11, so existiert in (a, b) auch das unbestimmte $\{\alpha(x) + \beta(x)\}$ -Integral von $f(x)$ nach derselben Definition, und es ist dann

$$\int_a^x (PS^{(3*)}) f(x) d\{\alpha(x) + \beta(x)\} = \int_a^x (PS^{(3*)}) f(x) d\alpha(x) + \int_a^x (PS^{(3*)}) f(x) d\beta(x).$$

Wir bemerken noch, daß im Falle einer monotonen Funktion $\alpha(x)$ eine nicht-negative Funktion $f(x)$ entweder gleichzeitig $\alpha(x)$ -Integrale (von gleichem Werte) im Sinne der Definition 11 und der Lebesgue-Stieltjesschen Definition hat, oder nicht⁴⁹⁾, während sich bei einer derartigen Funktion $\alpha(x)$ auch leicht für das $(PS^{(3*)})$ -Integral ein Satz über gliedweise Integration von Reihen ableiten läßt⁵⁰⁾.

Partielle Integration.

§ 7.

Satz 16. $\alpha(x)$ sei BV, $\beta(x)$ beschränkt und BVV in (a, b) ; außerdem sollen diese Funktionen keine gemeinsamen Unstetigkeitspunkte haben. $f(x)$ besitze über (a, b) ein Lebesgue-Stieltjessches Integral in bezug auf $\alpha(x)$, $g(x)$ ein $(PS^{(3*)})$ -Integral (im Sinne der Definition 11) in bezug auf $\beta(x)$ ⁵¹⁾.

Dann ist $f(x) \cdot \int_a^x g(x) d\beta(x)$ über (a, b) (LS)- und somit auch $(PS^{(3*)})$ -integrierbar in bezug auf $\alpha(x)$.

Ist auch $g(x) \cdot \int_a^x f(x) d\alpha(x)$ über (a, b) $(PS^{(3*)})$ -integrierbar in bezug auf $\beta(x)$, so gilt

$$\begin{aligned} & \int_a^b (LS) f(x) d\alpha(x) \cdot \int_a^b (PS^{(3*)}) g(x) d\beta(x) \\ &= \int_a^b (PS^{(3*)}) f(x) \cdot \left\{ \int_a^x g(x) d\beta(x) \right\} \cdot d\alpha(x) + \int_a^b (PS^{(3*)}) g(x) \cdot \left\{ \int_a^x f(x) d\alpha(x) \right\} \cdot d\beta(x). \end{aligned}$$

Zusatz. Fordert man außerdem, daß $\beta(x)$ stetig und $f(x)$ nicht-negativ [im allgemeinen einseitig beschränkt] in (a, b) ist, so läßt sich die $(PS^{(3*)})$ -Integrierbarkeit von $g(x) \cdot \int_a^x f(x) d\alpha(x)$ über (a, b) in bezug auf $\beta(x)$ beweisen.

⁴⁹⁾ Zum Beweise vergleiche man l. c. ¹⁵⁾, S. 9.

⁵⁰⁾ Man vergleiche l. c. ¹⁵⁾, S. 9, 10.

⁵¹⁾ Aus der Beschränktheit von $\beta(x)$ in (a, b) und der Bedingung 2 der Definition 10 folgt, daß $\int_a^x g(x) d\beta(x)$ in (a, b) ebenfalls beschränkt ist. Da $f(x)$ über (a, b) (LS)-integrierbar in bezug auf $\alpha(x)$ ist, hat auch $f(x) \cdot \int_a^x g(x) d\beta(x)$ ein Lebesgue-Stieltjessches $\alpha(x)$ -Integral über (a, b) .

Bemerkung. Der Spezialfall, welchen man aus Satz 16 nebst Zusatz erhält, wenn $\beta(x) \equiv x$, $f(x) \equiv 1$ angenommen wird, ist ein bekannter Satz über partielle Integration beim allgemeinen Denjowschen Integral⁵³⁾.

Der Beweis⁵³⁾ verläuft in analoger Weise wie der eines Satzes über partielle Integration beim speziellen Perron-Stieltjesschen $\beta(x)$ -Integral ($\beta(x)$ im Integrationsintervall BVV*)⁵⁴⁾.

⁵³⁾ Siehe z. B. Saks, *Théorie de l'intégrale* (Varsovie 1933), S. 203.

⁵⁴⁾ Das hier angedeutete Beweisverfahren von Satz 16 läßt (bei $f(x)$ und $g(x)$ endlich) aus den im ersten Absatz von Satz 16 enthaltenen Bedingungen allein schon ableiten, daß die Funktion

$$(8) \quad \int_a^x (LS) f d\alpha \cdot \int_a^x (PS^{(3*)}) g d\beta - \int_a^x (LS) f(x) \cdot \left\{ \int_a^x g d\beta \right\} \cdot d\alpha$$

den Bedingungen 1, 3 und 4 der Definition 10 genügt, wenn man daselbst $f(x)$ durch

$g(x) \cdot \int_a^x f d\alpha$ und $\alpha(x)$ durch $\beta(x)$ ersetzt. Um dann für die Funktion (8) auch die

Bedingung 2 der Definition (und damit die Behauptung des Zusatzes) beweisen zu können, genügt es, außerdem die im Satze enthaltenen Forderungen einzuführen. Wir wollen dazu nur folgendes bemerken. Wie im Beweise von Satz 31 in (PS)-Int. I betrachte man u. a. ein Intervall (c, d) , in welchem die l. c., S. 677, genannten Eigenschaften 1, 2, 3 erfüllt sind (nur mit „BV“ statt „BV*“ und „Variationen“ statt

„Oszillationen“). Dann soll $\int_c^x (PS^{(3*)}) g(x) \cdot \left\{ \int_a^x f d\alpha(x) \right\} \cdot d\beta(x)$ für $x = c$ gleich

Null genommen, für $c < x \leq d$ durch eine Summe definiert werden [vgl. für $x = d$ die l. c., S. 677, gegebene Formel; man lese „ $(PS^{(3*)})$ “ statt „ $(PS^{(2)})$ “], von der man beweisen kann [vgl. l. c. S. 678–680], daß sie für jedes x mit $c < x \leq d$ gleich

$$H(c, x) \equiv \int_a^x (LS) f d\alpha \cdot \int_a^x (PS^{(3*)}) g d\beta - \int_a^c (LS) f d\alpha \cdot \int_a^c (PS^{(3*)}) g d\beta \\ - \int_c^x (LS) f(x) \cdot \left\{ \int_a^x g d\beta(x) \right\} \cdot d\alpha(x)$$

ist. Man nehme $H(c, c) = 0$. Nun ist für $c \leq \xi_1 < \xi_2 \leq d$

$$H(c, \xi_2) - H(c, \xi_1) = \int_a^{\xi_2} f d\alpha \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} g d\beta + \int_a^{\xi_1} g d\beta \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} f d\alpha - \int_{\xi_1}^{\xi_2} f \cdot \left\{ \int_a^x g d\beta \right\} \cdot d\alpha.$$

Man kann sich auf den Fall beschränken, daß $\alpha(x)$ in (a, b) monoton zunimmt und $f(x)$

nicht-negativ ist; dann gibt es eine zwischen oberer und unterer Schranke von $\left| \int_{\xi_1}^x g d\beta \right|$ im Intervall $(\xi_1 \leq x \leq \xi_2)$ liegende Zahl η , mit der sich

$$|H(c, \xi_2) - H(c, \xi_1)| \leq \int_a^b f d\alpha \cdot \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} g d\beta \right| + \int_{\xi_1}^{\xi_2} f d\alpha \cdot \eta \leq 2\eta \cdot \int_a^b f d\alpha$$

schreiben läßt. Da $\beta(x)$, und somit auch $\int_a^x g d\beta$, in (a, b) stetig ist, ist $H(c, x)$ stetig in (c, d) .

⁵⁴⁾ Siehe (PS)-Int. I, S. 674 (Satz 31). — Nachträgliche Bemerkung zu

Folgerung (der zweite Mittelwertsatz für das $(PS^{(3*)})$ -Integral). $\alpha(x)$ sei endlich und monoton, $\beta(x)$ stetig und BVV in (a, b) . Wenn $g(x)$ in (a, b) ein $(PS^{(3*)})$ -Integral in bezug auf $\beta(x)$, $\int_a^x (PS^{(3*)}) g(x) d\beta(x)$, hat, gibt es einen Punkt ξ im abgeschlossenen Intervall (a, b) , für den

$$\int_a^b (PS^{(3*)}) g(x) \cdot \alpha(x) \cdot d\beta(x) = \alpha(a) \cdot \int_a^{\xi} (PS^{(3*)}) g(x) d\beta(x) + \alpha(b) \cdot \int_{\xi}^b (PS^{(3*)}) g(x) d\beta(x)$$

ist.

Das Beweisverfahren ist dasselbe wie beim Denjoyschen Integral ⁵⁵⁾.

(PS)-Int. I. Die Bedingung der $(PS^{(3)})$ -Integrierbarkeit von $f(x) \cdot \int_a^x g(x) d\beta(x)$

in bezug auf $\alpha(x)$ in Satz 31 und die Bedingung der Beschränktheit von $\int_a^x g(x) d\beta(x)$ in der Folgerung zu Satz 31 lassen sich aus den übrigen Forderungen ableiten [man vergleiche hier die Fußnote 51)].

⁵⁵⁾ Siehe z. B. Saks, l. c. ⁵²⁾, S. 203, 204.

(Eingegangen am 30. 1. 1938).

Funktionen geringster Steilheit.

Von

Wilhelm Damköhler in München.

Einleitung.

Problemstellung und Ergebnisse. Ein bekannter Satz aus der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen besagt, daß für eine stetige und in einem Intervall J eindeutige Funktion $f(x)$ die untere (obere) Grenze ihres Differenzenquotienten $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ($x_1, x_2 \in J$) übereinstimmt mit der unteren (oberen) Grenze irgendeiner ihrer vorderen oder hinteren Derivierten in dem nämlichen Intervall J . Durch diesen Satz wird also unabhängig von irgendwelchen spezielleren Voraussetzungen über die Derivierten eine Beziehung hergestellt zwischen ihnen und dem Differenzenquotienten einer Funktion $f(x)$. Macht man nun aber solche Voraussetzungen, indem man etwa verlangt, daß die (als existierend angenommene) Ableitung $f'(x)$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge $\mathfrak{M} \subset J$ eine Ungleichung der Form

$$(E. 1) \quad f'(x) \geq \Delta(x) > 0$$

erfüllen soll, in der $\Delta(x)$ eine eindeutige, stetige und stets positive Funktion bedeutet, so wird man erwarten, daß sich ihr eigentümlicher Einfluß auch irgendwie im Betrage des Differenzenquotienten $\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right|$ bemerkbar machen muß, und es ist zu vermuten, daß die hier obwaltenden Zusammenhänge besonders deutlich dann hervortreten werden, wenn man nicht nur eine einzelne (E. 1) erfüllende Funktion für sich betrachtet, sondern gleich die Gesamtheit $\mathfrak{F}(J, \mathfrak{M})$ aller (E. 1) erfüllenden Funktionen studiert; denn der Übergang zu $\mathfrak{F}(J, \mathfrak{M})$ kommt offensichtlich einer Elimination aller individuellen Eigenschaften der einzelnen $f(x)$ gleich, welche möglicherweise sonst noch auf die Größenordnung von $\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right|$ Einfluß nehmen könnten.

Fragen der Variationsrechnung nun, welche mit dem Problem der Äquivalenz im großen von indefiniten mit definiten Variationsproblemen zusammenhängen¹⁾, machen insbesondere die Untersuchung folgender zwei-

¹⁾ Vgl. meine Arbeit: Über indefinite Variationsprobleme, Math. Annalen **110** (1934), S. 230–283.

dimensionaler Aufgabe wünschenswert, die als nähere Ausführung zum oben besprochenen eindimensionalen Fall angesehen werden kann:

In einem einfach zusammenhängenden Bereich \mathfrak{B} der xy -Ebene sei eine abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} und ein Feld $\{C\}$ von Integralkurven des Differentialgleichungssystems

$$(E. 2) \quad \dot{x} = \xi_1(x, y), \quad \dot{y} = \xi_2(x, y)$$

gegeben, das eine stetige rechte Seite hat und 1. durch jeden nicht-singulären²⁾ Punkt genau eine Integralkurve C hindurchschickt, sowie 2. auf \mathfrak{M} keine singulären Punkte besitzt. In \mathfrak{B} sei weiter eine eindeutige, stetige und stets positive Funktion $\Delta(x, y) \geq m_1 > 0$ gegeben, und es bedeute $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ die Gesamtheit aller in \mathfrak{B} eindeutigen und stetigen Funktionen $f(x, y)$, welche auf \mathfrak{M} folgende Bedingung erfüllen: Bezeichnet ds_C das positiv orientierte Linienelement auf einer Integralkurve C des Systems (E. 2) und $\frac{df}{ds_C}$ die längs dieses Linienelements genommene Richtungsableitung von $f(x, y)$ (sofern eine solche existiert), so soll auf jedem C in fast allen³⁾ Punkten seines Durchschnitts $C \cdot \mathfrak{M}$ mit der Punktmenge \mathfrak{M} die Ungleichung

$$(E. 3) \quad \frac{df}{ds_C} \geq \Delta(x, y) \geq m_1 > 0$$

gelten.

Nennen wir dann „Steilheit T_f einer Funktion $f(x, y)$ “ die obere Grenze des Absolutbetrages ihres Differenzenquotienten

$$(E. 4) \quad \left| \frac{f(P_2) - f(P_1)}{E(P_2, P_1)} \right|$$

im Bereiche \mathfrak{B} , wobei $E(P_2, P_1)$ die euklidische Länge der aller kürzesten, P_2 innerhalb \mathfrak{B} mit P_1 verbindenden Linie sein soll, so steht zum Problem die Angabe des kleinstmöglichen Wertes $T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ aller dieser Steilheiten T_f , wenn f durch die Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ variiert, und seines Zusammenhangs mit der Verteilung der Punktmenge \mathfrak{M} über den Bereich \mathfrak{B} .

Zur Lösung dieser Frage führen wir eine Kurvenklasse $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ aller in \mathfrak{B} liegenden geschlossenen, orientierten und \mathfrak{M} schneidenden Kurven c ein und bilden auf ihr das Funktional

$$(E. 5) \quad q(c) = \frac{\int_c \Delta ds}{\int_c ds}$$

²⁾ Ein Punkt heiße singulär, wenn in ihm $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ ist.

³⁾ Der Ausdruck „fast alle“ bezieht sich hier auf das längs C gemessene lineare Lebesguesche Maß der Punktmenge $C \cdot \mathfrak{M}$.

(§ 1), in dem c' die Teilmenge aller jener Punkte von c ist, in welchen c auf der Punktmenge \mathfrak{M} die orientierten Integralkurven C von (E. 2) gleichsinnig berührt, während $c'' = c - c'$ wird ⁴⁾). Mittels seiner oberen Grenze

$$(E. 6) \quad \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \text{obere Grenze } q(c) \\ c \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

auf $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ läßt sich dann die aufgeworfene Frage in der Gleichung

$$(E. 7) \quad T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

auf kürzeste und vollständigste Weise beantworten und gleichzeitig zeigen, daß für die kleinstmöglichen Steilheitswerte der T , vornehmlich die „mittlere Dichtigkeit“ jener Linienelemente ds_c auf den Kurven $c \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ maßgeblich ist, längs welcher sie auf \mathfrak{M} die Feldkurven (E. 2) gleichsinnig berühren.

Dieses abgerundete, hauptsächlich durch die schwache Differenzierbarkeitsforderung (E. 3) bedingte Ergebnis verlangt nun danach, auch den Einfluß weitergehender über die $f(x, y)$ gemachten Differenzierbarkeitsforderungen näher kennenzulernen. Die einfachste in dieser Hinsicht formulierbare Verschärfung ist nun offenbar die nach dem Vorhandensein noch stetiger erster Ableitungen f_x und f_y für die $f(x, y)$, die dann auch sinntentsprechend an Stelle der Nebenbedingung (E. 3) die folgende stärkere erfüllen sollen: Überall auf \mathfrak{M} gelte

$$(E. 8) \quad f_x \cdot \xi_1 + f_y \cdot \xi_2 \geq \Delta \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Die Gesamtheit aller dieser (E. 8) befriedigenden Funktionen heiße $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$. Bezeichnen wir dann als Steilheit T , einer solchen Funktion das Maximum des Ausdruckes $\sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ im Bereich \mathfrak{B} und mit $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ die untere Grenze aller dieser T , wenn $f(x, y)$ durch die Klasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ variiert, so handelt es sich jetzt um Angabe des Wertes dieses $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ und seines Zusammenhanges mit der Punktmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$. Das Ergebnis ist hier leider nicht ein so vollständiges wie im vorigen Falle der Funktionsklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$, da sich im allgemeinen für $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ nur zwei Schranken angeben lassen, eine obere und eine untere, die allein von der Verteilung der Punktmenge \mathfrak{M} über die Kurven $c \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ hin abhängen und die nicht notwendigerweise immer auch zusammenfallen müssen. Als Grund für dieses abweichende Verhalten wird man wohl den Umstand anzusehen haben, daß die Forderung

⁴⁾ $q(c)$ bedeutet offenbar ein Maß für den „relativen Anteil“ der auf c gelegenen Berührungspunkte c' mit Linienelementen der Feldkurven C , soweit diese durch Punkte der Menge \mathfrak{M} gehen. Ganz allgemein wollen wir unter „relativem Anteil“ einer auf c gelegenen Punktmenge \mathfrak{M} den Wert eines „Dichtigkeits“-Quotienten der Art $(\int_{\mathfrak{M}} g(s) ds) : (\int_c ds)$ verstehen, in welchem $g(s)$ eine für das jeweils interessierende Problem charakteristische positive summierbare Gewichtsfunktion bedeutet und ds das Bogenelement von c ist. (Vgl. hierzu etwa den § 8 des Hauptteils.)

nach dem Vorhandensein noch stetiger erster Ableitungen f_x und f_y der untersuchten Funktionen und die damit verbundene größere „Glätte“ in ihrem Verlaufe auch eine feinere Kenntnis hinsichtlich der Werteverteilung von $\Delta(x, y)$ über die Punktmenge \mathfrak{M} notwendig macht, deren Charakter allerdings noch völlig im dunklen liegt. Nun zum Resultat selber!

Bezeichnet man mit α ($-\pi \leq \alpha \leq +\pi$) den Winkel zwischen dem orientierten Linienelement ds_c der Kurve c und der Richtung des Vektors (ξ_1, ξ_2) und bestimmt man die beiden Funktionale $\lambda(c)$ und $\omega(c)$ als die positiven Wurzeln (sofern sie existieren!) der zwei Gleichungen

$$(E. 9) \quad \begin{cases} \lambda \cdot \int_{c-\mathfrak{M}c} ds + \int_{\mathfrak{M}c} [|\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds = 0, \\ \text{bzw.} \\ \omega \cdot \int_{c-\mathfrak{M}c^+} ds + \int_{\mathfrak{M}c^+} [|\sin \alpha| \cdot \sqrt{\omega^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds = 0 \end{cases}$$

(c^+ ist die Teilmenge derjenigen Punkte von c , in denen $\cos \alpha \geq 0$ ist), so kann man die für $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ geltenden Beziehungen in folgender Form aussprechen: Entweder ist $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \text{Max}_{\mathfrak{M}} \Delta(x, y)$, oder aber es besteht die Ungleichung

$$(E. 10) \quad \text{obere Grenze } \omega(c) \leq T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \leq \text{Max}_{c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})} \lambda(c),$$

falls $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) > \text{Max}_{\mathfrak{M}} \Delta(x, y)$ ist (Satz 11 des § 24).

Nur wenn hier in (E. 10) die beiden äußersten Glieder zusammenfallen, herrscht vollkommene Analogie zu den Verhältnissen in der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$, und es läßt sich dann auch $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ in entsprechender Weise durch die Betrachtung der Dichtigkeitsverteilungen der Punkte \mathfrak{M} auf den Kurven $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ nach den Formeln (E. 10) berechnen.

Die Disposition der Arbeit ist nun folgende: Sie zerfällt in zwei Teile A und B , die gesondert den Funktionenklassen $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ und $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ gewidmet sind. Vorangestellt ist in beiden Teilen die Theorie des jeweils charakteristischen Funktionals $q(c)$ und $\lambda(c)$, der dann anschließend die Existenzsätze für die entsprechenden Funktionenklassen folgen. Der eigentliche Kern der Theorie der Klasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ ist ein wesentlich kombinatorisch-topologischer, wie er in den §§ 7 mit 10 zutage tritt, und der aus der verschleiern Dunkelheit, in welche er durch die Verwendung allgemeiner Punktmengen \mathfrak{M} gebracht wird, nur durch das Hilfsmittel der Überdeckungssätze von Vitali und Borel wieder hervorgeholt werden kann (§§ 11 mit 16).

Die Theorie der Klasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ wird durch Grenzübergang aus der Theorie der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ gewonnen, indem man den Bereich \mathfrak{B} (die abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M}) in einen umfassenderen Bereich \mathfrak{B} (ab-

geschlossene Punktmenge \mathfrak{M}) einbettet und diese sich schließlich auf \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{M} zusammenziehen läßt. Charakteristische Hilfsmittel sind dabei einmal die bekannten „Tonellischen Polynome“ (Formel (22. 3)), zum anderen die Oberhalbstetigkeit des Funktional $\lambda(c)$ auf der Klasse aller geschlossenen rektifizierbaren Kurven c gleichmäßig beschränkter Bogenlänge.

Schließlich wird noch an einem Beispiele gezeigt, daß der Übergang von der Forderung bloßer Beschränktheit der Differenzenquotienten zu der nach dem Vorhandensein stetiger erster Ableitungen auch hinsichtlich der kleinstmöglichen noch auftretenden Steilheiten eine Verschärfung darstellt, indem nämlich wirklich der Fall

$$T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) < T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

mit Ausschluß des Gleichheitszeichens vorkommen kann.

Teil A.

I. Das Funktional $q(c)$.

§ 1. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ fortan immer die Gesamtheit der geschlossenen rektifizierbaren Kurven c aus \mathfrak{B} , die Punkte mit der abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$ gemein haben, und führen die *kanonische Zerlegung* einer jeden solchen Kurve: $c = c' + c''$ folgendermaßen ein: c' enthält alle und nur diejenigen Punkte $P \in c$, die 1. auf \mathfrak{M} gelegen sind, und in denen 2. die orientierten Linienelemente ds_c von c die Vektoren (ξ_1, ξ_2) (Formel (E. 2)) gleichsinnig berühren; $c'' = c - c'$ umfaßt den Rest der vorhandenen Punkte. Auf $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ definieren wir dann ein Funktional $q(c)$ durch die Vorschrift⁵⁾:

$$(1.1) \quad q(c) = \begin{cases} \frac{\int_{c'} \Delta ds}{\int_{c'} ds} & \text{für nicht verschwindenden Nenner } \int_{c'} ds \neq 0, \\ \infty & \text{für verschwindenden Nenner } \int_{c'} ds = 0, \\ & \text{aber nicht verschwindenden Zähler } \int_{c'} \Delta ds \neq 0, \end{cases}$$

das also nur dann unbestimmt sein soll, falls sowohl c' als auch c'' das Lebesguesche Maß Null haben (= Ausartung der Kurve c in einen Punkt!), und schreiben für seine obere Grenze auf $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \text{obere Grenze } q(c) &= \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}). \\ c &\in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \end{aligned}$$

⁵⁾ Die hier und im folgenden verwendeten Integrale sind stets Lebesguesche Integrale, ebenso bezeichne der Buchstabe μ stets das Lebesguesche Maß, und zwar je nach Bedarf das eindimensionale auf einer Kurve oder auch das zweidimensionale auf einem Flächenstück.

Daneben betrachten wir noch die Menge $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ aller einfach geschlossenen rektifizierbaren und orientierten Jordankurven $c \subset \mathfrak{B}$ und bezeichnen die obere Grenze des Funktionals $q(c)$ innerhalb dieser engeren Kurvenklasse durch

$$(1.3) \quad \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \text{obere Grenze } q(c). \\ c \subset \tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

Über dieses Funktional gelten nun eine Anzahl von Sätzen, die hier in der Reihenfolge, wie sie nachher für den Aufbau der Theorie herangezogen werden müssen, nacheinander behandelt werden sollen. Als Grundlage für alles Folgende dient dabei der Satz 1, welcher die Gleichheit der beiden durch (1.2) und (1.3) definierten oberen Grenzen aussagt:

Satz 1. *Es ist stets*

$$(1.4) \quad \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}).$$

Zu seinem Beweise benötigen wir den Begriff „Strahldichte der Menge \mathfrak{M} in einem ihrer Punkte P “, welcher ein Maß für die Stärke der Belegung der einzelnen Feldrichtungen (ξ_1, ξ_2) mit Punkten der Menge \mathfrak{M} darstellt und der dadurch aufs engste verbunden ist mit den Zusammenhängen, die zwischen $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ und der Werteverteilung der Funktion $\Delta(x, y)$ über die Menge \mathfrak{M} hin bestehen.

§ 2. *Die Strahldichte der Menge \mathfrak{M} in einem Punkte $P \subset \mathfrak{M}$.* Grenzen wir um einen beliebigen Punkt $P \subset \mathfrak{M}$ 1. einen Kreis K_ρ vom Radius $\rho > 0$ und 2. einen Winkelraum W_ϵ vom halben Öffnungswinkel $\epsilon > 0$ symmetrisch um die Richtung des durch P gehenden Vektors (ξ_1, ξ_2) ab (Fig. 1) und legen durch P innerhalb des Durchschnittes

$$D_{\rho, \epsilon} = K_\rho \cap W_\epsilon$$

alle rektifizierbaren und orientierten einfachen Jordanbögen γ , so können wir folgende Betrachtungen anstellen: Bedeutet γ' die Gesamtheit derjenigen Punkte Q von γ , die 1. auf \mathfrak{M} gelegen sind und in denen dort 2. die orientierten Linienelemente von γ die Richtung des durch Q gehenden Vektors (ξ_1, ξ_2) besitzen, so wird der Quotient

$$(2.1) \quad \frac{\int_{\gamma'} ds}{\int_{\gamma} ds}$$

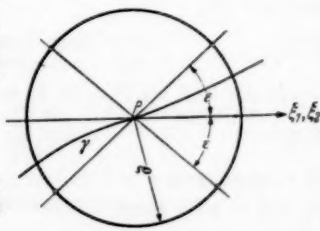


Fig. 1.

auf der Gesamtheit der innerhalb $D_{\varepsilon, \varrho}$ verlaufenden einfachen Jordanbögen eine obere Grenze $N(P; \varepsilon, \varrho)$ haben, die mit abnehmendem $(\varepsilon, \varrho) \rightarrow 0$ nicht zunimmt. Der Grenzwert

$$(2.2) \quad N(P) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varrho \rightarrow 0}} N(P; \varepsilon, \varrho)$$

wird daher stets existieren und soll die *Strahldichte* der Punktmenge \mathfrak{M} in ihrem Punkte P genannt werden.

Es ist klar, daß in jedem Punkte $P \in \mathfrak{M}$, durch den ein ganzes zusammenhängendes und auf \mathfrak{M} gelegenes Integralkurvenstück des Gleichungssystems (E. 2) hindurchgeht, die Strahldichte $N(P)$ den Wert 1 hat. Es kann aber auch noch andere Punkte $P \in \mathfrak{M}$ mit $N(P) = 1$ geben, durch welche solche zusammenhängende und auf \mathfrak{M} gelegene Integralkurvenstücke nicht gehen müssen. Man denke nur an den Fall, daß etwa ein rektifizierbares Kurvenstück γ in \mathfrak{B} existiert, dessen Teil γ' auf γ gemessen ein positives Lebesguesches Maß besitzt; dann herrscht nach einem bekannten Satze von Lebesgue in allen Punkten $P \in \gamma'$, mit einziger Ausnahme einiger solcher, die aber nur eine Teilmenge vom auf γ gemessenen Maße Null ausmachen, die Dichte $N(P) = 1$.

Bezeichnen wir nun die Gesamtheit der Punkte $P \in \mathfrak{M}$, in denen \mathfrak{M} die Strahldichte $N(P) = 1$ besitzt, mit \mathfrak{M}^* , so läßt sich der obenerwähnte und für den Beweis von (1. 4) wichtige Zusammenhang zwischen $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ und der Funktion $\Delta(x, y)$ in dem Satz aussprechen:

Satz 2. Die obere Grenze Δ^* der Funktion $\Delta(x, y)$ auf der Punktmenge $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}$ ist nie größer als die obere Grenze $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ des Funktionals $q(c)$ auf $\bar{\mathfrak{C}}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$:

$$(2.3) \quad \Delta^* = \text{obere Grenze } \Delta(x, y) \leq q(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}).$$

$(x, y) \in \mathfrak{M}^*$

In der Tat, sei $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ ein Punkt von \mathfrak{M}^* , in welchem

$$(2.4) \quad \Delta(\bar{x}, \bar{y}) \geq \Delta^* - \varepsilon > 0$$

bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ist, und grenzen wir um \bar{P} einen so kleinen Kreis K_ϱ ab, daß in allen seinen Punkten die Ungleichung

$$(2.5) \quad |\Delta(x, y) - \Delta(\bar{y}, \bar{x})| \leq \varepsilon$$

besteht, so können wir in diesem Kreis stets einen durch \bar{P} gehenden einfachen Jordanbogen γ so finden, daß der Quotient

$$(2.6) \quad \frac{\int_\gamma ds}{\int_\gamma ds} \geq 1 - \varepsilon$$

ist.

Bezeichnen wir dann den rückwärts durchlaufenen Bogen γ mit $\bar{\gamma}$, so können wir eine (ausgeartete einfach geschlossene) Jordankurve c der Klasse $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ dadurch gewinnen, daß wir $c = \gamma + \bar{\gamma}$ setzen; für ihre kanonische Zerschneidung gelten dann folgende Relationen: Es ist 1.

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mit} \\ c' = \gamma' + \bar{\gamma}', \quad c'' = \gamma'' + \bar{\gamma}'', \quad \gamma' \subset \bar{\gamma}'', \quad \bar{\gamma}' \subset \gamma'' \\ c'' = (\gamma'' + \gamma') + (\bar{\gamma}'' - \gamma') = \gamma + (\bar{\gamma}'' - \gamma') \end{array} \right.$$

und 2.

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mit} \\ c' \subset \gamma' + \gamma'' = \gamma, \quad \gamma' + (\bar{\gamma}'' - \gamma') = \bar{\gamma}'' \subset \gamma = \gamma' + \gamma'' \\ (\bar{\gamma}'' - \gamma') \subset \gamma'' \end{array} \right.$$

Wir bilden nun das Funktional $q(c)$ und erhalten für dasselbe unter Heranziehung von (2.4) und (2.5):

$$(2.9) \quad q(c) = \frac{\int_{c'} \Delta ds}{\int_{c''} ds} = \frac{\int_{c'} [\Delta(x, y) - \Delta(\bar{x}, \bar{y})] ds}{\int_{c''} ds} + \Delta(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \frac{\int_{c'} ds}{\int_{c''} ds} \\ \geq (\Delta^* - 2\varepsilon) \cdot \frac{\int_{c'} ds}{\int_{c''} ds},$$

worin wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit ε so klein gewählt denken können, daß auch noch $\Delta^* - 2\varepsilon > 0$ ist.

Aus (2.8) und (2.6) entnimmt man jetzt

$$\int_{\bar{\gamma}'' - \gamma'} ds \leq \int_{\gamma''} ds = \int_{\gamma} ds - \int_{\gamma'} ds \leq \varepsilon \cdot \int_{\gamma} ds,$$

während (2.7)

$$\int_{c'} ds \geq \int_{\gamma'} ds \quad \text{und} \quad \int_{c''} ds = \int_{\gamma} ds + \int_{\bar{\gamma}'' - \gamma'} ds \leq (1 + \varepsilon) \cdot \int_{\gamma} ds$$

ergibt. Dies in (2.9) eingeführt und nochmals (2.6) herangezogen, liefert

$$q(c) \geq (\Delta^* - 2\varepsilon) \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

worin alle Behauptungen des Satzes 2 enthalten sind.

§ 3. Nun zum Beweise von (1.4)! Wir beginnen mit der Bemerkung, daß stets

$$(3.1) \quad \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \leq \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

sein muß, da ja $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ eine Unterklasse der Kurvenmenge $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ ist. Schreiben wir dann eine Zahl $\varepsilon > 0$ beliebig vor, so können wir dazu aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ eine Kurve c bestimmen, die

$$(3.2) \quad q(c) > \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) - \varepsilon$$

erfüllt. c zerlegen wir in höchstens abzählbar unendlich viele einfachgeschlossene Jordankurven g_k ($k = 1, 2, \dots$) und eine Menge $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ der „doppelt durchlaufenen“ Punkte $P \in c$, die sich stets so in zwei „gleich große“⁶⁾ Teile \mathfrak{N}_1 und \mathfrak{N}_2 zerspalten läßt, daß 1. jeder Punkt P der xy -Ebene, der zu $\mathfrak{N}_1(\mathfrak{N}_2)$ gehört, auch umgekehrt in $\mathfrak{N}_2(\mathfrak{N}_1)$ vorkommt, und daß 2. der Durchlaufungssinn des Linienelementes ds_{c_1} von c durch den Punkt $P \in \mathfrak{N}_1$ ($P \in \mathfrak{N}_2$) genau entgegengesetzt ist dem Durchlaufungssinn des Linienelementes ds_{c_2} von c (das sich aber mit ds_{c_1} deckt) durch denselben Punkt P , wenn er als zu $\mathfrak{N}_2(\mathfrak{N}_1)$ gehörig betrachtet wird⁷⁾:

$$(3.3) \quad c = \sum_k g_k + (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2).$$

Die kanonische Zerlegung der Kurve c überträgt sich dann mittels der Gleichungen

$$(3.4) \quad \mathfrak{N}'_i = c' \cap \mathfrak{N}_i, \quad \mathfrak{N}''_i = c'' \cap \mathfrak{N}_i$$

auch auf die Punktmengen \mathfrak{N}_i ($i = 1, 2$), und wir können nun, da ja die g_k zu $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ gehören, die Abschätzung aufschreiben:

$$(3.5) \quad (\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) - \varepsilon) \cdot \left[\sum_k \int_{g_k} ds + \int_{\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}''_2} ds \right] \\ \leq \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \cdot \sum_k \int_{g_k} ds + \int_{\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2} \Delta ds.$$

Es herrscht aber, falls überhaupt $\int_{\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2} ds > 0$ ist, in fast allen Punkten $P \in (\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2)$ die Strahldichte 1 (siehe § 2), so daß wir $\int_{\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2} \Delta ds$ nach oben durch die Ungleichung

$$\int_{\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2} \Delta ds \leq \Delta^* \cdot \int_{\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2} ds$$

abschätzen können. Nach dem Satze 2 des vorigen Paragraphen dürfen wir dies aber sogleich zu der Abschätzung

$$\int_{\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2} \Delta ds \leq \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \cdot \int_{\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2} ds$$

erweitern, und wenn wir nun bedenken, daß stets die Mengenungleichung

$$(\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2) \subset (\mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2)$$

⁶⁾ Das soll heißen: \mathfrak{N}_1 und \mathfrak{N}_2 haben auf der orientierten Kurve c dasselbe Lebesguesche Maß.

⁷⁾ Die Möglichkeit einer solchen Zerspaltung wurde von mir bewiesen in der Arbeit: Struktur der geschlossenen rektifizierbaren Kurven, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 177 (1937), S. 37–54.

gilt, so bekommen wir schließlich

$$\int_{\mathfrak{A}'_1 + \mathfrak{A}'_2} \Delta ds \leq \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \cdot \int_{\mathfrak{A}''_1 + \mathfrak{A}''_2} ds.$$

Dies in (3.5) eingeführt und beiderseits das von Null verschiedene Glied

$$\left(\sum_k \int_{\mathfrak{A}_k} ds + \int_{\mathfrak{A}''_1 + \mathfrak{A}''_2} ds \right) \text{ gestrichen, liefert}$$

$$\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) - \varepsilon \leq \hat{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}),$$

woraus bei Berücksichtigung von (3.1) und der Willkür von $\varepsilon > 0$

$$\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \hat{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

folgt. Das ist aber gerade die Behauptung des Satzes 1 (§ 1).

§ 4. Der hiermit bewiesene Satz 1 bildet jetzt die Grundlage für die nachfolgenden Betrachtungen. Als eine erste Anwendung desselben beweisen wir den

Satz 3. Ist

$$(4.1) \quad \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) > \max_{(x, y) \in \mathfrak{M}} \Delta(x, y),$$

so gibt es für das Funktional $q(c)$ stets Maximalfolgen $\{c_i\}$ von Kurven gleichmäßig beschränkter Bogenlänge aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$.

Zu dem Ende denken wir uns im Bereiche \mathfrak{B} zwei eindeutige und stetige Funktionen $p(x, y)$ und $q(x, y)$ gegeben, die in ganz \mathfrak{B} die Relation

$$(4.2) \quad \max_{\mathfrak{B}} \sqrt{p^2 + q^2} = \max_{\mathfrak{M}} \Delta(x, y)$$

und auf \mathfrak{M} die Gleichung

$$(4.3) \quad p \cdot \xi_1 + q \cdot \xi_2 = \Delta \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

erfüllen^{a)}. Mit ihnen bilden wir auf $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ das Funktional

$$(4.4) \quad p(c) = \frac{\oint_c (p \cdot \dot{x} + q \cdot \dot{y}) dt}{\oint_c \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt} = \frac{\int_{c''} \left[q(c) + \frac{p \dot{x} + q \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] ds}{\oint_c ds}$$

und nehmen an, es sei für eine Maximalfolge $\{c_i\}$ des Funktional $q(c)$

$$(4.5) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} p(c_i) = 0.$$

^{a)} Ein solches Funktionenpaar läßt sich etwa folgendermaßen erhalten: Bedenke $\tau(x, y)$ eine über \mathfrak{B} eindeutige und stetige Funktion, welche auf \mathfrak{M} den Winkel angibt, den der Vektor (ξ_1, ξ_2) mit der $+x$ -Achse einschließt, so hat das Paar

$$p(x, y) = \Delta(x, y) \cdot \cos \tau(x, y), \quad q(x, y) = \Delta(x, y) \cdot \sin \tau(x, y)$$

die gewünschte Eigenschaft.

Nun ist auf Grund der Voraussetzungen (4. 1) und (4. 2) stets die Angabe eines so großen Index \bar{v} möglich, so daß von ihm ab für alle $v \geq \bar{v}$

$$q(c_v) + \frac{p\dot{x} + q\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \geq q(c_v) - \sqrt{p^2 + q^2} \geq \eta > 0$$

ist, mit einem geeigneten positiven $\eta > 0$. Aus (4. 4) erhält man dann

$$p(c_v) \geq \eta \cdot \frac{\int_{c_v'}^{\bar{c}_v'} ds}{\int_{c_v}^{\bar{c}_v} ds},$$

und mit Verwendung der Hypothese (4. 5) hieraus

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\int_{c_v'}^{\bar{c}_v'} ds}{\int_{c_v}^{\bar{c}_v} ds} = 0.$$

Das bedeutet aber

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\int_{c_v'}^{\bar{c}_v'} ds}{\int_{c_v}^{\bar{c}_v} ds} = \infty$$

oder mit Einführung des Funktionals $q(c)$:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[q(c_v) \cdot \frac{\int_{c_v'}^{\bar{c}_v'} ds}{\int_{c_v}^{\bar{c}_v} \Delta ds} \right] = \infty;$$

weil aber hierin der zweite Faktor für alle v beschränkt bleibt, so folgt schließlich

$$(4. 6) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} q(c_v) = \infty.$$

Andererseits läßt sich für das Funktional $p(c)$ nach (4. 4) leicht die Identität aufstellen:

$$p(c) = \frac{q(c) + \frac{\int_{c_v'}^{\bar{c}_v'} \frac{p\dot{x} + q\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} ds}{\int_{c_v}^{\bar{c}_v} ds}}{1 + q(c) \cdot \frac{\int_{c_v'}^{\bar{c}_v'} \Delta ds}{\int_{c_v}^{\bar{c}_v} ds}},$$

aus der unter Heranziehung von (4. 6)

$$\lim_{v \rightarrow \infty} p(c_v) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\int_{c_v'}^{\bar{c}_v'} \Delta ds}{\int_{c_v}^{\bar{c}_v} ds} \geq m_1 > 0$$

resultiert. Aus dem hierin liegenden Widerspruch gegen (4. 5) schließt man zunächst, daß die beiden Bedingungen (4. 1) und (4. 5) miteinander nicht vereinbar sind.

Nun betrachten wir für $q(c)$ insbesondere eine Maximalfolge (\tilde{c}_v) aus lauter einfach geschlossenen Jordankurven, wie solche ja nach dem Satze 1 sicherlich existiert. Wären die hierin vorkommenden Kurven \tilde{c}_v nicht von gleichmäßig beschränkter Bogenlänge, so schlosse man auf Grund des Greenschen Satzes⁹⁾ leicht auf die Gleichung

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\int_{\tilde{c}_v} (p \dot{x} + q \dot{y}) dt}{\int_{\tilde{c}_v} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt} = 0,$$

die mit der Formel (4. 5) übereinstimmt. Da dies aber, wie soeben gezeigt, mit der Forderung (4. 1) unvereinbar ist, so ist der Satz 3 damit auch schon bewiesen.

§ 5. Als zweite Anwendung des Satzes 1 aus § 1 beweisen wir den

Satz 4. *Es ist*

$$(5. 1) \quad \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \infty$$

dann und nur dann, wenn es auf \mathfrak{M} geschlossene Integralkurven des Systems (E. 4) gibt.

Er ist für die beabsichtigte Verwendung des Funktionals $q(c)$ im Aufbau der Theorie der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ der wichtigste; denn er gestattet sofort die Aussage, daß alle Funktionen der Klasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ gleichgradig stetig sind, sofern es auf \mathfrak{M} keine geschlossenen Integralkurven von (E. 2) gibt, da man aus einem endlichen $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ auf die gleichmäßige Beschränktheit der Steilheiten T_f der Funktionen $f(x, y) \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ schließen kann.

Daß im Falle des Vorhandenseins geschlossener Integralkurven von (E. 2) auf \mathfrak{M} , die dann alle wegen des Fehlens singulärer Punkte auf \mathfrak{M} sogar einfach geschlossen sein müssen, (5. 1) gilt, ist selbstverständlich. Wir haben also nur das Umgekehrte zu beweisen, daß (5. 1) die Existenz geschlossener Integralkurven auf \mathfrak{M} nach sich zieht.

⁹⁾ Um die für seine Anwendung notwendigen, aber im allgemeinen nicht vorhandenen ersten Ableitungen der Funktionen $p(x, y)$ und $q(x, y)$ nach x, y zu bekommen, hat man gegebenenfalls p und q durch geeignete Polynome $p_1(x, y)$ und $q_1(x, y)$ zu approximieren und hinterher den begangenen Approximationsfehler auf Null herunterzudrücken. — Übrigens bedeutet die Einführung des Greenschen Satzes an dieser Stelle die Beschränkung auf den zweidimensionalen Fall; denn sie ist äquivalent mit der Einführung des Jordanschen Kurvensatzes, nach dem jede einfach geschlossene Jordankurve die Ebene in zwei Gebiete zerlegt.

Dazu benutzen wir eine Maximalfolge $\{c_r\}$ einfach geschlossener Jordankurven für $q(c)$, die nach dem Satze 3 des vorigen Paragraphen alle von gleichmäßig beschränkter Bogenlänge sind, und können dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich annehmen, daß die c_r gegen eine rektifizierbare Grenzkurve c_0 konvergieren, welche allerdings nicht notwendig auch einfach geschlossen zu sein braucht. c_0 kann aber nicht nur aus einem einzigen Punkte bestehen, da sonst (4. 5) Geltung hätte, was sich mit der Forderung (5. 1) nicht verträgt. Wir wollen nun zeigen, daß c_0 eine einfach geschlossene Integralkurve von (E. 2) auf \mathfrak{M} ist.

Zu dem Ende betrachten wir das Funktional

$$\oint_{c_r} \Delta \cdot (\xi_1 \cdot \dot{x} + \xi_2 \cdot \dot{y}) dt$$

auf den Kurven c_r unserer Maximalfolge und haben für dasselbe wegen seiner Stetigkeit auf der Gesamtheit aller rektifizierbaren Kurven gleichmäßig beschränkter Bogenlänge¹⁰⁾

$$(5.2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{c_r} \Delta \cdot (\xi_1 \dot{x} + \xi_2 \dot{y}) dt = \oint_{c_0} \Delta \cdot (\xi_1 \dot{x} + \xi_2 \dot{y}) dt.$$

Andererseits folgt aus der Unterhalbstetigkeit des Funktional

$$\int_{c_r} \Delta \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

auf der Gesamtheit aller rektifizierbaren Kurven¹¹⁾ gleichermaßen

$$(5.3) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{c_r} \Delta \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \geq \oint_{c_0} \Delta \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Drittens hat man wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Bogenlängen der Kurven c_r im Verein mit der Voraussetzung (5. 1)

$$(5.4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 0,$$

woraus man für jedes $\varepsilon > 0$ auf die Existenz eines Indexes $r(\varepsilon)$ schlußfolgert, von dem ab

$$(5.5) \quad \int_{c_r} \Delta \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt - \varepsilon \leq \int_{c_r} \Delta \cdot (\xi_1 \cdot \dot{x} + \xi_2 \cdot \dot{y}) dt$$

$$(\nu \geq r(\varepsilon))$$

¹⁰⁾ L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, I (Bologna 1921), § 108 b.

¹¹⁾ L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, I (Bologna 1921), § 97.

ist; die umgekehrte Relation, nämlich

$$(5.6) \quad \int_{c_r} \Delta \cdot (\xi_1 \cdot \dot{x} + \xi_2 \cdot \dot{y}) dt \leq \int_{c_r} \Delta \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

gilt wegen der Schwarzschen Ungleichung allgemein. (5.5) und (5.6) geben nun vereint

$$0 \leq \int_{c_r} \Delta \cdot [\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - (\xi_1 \dot{x} + \xi_2 \dot{y})] dt \leq \varepsilon,$$

und hieraus fließt bei Beachtung von (5.2) und (5.3)

$$(5.7) \quad 0 = \int_{c_0} \Delta \cdot [\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - (\xi_1 \dot{x} + \xi_2 \dot{y})] dt,$$

denn $\varepsilon > 0$ durfte ganz beliebig klein sein. Der Integrand von (5.7) ist aber nie negativ (Folge der Schwarzschen Ungleichung!); mithin muß fast überall auf c_0

$$(5.8) \quad \dot{x} : \dot{y} = \xi_1 : \xi_2$$

sein. Da aber die Funktionen $\xi_1(x, y)$, $\xi_2(x, y)$ auf \mathfrak{B} stetig sind, muß (5.8) überall auf c_0 gelten, was soviel bedeutet, wie, daß c_0 eine geschlossene Integralkurve von (E.2) auf der Punktmenge \mathfrak{M} ist.

Damit ist Satz 4 in allen Teilen bewiesen und gleichzeitig gezeigt, daß für $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \infty$ Kurven in $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ existieren, auf denen $q(c)$ seine obere Grenze wirklich annimmt. Daß dies im allgemeinen für endliche $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ nicht der Fall sein wird, ist ein Ergebnis der Theorie der Funktionen geringster Steilheit, das erst nach Behandlung der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ bewiesen werden kann (vgl. dazu § 18).

II. Die Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$.

§ 6. Wir schicken ein Lemma voraus, das die Erweiterung einer auf einer abgeschlossenen Punktmenge \mathfrak{M} definierten Funktion beschränkter Steilheit betrifft und welches uns beim Aufbau der Theorie als willkommenes Hilfsmittel dienen wird. Es lautet:

Lemma. Ist $E(x_1, y_1; x_2, y_2)$ eine eindeutige, nicht negative und stetige Funktion der beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus \mathfrak{B} , welche die Eigenschaften hat:

1. sie ist symmetrisch in den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) :

$$(6.1) \quad E(x_1, y_1; x_2, y_2) = E(x_2, y_2; x_1, y_1),$$

2. sie verschwindet dann und nur dann, wenn die beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) miteinander zusammenfallen,

3. sie erfüllt für jedes Punktetripel (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) die „Dreiecksungleichung“

$$(6.2) \quad E(x_1, y_1; x_2, y_2) + E(x_2, y_2; x_3, y_3) \geq E(x_1, y_1; x_3, y_3),$$

und liegt auf der abgeschlossenen Punktmenge \mathfrak{M} eine eindeutig und stetig definierte Funktion $f(x, y)$ vor, die dort für jedes Punktepaar (x_1, y_1) (x_2, y_2) eine „Lipschitzsche Bedingung“

$$(6.3) \quad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K \cdot E(x_1, y_1; x_2, y_2)$$

mit dieser Funktion $E(x_1, y_1; x_2, y_2)$ und einer gewissen Konstanten K erfüllt, so läßt sich dazu stets eine im ganzen Bereich \mathfrak{B} definierte Funktion $F(x, y)$ angeben, welche die Fortsetzung von $f(x, y)$ ist, d. h. welche auf \mathfrak{M} mit $f(x, y)$ übereinstimmt, in ganz \mathfrak{B} der Lipschitz-Bedingung (6.3) genügt und außerdem den Wertebereich von $f(x, y)$ nicht überschreitet, was sich in den Gleichungen

$$(6.4) \quad \begin{cases} \text{Max}_{\mathfrak{B}} F(x, y) = \text{Max}_{\mathfrak{M}} f(x, y), \\ \text{Min}_{\mathfrak{B}} F(x, y) = \text{Min}_{\mathfrak{M}} f(x, y) \end{cases}$$

ausdrückt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir die Voraussetzung

$$(6.5) \quad 0 \leq f(x, y) \leq A \quad \text{auf } \mathfrak{M}$$

machen, da sonst die Überlegungen nur an der Funktion

$$f_1(x, y) = f(x, y) - \text{Min}_{\mathfrak{M}} f(x, y)$$

durchzuführen wären. Wir bilden dann die Hilfsfunktion

$$(6.6) \quad F(x, y | \xi, \eta) = \text{Max} [0; f(\xi, \eta) - K \cdot E(x, y; \xi, \eta)],$$

in welcher (x, y) den ganzen Bereich \mathfrak{B} , (ξ, η) aber nur die Menge \mathfrak{M} beschreiben darf. Für festgehaltenes (ξ, η) genügt (6.6) für jedes Punktepaar (x_1, y_1) , (x_2, y_2) aus \mathfrak{B} der Lipschitz-Bedingung (6.3), wie aus den Eigenschaften von $E(x, y; \xi, \eta)$, insbesondere (6.1) und (6.2), sofort einleuchtet. Andererseits befriedigt sie aber auch für jedes Punktepaar (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) aus \mathfrak{M} die Ungleichung

$$(6.7) \quad f(\xi_1, \eta_1) \geq F(\xi_1, \eta_1 | \xi_2, \eta_2),$$

und Gleichheit steht hier nur, wenn (ξ_1, η_1) mit (ξ_2, η_2) zusammenfällt. Das folgt neben der Verwendung von (6.5) vor allem aus der Lipschitz-Bedingung (6.3).

Bilden wir nun die Funktion

$$(6.8) \quad F(x, y) = \text{obere Grenze } F(x, y | \xi, \eta),$$

$(\xi, \eta) \in \mathfrak{M}$

so kommen ihr, wie wir jetzt zu zeigen haben, alle Eigenschaften der Funktion $F(x, y)$ unseres Lemmas zu: In der Tat folgt zunächst aus (6. 7) ihr Zusammenfallen mit $f(x, y)$ auf der Menge \mathfrak{M} . Zum zweiten erfüllt sie die Relationen (6. 4), da diese Folgen sind der Voraussetzungen (6. 5), (6. 6) und (6. 7). Aber auch die Lipschitz-Bedingung (6. 3) ist für (6. 8) richtig; denn zu jedem Punkte (x_1, y_1) gibt es auf der abgeschlossenen Punktmenge \mathfrak{M} einen Punkt (ξ_0, η_0) , für welchen

$$(6. 9) \quad F(x_1, y_1) = F(x_1, y_1 | \xi_0, \eta_0)$$

ist. Wählen wir nun die Bezeichnung des Punktepaars $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ so, daß

$$F(x_1, y_1) > F(x_2, y_2)$$

wird, so haben wir wegen (6. 8) und (6. 9):

$$0 < F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2) \leq F(x_1, y_1 | \xi_0, \eta_0) - F(x_2, y_2 | \xi_0, \eta_0),$$

und da, wie schon festgestellt wurde, die Funktion $F(x, y | \xi, \eta)$ die Lipschitz-Bedingung (6. 3) erfüllt, so folgt hieraus das gleiche für die Funktion $F(x, y)$ (6. 8) selbst. — Damit ist das Lemma in allen Teilen bewiesen.

a)

§ 7. Wir entwickeln jetzt das kombinatorisch-topologische Gerüst derjenigen Zusammenhänge, die zwischen den Kurven $c \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ mit maximalem Dichtigkeitsquotienten $q(c)$ und dem Minimum $T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ der Steilheiten T , der Funktionen $f(x, y)$ aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ bestehen und die schließlich in der schon in der Einleitung erwähnten Gleichung

$$T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

ihre kürzeste und genaueste Ausdrucksform erhalten werden. Zu dem Ende vereinfachen wir erst einmal die allgemeine abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} erheblich, indem wir sie durch ein System endlich vieler getrennt liegender Intervallbögen J_{ik} ersetzen, die auf endlich vielen Integralkurven

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_k \dots$$

des Systems (E. 2) verteilt sind:

$$J_{ik} \subset C_k,$$

und deren Durchnummerierung (Index $l = 1, 2, \dots$) für jedes k so gewählt sei, daß ihre Aufeinanderfolge nach wachsenden Indizes übereinstimmt mit der Aufeinanderfolge entsprechend der Orientierung von C_k ; bezeichnen wir

dann der bequemerem Ausdrucksweise wegen in diesem Abschnitte mit $v_{1k}(h_{1k})$ den vorderen (hinteren) Endpunkt von J_{1k} und ordnen wir jedem Intervall J_{1k} noch eine reelle Zahl $\omega_{1k} \geq 0$ zu, so handelt es sich jetzt um die Theorie derjenigen in \mathfrak{B} eindeutigen und stetigen Funktionen $\varphi(P)$, die auf den J_{1k} die Bedingungen

$$(7.1) \quad \varphi(v_{1k}) - \varphi(h_{1k}) \geq \omega_{1k} \cdot \int_{J_{1k}} ds$$

erfüllen, und um deren Zusammenhang mit der räumlichen Verteilung der Intervalle J_{1k} .

Zunächst ist die Existenz solcher Funktionen, für die (7.1) gilt, fast selbstverständlich; denn setze man etwa $\varphi(h_{1k}) = 0$ fest für jedes überhaupt vorkommende $k = 1, 2, \dots$ und bestimme man dann sukzessive die Funktionswerte $\varphi(v_{1k})$, $\varphi(h_{2k})$, $\varphi(v_{2k})$, ... durch die Gleichungen

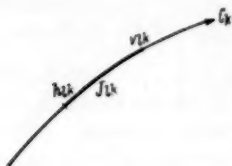


Fig. 2.

$$\varphi(v_{1k}) = \omega_{1k} \cdot \int_{J_{1k}} ds,$$

$$\varphi(h_{2k}) = \varphi(v_{1k}),$$

$$\varphi(v_{2k}) = \varphi(h_{2k}) + \omega_{2k} \cdot \int_{J_{2k}} ds$$

usw.,

so erhält man dadurch eine freilich erst nur auf der Gesamtheit \mathfrak{J} aller Intervallendpunkte der J_{1k} definierte Funktion; diese läßt sich aber sofort zu einer in ganz \mathfrak{B} eindeutig bestimmten fortsetzen, weil sie die Voraussetzungen des Lemmas aus dem vorigen Paragraphen erfüllt.

Unser Interesse gilt nun aber in ganz besonderem Maße denjenigen unter diesen Funktionen, deren Steilheit¹²⁾ einen kleinstmöglichen Wert S besitzt und die wir zur Funktionenklasse \mathfrak{G} zusammenfassen wollen. Ihre Existenz ergibt sich sofort aus der Bemerkung, daß alle (7.1) befriedigenden Funktionen $\varphi(P)$ gleichgradig stetig sind, sofern sie beschränkte Steilheiten haben, und daß sie daher eine normale Familie bilden; in einer solchen besitzt nämlich eine jede Minimalfolge von Funktionen $\{\varphi_i\}$, deren Steilheiten gegen die untere Grenze S konvergieren, eine zur Familie gehörige Häufungsfunktion $\psi(P)$, deren Steilheit T_ψ mit der unteren Grenze S zusammenfällt.

Die besondere Bedeutung dieser Funktionenklasse \mathfrak{G} liegt für uns nun darin, daß jede ihr angehörige Funktion $\varphi(P)$ ihre Steilheit $T_\varphi = S$ schon zwischen zwei Punkten P und Q der Endpunktemannigfaltigkeit \mathfrak{J} der

¹²⁾ Definition der Steilheit durch Formel (E.4) der Einleitung!

Intervalle J_{ik} annimmt. Bezeichnen wir nämlich für irgendein $\varphi(P)$ aus \mathfrak{G} mit ¹³⁾

$$(7.2) \quad S_{\varphi} = \text{obere Grenze}_{(P, Q) \subset \mathfrak{Z}} \frac{|\varphi(P) - \varphi(Q)|}{E(P, Q)},$$

so muß $S_{\varphi} = S$ sein, da sich sonst folgendermaßen ein Widerspruch konstruieren ließe: „Verstümmeln“ wir nämlich zunächst einmal die Funktion $\varphi(P)$ dadurch, daß wir nur ihre auf der Endpunktemannigfaltigkeit \mathfrak{Z} angenommenen Werte beibehalten, und erweitern wir dann diese „Rumpffunktion“ nach dem Lemma des § 6 zu einer in ganz \mathfrak{B} eindeutigen und stetig definierten Funktion $\bar{\varphi}(P)$, so erfüllt diese letztere ebenfalls alle an die Funktionen der Klasse \mathfrak{G} gestellten Bedingungen, und doch hätte sie eine kleinere Steilheit $S_{\bar{\varphi}} < S$, was nicht angeht.

§ 8. Wir kommen jetzt zum eigentlichen Kern der ganzen Theorie; der diskrete Charakter der Intervallmenge $\{J_{ik}\}$ gestattet uns nämlich einen genaueren Einblick in die Zusammenhänge, die zwischen den Funktionen der Klasse \mathfrak{G} und jenen geschlossenen orientierten Kurven c bestehen, die in einem möglichst großen „relativen Anteil“¹⁴⁾ die gerichteten Kurvenintervalle J_{ik} gleichsinnig berühren.

Zu dem Ende bilden wir eine erste Punktmenge \mathfrak{P} aus allen jenen Punktepaaren (P, Q) , die sich aus Punkten der Endpunktemannigfaltigkeit \mathfrak{Z} zusammenstellen lassen und in denen jede Funktion $\psi(P)$ der Klasse \mathfrak{G} die Gleichheit

$$(8.1) \quad \frac{|\psi(P) - \psi(Q)|}{E(P, Q)} = S$$

erfüllt; wir behaupten: \mathfrak{P} ist nicht leer. Denn sonst gäbe es zu jedem Punktepaar (P_i, Q_i) aus \mathfrak{Z} eine Funktion $\psi_i(P)$ aus \mathfrak{G} mit

$$(8.2) \quad \frac{|\psi_i(P_i) - \psi_i(Q_i)|}{E(P_i, Q_i)} < S,$$

und man hätte in der Funktion

$$\bar{\psi}(P) = \sum_i t_i \psi_i(P) \\ t_i > 0, \quad \sum_i t_i = 1$$

eine Funktion aus \mathfrak{G} , die

$$(8.3) \quad \frac{|\bar{\psi}(P) - \bar{\psi}(Q)|}{E(P, Q)} \leq \sum_i t_i \frac{|\psi_i(P) - \psi_i(Q)|}{E(P, Q)} < S$$

¹³⁾ $E(P, Q)$ bezeichnet hier im folgenden stets die euklidische Länge der kürzesten zwischen P und Q möglichen Verbindungslinie $\Gamma(P, Q)$ innerhalb \mathfrak{B} .

¹⁴⁾ Vgl. hierzu Anm. 4).

erfüllte für alle aus \mathfrak{J} bildbaren Punktepaare P und Q ; ein Gleichheitszeichen kann nämlich hier nicht stehen, da ein solches das gleichzeitige Erfülltsein aller Gleichungen

$$\frac{|\psi_i(P) - \psi_i(Q)|}{E(P, Q)} = S$$

voraussetzte, was aber von der Funktion $\psi_i(P)$ gewiß im Punktepaare $(P, Q) = (P_i, Q_i)$ verletzt würde, da ja hierfür (8. 2) bestehen sollte. Wegen (8. 3) wäre also S noch nicht die untere Grenze der überhaupt möglichen Steilheiten gewesen, entgegen der Voraussetzung.

§ 9. Neben \mathfrak{P} ordnen wir dann zweitens jeder Funktion ψ aus \mathfrak{G} noch die Gesamtheit \mathfrak{P}_ψ aller derjenigen Punktepaare (P, Q) zu, die Endpunkte eines solchen gerichteten Intervalls J_{ik} sind, über welchem $\psi(P)$ die Gleichung

$$(9.1) \quad \psi(P) - \psi(Q) = \omega_{ik} \cdot \int_{J_{ik}}^P ds$$

befriedigt und worin P die Rolle des vorderen, Q die des hinteren Endpunktes spielt.

§ 10. Ist jetzt (P_1, P_2) ein Punktepaar aus \mathfrak{P} in solcher Numerierung, daß

$$(10.1) \quad \psi(P_1) > \psi(P_2), \quad (\psi \in \mathfrak{G})$$

gilt, so bestimmen wir dazu eine größte nicht mehr erweiterungsfähige Punktmenge $\mathfrak{R}_\psi(P_2)$, die P_2 enthält, folgendermaßen: Wir nehmen zu dem Punkte P_2 alle und nur diejenigen Punkte P der Endpunktemannigfaltigkeit \mathfrak{J} hinzu, die mit P_2 zusammen entweder 1. ein geordnetes Punktepaar (P_2, P) aus \mathfrak{P} ergeben und dann

$$(10.2) \quad \psi(P) - \psi(P_2) = -S \cdot E(P, P_2)$$

erfüllen, oder aber 2. ein solches aus \mathfrak{P}_ψ liefern, für welches

$$(10.3) \quad \psi(P) - \psi(P_2) = \omega_{ik} \cdot \int_{J_{ik}}^P ds$$

ist und worin J_{ik} das von P_2 nach P führende Intervall bedeutet; in beiden Fällen ist die Reihenfolge $P_2 \rightarrow P$ für die anschließenden Betrachtungen von Wichtigkeit (siehe das Schlußergebnis der Formel (10, 4)). Wir ziehen jetzt im ersten Falle von P_2 nach P eine euklidische Aller kürzeste Γ des Gebietes \mathfrak{B} , im zweiten das schon erwähnte orientierte Intervall J_{ik} , und verfahren mit den so gefundenen Punkten in der gleichen Weise wie zuvor mit P_2 . Nach endlich vielen Schritten findet dieser Prozeß sein Ende und liefert einen

linearen Komplex, dessen Eckpunkte die gesuchte Punktmenge $\mathfrak{N}_\psi(P_2)$ ausmachen. Von ihr wollen wir jetzt zeigen, daß sie stets neben P_2 auch noch den Punkt P_1 enthalten muß; denn anderenfalls könnte man die Funktion $\psi(P)$ durch die etwas abgeänderte Funktion

$$\bar{\psi}(P) = \begin{cases} \psi(P) + h & \text{für } P \in \mathfrak{N}_\psi(P_2), \\ \psi(P) & \text{für die übrigen Punkte} \end{cases}$$

ersetzen, die für hinreichend kleine $h > 0$ auch noch der Klasse \mathfrak{G} angehört, für die aber

$$0 < \frac{\bar{\psi}(P_1) - \bar{\psi}(P_2)}{E(P_1, P_2)} = \frac{\psi(P_1) - \psi(P_2)}{E(P_1, P_2)} - \frac{h}{E(P_1, P_2)} = S - \frac{h}{E(P_1, P_2)} < S$$

ist, so daß (P_1, P_2) entgegen der Voraussetzung nicht zu der Menge \mathfrak{P} gehören könnte (Widerspruch!).

Damit ist aber der Hauptschritt getan; denn vermöge der soeben bewiesenen Tatsache und seiner oben beschriebenen Entstehungsgeschichte liegt auf dem Komplex $\mathfrak{N}_\psi(P_2)$ stets mindestens ein geschlossenes orientiertes Kurvenpolygon c_0 , dessen Seiten aus gerichteten Aller kürzesten I des Gebietes \mathfrak{B} und gerichteten Intervallbögen J_{ik} der Integralkurven C_k bestehen, auf denen die Bedingungen (10. 2) bzw. (10. 3) erfüllt sind. Seien nun $\{Q_k\}$ die Eckpunkte dieses Kurvenpolygons, so folgt aus der Identität

$$\sum_k (\psi(Q_k) - \psi(Q_{k+1})) = 0,$$

in der über alle Eckpunkte Q_k zu summieren ist, und unter Berücksichtigung der Gesetzmäßigkeiten (10. 2) und (10. 3) sofort die Gleichung

$$(10. 4) \quad S = \frac{\sum_{ik} \omega_{ik} \cdot \int_{J_{ik}} ds}{\sum_j \int_{I_j} ds},$$

in der wiederum die Summen über die angezeichneten Seitengesamtheiten von c_0 zu erstrecken sind. (10. 4) aber besagt, daß die kleinste Steilheit S in der Klasse aller (7. 1) erfüllenden Funktionen $\psi(P)$ bestimmt werden kann, wenn man den „Dichtigkeitsquotienten“ untersucht für die auf geschlossenen Polygonzügen möglichen Verteilungen derjenigen gerichteten Intervalle J_{ik} , längs welcher die Orientierung von c_0 mit der der Integralkurven C_k übereinstimmt.

Alle jetzt noch vorzunehmenden Betrachtungen haben nur den einen Zweck, die durch die Verwendung allgemeiner Punktmenge n entstehenden mengentheoretischen Kompliziertheiten auf die einfachen Verhältnisse der Gleichung (10. 4) zurückzuführen.

b)

§ 11. Wir gehen dabei schrittweise vor, indem wir zunächst die diskrete Intervallmenge $\{J_{ik}\}$ ersetzen durch eine auf endlich viele Integralkurven C_k verteilte abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} , von der wir nur verlangen, daß sie keine geschlossenen Integralkurven des Systems (E. 2) enthalte.

Die einzelnen Durchschnitte

$$C'_k = C_k \cap \mathfrak{M}$$

führen wir dann wieder auf eine diskrete Intervallmenge dadurch zurück, daß wir an ihrer Stelle die Intervalle J_{ik} einer „Vitalischen Überdeckung“¹⁵⁾ der Menge C'_k betrachten, deren Güte wir fortschreitend verbessern und so schließlich den begangenen Approximationsfehler unter jede Schranke heruntersetzen.

Die Größen ω_{ik} der Bedingung (7. 1) ersetzen wir hier durch

$$\omega_{ik} = \frac{\int_{C'_k J_{ik}} \Delta ds - \tau \cdot \int_{J_{ik} - J_{ik} \cdot C'_k} ds}{\int_{J_{ik}} ds}$$

und haben es folglich mit der Gesamtheit derjenigen in \mathfrak{B} eindeutigen und stetigen Funktionen $f(x, y)$ zu tun, die auf den J_{ik} die Forderungen

$$(11. 1) \quad \int_{J_{ik}} \frac{df}{ds_{C_k}} ds \geq \int_{C'_k \cdot J_{ik}} \Delta ds - \tau \cdot \int_{J_{ik} - C'_k \cdot J_{ik}} ds$$

erfüllen. Hierin ist ds_{C_k} das positiv orientierte Linienelement der Integralkurve C_k , τ eine beliebige Konstante, über deren zweckmäßigste Wahl dann später noch zu entscheiden sein wird (siehe § 13). Wir nennen

$$(11. 2) \quad T(\tau) = \underset{0}{\text{untere Grenze } T},$$

worin $f(x, y)$ alle vorhin genannten Funktionen als Konkurrenz durchlaufen möge, und entnehmen jetzt aus den Überlegungen des § 7 sofort die Existenz

¹⁵⁾ Unter einer „Vitalischen Überdeckung“ wollen wir im folgenden stets eine Überdeckung einer Punktmenge \mathfrak{M} verstehen, die nach den Prinzipien des Vitalischen Überdeckungssatzes vorgenommen wurde. Derselbe sagt bekanntlich folgendes aus: Ist jedem Punkte einer beschränkten und meßbaren Punktmenge \mathfrak{M} eine Folge ihn enthaltender und sich auf ihn zusammenziehender Intervalle zugeordnet, so läßt sich zu jeder vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ eine aus getrennt liegenden Intervallen dieser Gesamtheit gebildete Teilmenge so angeben, daß die von ihr nicht überdeckten Punkte der Menge \mathfrak{M} ein Maß besitzen, das unterhalb der nur von ε abhängenden Schranke $\varepsilon \cdot \mu \mathfrak{M}$ gelegen ist. [Vgl. C. Carathéodory, Vorl. über reelle Funkt. (2. Aufl. Berlin 1927), § 288.]

mindestens einer (11. 1) genügenden Funktion $\bar{f}(x, y)$, deren Steilheit $T_{\bar{f}}$ mit $T(\tau)$ übereinstimmt:

$$(11. 3) \quad T_{\bar{f}} = T(\tau).$$

§ 12. Wir wollen nun zunächst die für das weitere wichtige Frage nach der Abhängigkeit der kleinstmöglichen Steilheit $T(\tau)$ von der Konstanten τ untersuchen und beweisen darüber den

Satz 5. $T(\tau)$ ist eine stetige und mit wachsendem τ nie zunehmende Funktion von τ , für welche

$$(12. 1) \quad T(0) \geq 0, \quad T(\infty) = 0$$

ist.

Beweis. 1. Zunächst ist

$$(12. 2) \quad T(\tau_1) \geq T(\tau_2) \quad \text{für} \quad \tau_1 < \tau_2$$

deshalb, weil für kleinere τ die Ungleichung (11. 1) eine schärfere Bedingung darstellt als für größere (Monotonie).

2. Den Beweis für die Stetigkeit von $T(\tau)$ führen wir in zwei Schritten:

1. Schritt. Es ist immer

$$(12. 3) \quad T(\tau + 0) = T(\tau).$$

Aus (12. 2) folgt nämlich zunächst nur $T(\tau + 0) \leq T(\tau)$. Bestünde aber hier wirklich für ein τ_0 das Kleiner-Zeichen

$$(12. 4) \quad T(\tau_0 + 0) < T(\tau_0),$$

so erhielte man folgendermaßen einen Widerspruch: Man nehme eine stets abnehmende gegen τ_0 konvergierende Folge positiver Zahlen

$$\dots \tau_i > \tau_{i+1} > \dots \rightarrow \tau_0$$

und bestimme zu jeder derselben eine Funktion $\bar{f}_i(x, y)$, die (11. 1) und

$$T_{\bar{f}_i} = T(\tau_i)$$

erfüllt (siehe § 11). Für diese Funktionenfolge $\{\bar{f}_i(x, y)\}$ ist einerseits auf Grund von (12. 2) und (12. 4)

$$T_{\bar{f}_i} \leq T_{\bar{f}_{i+1}} \leq \dots \leq T(\tau_0 + 0) < T(\tau_0),$$

während andererseits gerade hieraus auf die gleichgradige Stetigkeit der $\bar{f}_i(x, y)$ und damit auf die Existenz einer konvergenten Teilfolge

$$\bar{f}_i'(x, y) \rightarrow \bar{f}_0(x, y)$$

geschlossen werden kann, die gegen eine (11. 1) mit $\tau = \tau_0$ befriedigende Funktion $\bar{f}_0(x, y)$ konvergiert. Beides zusammen führt zu der unmöglichen Relation

$$T(\tau_0) \leq T_{\bar{f}_0} \leq T(\tau_0 + 0) < T(\tau_0),$$

womit (12. 3) bewiesen ist.

2. Schritt. Es ist stets

$$(12. 5) \quad T(\tau - 0) = T(\tau).$$

Das ist selbstverständlich, wenn man bedenkt, daß die (11. 1) erfüllenden Funktionen $\bar{f}(x, y)$ kleinstmöglicher Steilheit diese ihre Steilheit immer schon zwischen zwei Punkten annehmen, die aus der Mannigfaltigkeit der Endpunkte der Intervalle J_{ik} genommen sind (vgl. § 7). Bedeuten also τ_0 und $\tau_0 - h$ ($h > 0$) zwei beliebige hinreichend nahe beieinander gelegene τ -Werte, so kann man immer eine Funktion $\bar{f}_1(x, y)$ finden, welche (11. 1) mit $\tau = \tau_0$ befriedigt und für welche

$$T_{\bar{f}_1} = T(\tau_0)$$

gilt, und dazu eine andere $\bar{f}_2(x, y)$, die (11. 1) mit $\tau = \tau_0 - h$ erfüllt und deren Steilheit $T_{\bar{f}_2}$ ganz beliebig wenig von der Steilheit $T_{\bar{f}_1}$ abweicht¹⁶⁾:

$$(12. 6) \quad |T_{\bar{f}_2} - T_{\bar{f}_1}| \leq \delta(h)$$

($\delta(h)$ wird zugleich mit h zu Null).

Weil nun aber (11. 1) für $\tau = \tau_0 - h$ eine schärfere Bedingung darstellt als für $\tau = \tau_0 > \tau_0 - h$, ist

$$T_{\bar{f}_2} > T_{\bar{f}_1} = T(\tau_0),$$

und das bedeutet (wegen (12. 2)):

$$T_{\bar{f}_2} \geq T(\tau_0 - h) \geq T(\tau_0).$$

Mit (12. 6) verbunden, liefert das aber

$$|T(\tau_0 - h) - T(\tau_0)| \leq \delta(h)$$

und damit die Gleichheit (12. 5). In Verbindung mit (12. 3) ist damit die Stetigkeit von $T(\tau)$ bewiesen. Die übrigen Aussagen des Satzes 5 sind Trivialitäten; denn die zweite Gleichung (12. 1) spricht nur aus, daß (11. 1) für unendlich große τ überhaupt keine Einschränkung mehr bedeutet, während die erste Ungleichung (12. 1) besagt, daß möglicherweise eine solche Einschränkung für $\tau = 0$ besteht.

¹⁶⁾ Schlußweise auf Grund der Diskretheit der Intervallmenge $\{J_{ik}\}$!

§ 13. Mit dem hierdurch bewiesenen Satze 5 haben wir jetzt ein Instrument gewonnen, durch welches die zu Beginn des § 11 erwähnte genauere Festlegung der Konstanten τ so vorgenommen werden kann, daß unsere Überlegungen den besonderen Verhältnissen der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ gerecht werden. Wir können und wollen nämlich τ durch denjenigen eindeutig bestimmten Wert $\hat{\tau}$ ersetzen, welcher der Gleichung

$$(13.1) \quad T(\hat{\tau}) = \hat{\tau}$$

genügt. Ziehen wir dann die Formel (10.4) heran, welche die kleinstmögliche Steilheit $T(\hat{\tau})$ zu berechnen gestattet aus der Verteilungsdichte derjenigen orientierten Intervalle J_{ik} über das Kurvenpolygon c_0 , längs welcher sich c_0 ihnen gleichsinnig anschmiegt, so können wir schreiben

$$(13.2) \quad T(\hat{\tau}) = \frac{\sum_{(J_{ik})} \left[\int_{J_{ik} \cdot c'_k} \Delta ds - \hat{\tau} \cdot \int_{J_{ik} - J_{ik} \cdot c'_k} ds \right]}{\sum_{(I_j)} \int_{I_j} ds},$$

worin die Summen $\sum_{(J_{ik})}$ bzw. $\sum_{(I_j)}$ über die Gesamtheit der in c_0 enthaltenen und mit c_0 gleichsinnig orientierten Intervalle J_{ik} bzw. der Gebietsgeodätischen I_j aus \mathfrak{B} zu erstrecken sind.

Nun läßt sich aber (13.2) wegen (13.1) auch in die Form setzen

$$(13.3) \quad T(\hat{\tau}) = \frac{\sum_{(J_{ik})} \int_{J_{ik} \cdot c'_k} \Delta ds}{\sum_{(I_j)} \int_{I_j} ds + \sum_{(J_{ik})} \int_{J_{ik} - J_{ik} \cdot c'_k} ds},$$

und diese Formel drückt nun $T(\tau)$ mittels der kanonischen Zerlegung (§ 1)

$$c_0 = \sum_{(J_{ik})} (C'_k \cdot J_{ik}), \quad c_0'' = \sum_{(I_j)} I_j + \sum_{(J_{ik})} (J_{ik} - J_{ik} \cdot C'_k)$$

der Kurve c_0 aus. Der in (13.3) rechts stehende Ausdruck ist also nichts anderes als der Wert des Funktionals $q(c_0)$. Wir gewinnen damit die für die Weiterentwicklung der Theorie wichtige Abschätzung

$$(13.4) \quad T(\hat{\tau}) \leq \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}),$$

in der allerdings die Menge \mathfrak{M} noch, wie zu Beginn des § 11 verlangt, auf die endlich vielen Integralkurvenstücke C_k beschränkt bleiben muß.

§ 14. Verkürzen wir jetzt die Intervalle J_{ik} immer mehr und mehr und lassen ihre Anzahl ins Unbegrenzte wachsen, so bedeutet die Ungleichung (13.4) die gleichgradige Stetigkeit aller derjenigen $f(x, y)$, für welche

$$T_r = T(\hat{\tau})$$

ist. Diese Verkürzung der J_{lk} und Vermehrung ihrer Anzahl nehmen wir aber in Übereinstimmung mit dem Vitalischen Überdeckungssatz nun so vor, daß die Grenzgleichungen

$$(14.1) \quad \begin{cases} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{l_i} \mu(\mathfrak{M} J_{l_i k}) = \mu C_k \mathfrak{M}, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu(\mathfrak{M} J_{l_i k})}{\mu J_{l_i k}} = 1 \end{cases}$$

erfüllt sind; dem Index l haben wir dabei einen weiteren Index i angefügt, um anzudeuten, daß wir es jetzt mit Intervallen $J_{l_i k}$ ganz bestimmter Intervallgruppen (etwa der i -ten) zu tun haben, die der immer weiter fortschreitenden Verfeinerung der Überdeckungen der Menge $\mathfrak{M} C_k$ entsprechen.

Zu jeder solchen Intervallgruppe $\{J_{l_i k}\}$ bestimmen wir nun im Sinne des § 11 Funktionen $f_i(P)$, deren Steilheiten T_{f_i} der Gleichung

$$(14.2) \quad T_{f_i} = T(\dot{\tau}_i)$$

genügen und worin $\dot{\tau}_i$ die eindeutig bestimmte Wurzel von

$$T(\dot{\tau}_i) = \dot{\tau}_i$$

ist. (Die kleinstmöglichen Steilheiten $T(\tau)$ hängen ja jetzt auch noch von dem Index i der einzelnen Intervallgruppe $\{J_{l_i k}\}$ ab, durch die sie gemäß den Vorschriften der §§ 7 mit 11 bestimmt werden.) Da für alle diese $T(\dot{\tau}_i)$ die Ungleichung (13.4) richtig bleibt — denn ihre rechte Seite hängt ja von der Intervallgruppe nicht mehr ab! —, so sind die Funktionen $f_i(P)$ alle gleichgradig stetig, und wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sie gleich von vornherein so gewählt worden waren, daß sie gegen eine eindeutige und stetige Grenzfunktion

$$(14.3) \quad \Phi(P) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(P)$$

konvergieren. Die Steilheit T_Φ dieser Grenzfunktion genügt natürlich auch der Ungleichung

$$(14.4) \quad T_\Phi \leq \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}).$$

Um hieraus aber weitere Schlüsse ziehen zu können, bemerken wir, daß auf jedem C_k in fast allen Punkten der Menge $\mathfrak{M} C_k$ die Ungleichung

$$(14.5) \quad \frac{d\Phi}{ds_{C_k}} \geq \Delta$$

bestehen muß. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man auf einem C_k eine Teilmenge $\tilde{C}_k \subset C_k \mathfrak{M}$ von positivem Lebesgueschen Maße finden, in deren Punkten

$$(14.6) \quad \frac{d\Phi}{ds_{C_k}} \leq \Delta - \zeta, \quad \zeta > 0$$

ist. Das führt dann folgendermaßen zu einem Widerspruch: Man nehme eine aus getrennt liegenden Teilbögen von C_k bestehende Umgebung L der Menge \tilde{C}_k mit der Eigenschaft, daß das Maß $\mu(L - \tilde{C}_k)$ ihrer Komplementärmenge $L - \tilde{C}_k$ die vorgeschriebene Zahl $\varepsilon > 0$ nicht übersteigt; dann ist einerseits wegen (14.4) und der Annahme (14.6)

$$(14.7) \quad \int_L \frac{d\Phi}{ds} ds = \int_{\tilde{C}_k} \frac{d\Phi}{ds} ds + \int_{L - \tilde{C}_k} \frac{d\Phi}{ds} ds \leq \int \Delta ds - \zeta \cdot \mu \tilde{C}_k + \varepsilon \cdot \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}).$$

Andererseits aber besitzen wegen der Grenzgleichungen (14.1) für hinreichend große Indizes i die Punkte von L , die außerhalb aller, höchstens mit Ausnahme ihrer Endpunkte, ganz im Innern von L gelegenen Intervalle $J_{i,k}$ enthalten sind, ein Maß

$$\leq 2\mu(L - \tilde{C}_k) \leq 2\varepsilon,$$

da ja alle diese Intervalle $J_{i,k}$ mit der Menge $C_k \mathfrak{M}$ auch die Punkte der Menge \tilde{C}_k überdecken. Wir können mithin die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_L \frac{df_i}{ds} ds &= \sum_{J_{i,k} \subset L} \int_{J_{i,k}} \frac{df_i}{ds} ds + \int_{L - \sum J_{i,k}} \frac{df_i}{ds} ds \geq \sum_{(L)} \int_{J_{i,k}} \frac{df_i}{ds} ds - 2\varepsilon \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \\ &\geq \sum_{J_{i,k} \subset L} \left[\int_{J_{i,k} \mathfrak{M}} \Delta ds - \hat{\tau}_i \int_{J_{i,k} - \mathfrak{M} J_{i,k}} ds \right] - 2\varepsilon \cdot \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \end{aligned}$$

behaupten, die mit (14.7) vereinigt

$$\begin{aligned} \int_L \left(\frac{df_i}{ds} - \frac{d\Phi}{ds} \right) ds &\geq \left[\sum_{J_{i,k} \subset L} \int_{J_{i,k}} \Delta ds - \int_{\tilde{C}_k} \Delta ds \right] + \zeta \cdot \mu \tilde{C}_k \\ &\quad - 3 \cdot \varepsilon \cdot \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) - \hat{\tau}_i \cdot \sum_{J_{i,k} \subset L} \int_{J_{i,k} - \mathfrak{M} J_{i,k}} ds \end{aligned}$$

ergibt. Wegen der zweiten Gleichung (14.1) und der Willkür von ε werden hier nun das dritte und vierte Glied rechts mit wachsendem $i \rightarrow \infty$ ganz beliebig klein; das erste Glied rechts strebt aus gleichen Gründen gegen eine nicht negative Zahl — denn es ist $\tilde{C}_k \subset \mathfrak{M} C_k$ und die $J_{i,k}$ überdecken mit zunehmendem i die Menge $\mathfrak{M} C_k$ immer besser! —, während allein das Glied mit ζ unverändert seinen Wert beibehält, der positiv ist. Links wird das Integral für

$i \rightarrow \infty$ zu Null, da die f_i gegen Φ konvergieren und L aus getrennt liegenden Intervallbögen aufgebaut ist. Beides zusammen ist unverträglich, falls $\mu \bar{C}_k > 0$ ist. Damit ist (14. 5) bewiesen und zugleich gezeigt, daß $\Phi(P)$ der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ angehört. Für jede Funktion dieser Klasse ist aber

$$(14. 8) \quad T, \geq \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}),$$

woraus man dann auf

$$(14. 9) \quad T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \geq \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

schlußfolgert; denn für jede geschlossene Kurve $c \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ gilt die Gleichheit

$$0 = \oint_c \frac{df}{ds} ds = \int_{c'} \frac{df}{ds} ds + \int_{c''} \frac{df}{ds} ds,$$

aus der mit Rücksicht auf die Ungleichungen

$$\frac{df}{ds} \geq \Delta \text{ fast überall auf } c'$$

und

$$\left| \frac{df}{ds} \right| \leq T, \text{ auf ganz } c$$

die Abschätzung

$$(14. 10) \quad 0 \geq \int_{c'} \Delta ds - T, \cdot \int_{c''} ds$$

resultiert. (14. 8) ist aber nur ein anderer Ausdruck für die in (14. 10) ausgesprochene Tatsache.

Verbinden wir endlich (14. 9) mit (14. 4) und der oben bewiesenen Bemerkung, daß $\Phi(P)$ der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ angehört, so können wir daher unsere Überlegungen zu dem Ergebnis zusammenfassen.

Satz 6. *Ist die abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} auf endlich vielen ganz im Innern von \mathfrak{B} gelegenen Integralkurvenstücken des Gleichungssystems*

$$(E. 2) \quad x = \xi_1(x, y), \quad \dot{y} = \xi_2(x, y)$$

verteilt und ist auf \mathfrak{M} keine geschlossene Integralkurve dieses Gleichungssystems vorhanden, so gibt es in $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ stets mindestens eine Funktion $\Phi(P)$ geringster Steilheit

$$(14. 11) \quad T_\Phi = T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}),$$

und diese Steilheit $T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ läßt sich aus der Betrachtung der Dichtigkeitsverteilungen der Punkte c' , in denen die geschlossenen Kurven $c \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ die Vektoren (ξ_1, ξ_2) auf der Menge \mathfrak{M} gleichsinnig berühren, mittels des Dichtigkeitsfunktional $q(c)$ durch die Formel

$$(14. 12) \quad \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

errechnen.

§ 15. Um jetzt als letztes unsere Theorie auch auf flächenhaft verteilte Punktmengen \mathfrak{M} ausdehnen zu können, betrachten wir erst einmal den Sonderfall, daß \mathfrak{M} ganz in einem Kurvenrechteck Ω untergebracht sei, das von zwei Integralkurven des Systems (E. 2) und deren orthogonalen Trajektorien begrenzt wird. Wir nehmen wieder an, auf \mathfrak{M} gebe es keine geschlossene Integralkurven C von (E. 2), und machen dann auf den von Rand zu Rand durch Ω ziehenden Integralkurven C dieses Systems (E. 2) die folgende Konstruktion.

1. Wir geben uns eine Zahl $\varepsilon > 0$ beliebig vor.

2. Wir bilden eine Unterteilungsfolge $\{Z_k\}$ aus fortgesetzten Halbierungen der durch Ω gespannten Integralkurvenstücke C , wobei Z_k jedes solche Integralkurvenstück in 2^k gleich lange Intervalle¹⁷⁾ $C J_{v_1} \dots v_k$ zerschneidet, die wir in dyadischer Weise so durchnummerieren wollen, daß ihre dadurch auf C bestimmte Reihenfolge dieselbe wird, wie wenn sie nach der Orientierung von C angeordnet worden wären.

3. Aus der Gesamtheit aller dieser Intervalle $C J_{v_1} \dots v_k$ scheiden wir zunächst diejenigen aus, die mit der in Ziffer 1 genannten Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$(15.1) \quad \frac{\mu(\mathfrak{M} C J_{v_1} \dots v_k)}{\mu C J_{v_1} \dots v_k} \geq 1 - \varepsilon$$

erfüllen. Sie bilden eine unter Umständen überabzählbare Intervallmenge.

4. Wir reduzieren dieselbe dann auf eine „überall dichte“ abzählbare Intervallmenge $\mathfrak{J}(Z_k; \varepsilon)$ mit der Eigenschaft, daß jedes beliebige (15.1) erfüllende Intervall $C J_{v_1} \dots v_k$ Grenzintervall ist von einer geeignet bestimmten Auswahlfolge von Intervallen der Menge $\mathfrak{J}(Z_k; \varepsilon)$, folgendermaßen: Da die Intervalle eines festen dyadischen Indexes „quer“ zu den Integralkurven C von (E. 2) genau die nämliche Anordnung aufweisen wie die Punkte einer Strecke, so läßt sich auch mittels der aus der linearen Punktmengentheorie geläufigen Methoden eine Auswahlmenge von Intervallen herstellen, für die alle übrigen Intervalle $C J_{v_1} \dots v_k$ Grenz- (Häufungs-) Intervalle sind. Die Vereinigung aller dieser zu den verschieden dyadischen Indizes ($v_1 \dots v_k$) gehörenden Auswahlintervalle derselben Zerlegung Z_k bildet dann die gesuchte Intervallmenge $\mathfrak{J}(Z_k; \varepsilon)$.

5. Wir lassen schließlich die Zahl ε der Ziffer 1 eine feste Folge monoton gegen Null abnehmender positiver Zahlen

$$(15.2) \quad \dots \varepsilon_i > \varepsilon_{i+1} > \dots \rightarrow 0$$

¹⁷⁾ Wir benutzen hier den Buchstaben $J_{v_1} \dots v_k$ generell zur Bezeichnung eines Intervalls und berücksichtigen die genauere Angabe darüber, auf welcher Integralkurve C nun dieses Intervall gelegen sein soll, durch den vorgesetzten Buchstaben C .

durchlaufen und ordnen die Gesamtheit aller in den $\mathfrak{J}(Z_k; \varepsilon_i)$ enthaltenen „Auswahlintervalle“ in eine einfache unendliche Folge um, die wir dann kurz mit \mathfrak{J} bezeichnen wollen.

Ist dann $f_i(P)$ eine in \mathfrak{B} eindeutige und stetige Funktion möglichst kleiner Steilheit T_{f_i} , die auf der Teilmenge $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$ aller den i ersten Intervallen der Menge \mathfrak{J} angehörenden Punkte die Ungleichung

$$(15.3) \quad \frac{df_i}{ds_C} \geq \Delta$$

erfüllt, so wissen wir auf Grund der über \mathfrak{M} gemachten Voraussetzung, keine geschlossenen Integralkurven von (E. 2) zu enthalten, daß alle diese Funktionen $f_i(P)$ von gleichmäßig beschränkter Steilheit sind (Satz 4 in § 5 und Satz 6 in § 14) und daß es deshalb keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, wenn wir die $f_i(P)$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $\Phi(P)$ konvergieren lassen, deren Steilheit ebenfalls der Ungleichung

$$(15.4) \quad T_\Phi \leq \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

genügt. Diese Grenzfunktion $\Phi(P)$ erfüllt aber sogar auf jedem C die Ungleichung

$$(15.5) \quad \frac{d\Phi}{ds_C} \geq \Delta \text{ in fast allen Punkten } P \subset \mathfrak{M}C.$$

Wäre dies nämlich falsch und bestünde statt dessen auf einer Integralkurve \dot{C} die Ungleichung

$$(15.6) \quad \frac{d\Phi}{ds_C} \leq \Delta - \zeta, \quad \zeta > 0$$

für die Punkte einer Teilmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}\dot{C}$ positiven Lebesgueschen Maßes, so erhielte man durch folgende Schlußkette eine Ungereimtheit: Es ließe sich nämlich zu jeder Zahl ε_i der Folge (15. 2) ein Intervall $\dot{J}_{v_1 \dots v_k}$ angeben, das

$$(15.7) \quad \frac{\mu(\dot{C}\mathfrak{M}\dot{J}_{v_1 \dots v_k})}{\mu\dot{C} \cdot \dot{J}_{v_1 \dots v_k}} \geq 1 - \varepsilon_i$$

erfüllt, und für welches folglich

$$(15.8) \quad \int_{\dot{C}\dot{J}_{v_1 \dots v_k}} \left(\frac{d\Phi}{ds_C} - \Delta \right) ds \leq -\zeta \cdot \int_{\mathfrak{M}\dot{J}_{v_1 \dots v_k}} ds \\ + \varepsilon_i \cdot (\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) + \text{Max}_{\mathfrak{M}} \Delta) \cdot \mu\dot{C}\dot{J}_{v_1 \dots v_k}$$

gilt. Da dieses Intervall $\dot{C}\dot{J}_{v_1 \dots v_k}$ aber auch Grenzintervall ist von Intervallen der Menge \mathfrak{J} mit gleich viel unteren Indizes und da die Funktionen $f_i(P)$

gleichmäßig gegen $\Phi(P)$ konvergieren, so ist es immer möglich, einen so großen Index i zu bestimmen, daß

$$\begin{aligned}
 (15.9) \quad & \int_{\dot{C} \dot{J}_{v_1 \dots v_k}} \left(\frac{df_i}{ds_C} - \Delta \right) ds \\
 &= \int_{\mathfrak{M} \dot{C} \dot{J}_{v_1 \dots v_k}} \left(\frac{df_i}{ds_C} - \Delta \right) ds + \int_{(\dot{C} - \mathfrak{M} \dot{C}) \dot{J}_{v_1 \dots v_k}} \left(\frac{df_i}{ds_C} - \Delta \right) ds \\
 &\geq -2 \varepsilon_i \cdot (\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) + \text{Max}_{\mathfrak{M}} \Delta) \cdot \mu \dot{C} \dot{J}_{v_1 \dots v_k}
 \end{aligned}$$

wird. In Verbindung mit (15. 8) und Berücksichtigung der Ungleichung (15. 7) erhält man hieraus:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\dot{C} \dot{J}_{v_1 \dots v_k}} \left(\frac{df_i}{ds_C} - \frac{d\Phi}{ds_C} \right) ds \\
 & \geq [\zeta \cdot (1 - \varepsilon_i) - 3 \cdot \varepsilon_i \cdot (\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) + \text{Max}_{\mathfrak{M}} \Delta)] \cdot \mu \dot{C} \dot{J}_{v_1 \dots v_k}.
 \end{aligned}$$

Darin kann aber die eckige Klammer rechts durch geeignetes ε_i positiv gemacht werden, da ζ von der Größe der ε_i nicht abhängt, während die linke Seite mit $i \rightarrow \infty$ gegen Null strebt; das führt aber zu einem Widerspruch, und daher muß immer (15. 5) gelten.

Wir erkennen daraus, daß die Grenzfunktion $\Phi(P)$ zur Funktionsklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ gehört; und für alle solche Funktionen wurde das Bestehen der Ungleichungen (14. 8) und (14. 9) nachgewiesen, da in den hierzu nötigen Überlegungen der Umstand, ob nun \mathfrak{M} kurvenhaft oder flächenhaft verteilt ist, gar keine Rolle spielte. Wir können deshalb der Ungleichung (15. 4) sofort die weitere

$$T_\Phi \geq \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

an die Seite stellen, die mit ihr zusammen das Ergebnis zeitigt, daß die Aussagen des Satzes 6 (§ 14) auch für den Fall ihre Richtigkeit bewahren, wenn die Punktmenge \mathfrak{M} flächenhaft verteilt ist und ganz in einem Kurvenrechteck unterzubringen ist.

§ 16. Von hier ist nur noch ein ganz kleiner Schritt zu dem allgemeinen Hauptsatz der Theorie der Funktionen geringster Steilheit; denn ist jetzt die abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} irgendwie im Innern des Bereiches \mathfrak{B} verteilt, so läßt sie sich nach dem Borelschen Überdeckungssatz durch endlich viele, höchstens in ihren Rändern zusammenstoßende Kurvenrechtecke $\Omega_1, \dots, \Omega_k, \dots$ der vorhin betrachteten Art überdecken, auf deren jedes die Überlegungen des letzten Paragraphen Anwendung finden können.

Konstruieren wir dann mit ihrer Hilfe aus den Funktionen geringster Steilheit für die Teilmengen $\mathfrak{M} \Omega_k \subset \mathfrak{M}$ durch den gleichen stufenartigen Prozeß, der auch schon in den §§ 14 und 15 zur Beweisführung herangezogen wurde, eine Funktion $\Phi(P)$ geringster Steilheit für die Gesamtmenge \mathfrak{M} , so erhalten wir ohne große Schwierigkeiten den

Hauptsatz. *Ist die abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} im Innern des Bereiches \mathfrak{B} irgendwie verteilt und liegen auf ihr keine geschlossenen Integralkurven des Systems*

$$(E. 2) \quad \dot{x} = \xi_1(x, y), \quad \dot{y} = \xi_2(x, y),$$

so enthält die Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ stets mindestens eine Funktion $\Phi(P)$ kleinstmöglicher Steilheit

$$(16. 1) \quad T_{\Phi} = T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}),$$

und diese minimale Steilheit läßt sich aus der Betrachtung der Dichtigkeitsverteilungen derjenigen Punkte $c' \subset c$, in denen die Kurven $c \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ auf \mathfrak{M} die Vektoren (ξ_1, ξ_2) gleichsinnig berühren, nach der Formel

$$(16. 2) \quad T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

berechnen.

§ 17. Dieses Resultat wollen wir jetzt noch ein klein wenig verallgemeinern: Wir können nämlich die Bedingung, \mathfrak{M} sei ganz im Innern von \mathfrak{B} gelegen, streichen, wenn wir über den Rand \mathfrak{R} von \mathfrak{B} voraussetzen, daß er rektifizierbar sei. Diese Voraussetzung müssen wir machen, damit wir sicher sind, in jedem Falle das Funktional $q(c)$ auch berechnen zu können.

Bedeutet dann \mathfrak{R}' die Menge aller jener Linienelemente von \mathfrak{R} , welche die Richtung der Vektoren (ξ_1, ξ_2) haben, so müssen wir für die auf dem Rande von \mathfrak{B} gelegenen Punkte aus \mathfrak{M} an Stelle der Forderung (E. 3) nur die folgende neue treten lassen: In fast allen (d. h. in allen mit Ausnahme höchstens solcher, die in ihrer Gesamtheit auf \mathfrak{R} das Lebesguesche Maß Null besitzen) Punkten $P \subset \mathfrak{R}' \mathfrak{M}$ soll

$$(17. 1) \quad \frac{df}{ds_{\mathfrak{R}}} \geq \Delta(x, y)$$

sein, wenn man hierin mit $ds_{\mathfrak{R}}$ das im Sinne des Vektors (ξ_1, ξ_2) durchlaufene Randelement in P bezeichnet.

Da durch diese Abänderung die Anwendungsmöglichkeit unseres bisher benutzten stufenartigen Konstruktionsverfahrens zur Gewinnung der Funktionen geringster Steilheit nicht im geringsten berührt wird, so leuchtet ein, daß auch für diesen erweiterten Fall die Aussagen des Hauptsatzes ihre Gültigkeit beibehalten.

§ 18. Wir sind jetzt in der Lage, durch ein Beispiel zu belegen, daß für endliche obere Grenzen $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ nicht immer eine Kurve c_0 zu existieren braucht, auf der das Funktional $q(c)$ den Wert $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ auch wirklich annimmt, ein Vorkommnis, auf das schon am Ende des § 5 hingewiesen wurde. Hierin unterscheidet sich also der Fall ganz willkürlicher Punktmengen \mathfrak{M} wesentlich von den Verhältnissen des § 10, die hauptsächlich auf der diskreten Natur der dort eingehenden Intervallmenge $\{J_{ik}\}$ gründen.

Dieses Beispiel stützt sich auf folgenden

Hilfssatz. Ist $c = c' + c''$ irgendeine in kanonischer Zerschneidung vorliegende Kurve der Klasse $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ und gilt für eine Funktion $f(P)$ geringster Steilheit nicht in fast allen Punkten $P \subset c'$ und $Q \subset c''$

$$(18.1) \quad \frac{df(P)}{ds} = \Delta \quad \text{bzw.} \quad \frac{df(Q)}{ds} = -T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}),$$

($ds =$ positiv orientiertes Linienelement von c), so ist

$$q(c) < \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}).$$

Beweis. Unter der Annahme des Nicht-Bestehens wenigstens einer der Gleichungen (18.1) erhält man nämlich

$$\int_{c'} \frac{df}{ds} ds > \int_{c'} \Delta ds \quad \text{oder} \quad \int_{c''} \frac{df}{ds} ds > -T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \cdot \int_{c''} ds,$$

was in Verbindung mit der Identität

$$0 = \oint_c \frac{df}{ds} ds = \int_{c'} \frac{df}{ds} ds + \int_{c''} \frac{df}{ds} ds$$

sofort die Behauptung ergibt.

Nun zu unserem Beispiel selber: Es bedeute

$$(18.2) \quad 2 < n_1 < n_2 < \dots < n_j < n_{j+1} < \dots \rightarrow \infty$$

eine stets wachsende Folge positiver ganzer rationaler Zahlen, für welche die unendliche Reihe

$$(18.3) \quad Z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j}$$

konvergiert. Ist dann $\tilde{\omega}$ eine nur den Einschränkungen

$$(18.4) \quad 0 < \tilde{\omega} < 1$$

unterworfen reelle Zahl, so nehme man als Bereich \mathfrak{B} die Kreisscheibe \mathfrak{R} vom Radius

$$(18.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{\mathfrak{R}} = 1 + R = 1 + P \cdot e^{\frac{2\pi\tilde{\omega}}{1+\tilde{\omega}^2}} \cdot Z, \\ (P = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n_j})) \end{array} \right.$$

um den Koordinatenursprung $x = y = 0$ als Mittelpunkt und als Differentialgleichungssystem (E. 2):

$$(18.6) \quad \dot{x} = -\xi_1(x, y) = \tilde{\omega} \cdot x - y, \quad \dot{y} = \xi_2(x, y) = x + \tilde{\omega} \cdot y,$$

dessen Integralkurven die logarithmischen Spiralen

$$(18.7) \quad \mathfrak{L}: r = r_0 \cdot e^{\tilde{\omega}(\varphi - \varphi_0)}$$

sind, mit dem Koordinatenursprung $x = y = 0$ als einzigem singulären Punkt.

In \mathfrak{B} zeichnen wir dann das System der konzentrischen Kreise \mathfrak{R}_r von den Radien r_r , die durch die Rekursionsformel

$$(18.8) \quad r_{r+1} = r_r \cdot \left(1 + \frac{1}{n_r}\right) \cdot e^{\frac{2\pi\tilde{\omega}}{1+\tilde{\omega}^2} \cdot \frac{1}{n_r}}$$

miteinander verbunden sind, und zerschneiden \mathfrak{R}_r durch die äquidistanten Punkte

$$(18.9) \quad P_{r,1}, P_{r,2}, \dots, P_{r,k}, \dots, P_{r,n_r}$$

in gleichgroße Peripheriebögen von der Länge $r_r \cdot \frac{2\pi}{n_r}$. Durch jeden Punkt der Reihe (18.9) legen wir dann die durch ihn hindurchgehende Integralkurve $\mathfrak{L}_{r,k}$ (18.7) und machen dieselbe so lang, bis sie zum erstenmal den Kreis \mathfrak{R}'_{r+1} von dem im Vergleich zu r_{r+1} etwas kleineren Radius

$$(18.10) \quad r'_r = r_r \cdot e^{\frac{2\pi\tilde{\omega}}{1+\tilde{\omega}^2} \cdot \frac{1}{n_r}}$$

trifft. Die Vereinigung aller dieser Bogenstücke $\mathfrak{L}_{r,k}$ zusammen mit der Peripherie des Kreises $\mathfrak{R}(R)$ vom Radius

$$R = P \cdot e^{\frac{2\pi\tilde{\omega}}{1+\tilde{\omega}^2} \cdot 2}$$

bilde dann die abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} , welche in unseren Untersuchungen immer aufgetreten ist.

Die stetige Funktion $\Delta(x, y)$ endlich genüge folgenden Vorschriften:

1. Sie hänge nur vom Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ab, sei also kreissymmetrisch; außerdem sei sie überall eindeutig und stetig, positiv und mit wachsendem r nie abnehmend.

2. In dem Kreisring $\mathfrak{R}'_r: r_r \leq r \leq r'_r$ (siehe Formel (18.10)) sei

$$(18.11) \quad \begin{cases} \Delta(r) = \Delta_r = \text{const} \\ \Delta_{r+1} > \Delta_r \end{cases}$$

und die Konstanten Δ_r werden so gewählt, daß auch noch die Zahlen

$$(18.12) \quad \Theta_r = \frac{\Delta_r}{\tilde{\omega}} \cdot \sqrt{1 + \tilde{\omega}^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{\sin \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{1 + \tilde{\omega}^2} \cdot \frac{\pi}{n_r} \right)}{\sin \left(\frac{\tilde{\omega}}{1 + \tilde{\omega}^2} \cdot \frac{\pi}{n_r} \right)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

eine stets wachsende Folge mit endlichem Grenzwert ausmachen.

3. In allen übrigen Punkten des Gebietes \mathfrak{B} werde $\Delta(r)$ irgendwie so ergänzt, daß eine im ganzen stetige und monotone Funktion herauskommt, die den Forderungen der Ziffer 1 Genüge leistet.

Ich behaupte: Für das mit dieser Funktion $\Delta(x, y) = \Delta(r)$ und dieser Punktmenge \mathfrak{M} gebildete Funktional $q(c)$ ist

$$(18.13) \quad \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \frac{\Delta(R)}{\tilde{\omega}}$$

obere Grenze, aber nicht Maximum.

Es muß also gezeigt werden, daß hier keine geschlossene rektifizierbare Kurve $c_0 \subset \mathbb{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ existiert, auf der (18.13) erreicht wird. Dazu definieren wir eine Funktion $f^*(P)$ geringster Steilheit über der Menge \mathfrak{M} , die folgende Eigenschaften aufweist:

1. In den Punkten P_{rk} (18.9) der Kreisperipherie \mathfrak{R}_r habe $f^*(P)$ einen konstanten Wert C_r , der nur vom Radius r des Kreises \mathfrak{R}_r abhängt und durch die Rekursionsformel

$$(18.14) \quad \begin{cases} c_{r+1} = c_r + \Delta_r \cdot \frac{\sqrt{1 + \tilde{\omega}^2}}{\tilde{\omega}} \cdot \left(e^{\frac{2\pi\tilde{\omega}}{1 + \tilde{\omega}^2}} \cdot \frac{1}{n_r} - 1 \right) \cdot r, \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

zu gewinnen ist.

2. Auf den Integralkurvenstücken \mathfrak{Q}_{rk} sei

$$(18.15) \quad \frac{df^*}{ds_{\mathfrak{Q}_{rk}}} = \Delta_r$$

($ds_{\mathfrak{Q}_{rk}}$ = positives orientiertes Linienelement von \mathfrak{Q}_{rk}).

3. Im ganzen Bereiche \mathfrak{B} sei

$$(18.16) \quad f^*(P) \geq 0.$$

Die Existenz einer so beschaffenen Funktion geringster Steilheit läßt sich folgendermaßen erweisen: Bezeichnet man vorübergehend mit $\hat{f}(P)$ die durch die Forderungen (18.14) bis (18.16) auf der Menge $\mathfrak{M} = \sum_r \mathfrak{R}_r \cdot \mathfrak{M}$ allein

definierte Funktion, so sieht man ohne Schwierigkeiten, 1. daß für je zwei Punkte Q_1 und Q_2 irgendeines Kreisringes \mathfrak{R}'_r ($r \leq r' \leq r''$) ($r = 1, 2, \dots$)

$$(18.17) \quad \frac{|f(Q_1) - f(Q_2)|}{Q_1 Q_2} \leq \Theta_r,$$

ist, worin $\overline{Q_1 Q_2}$ die euklidische Entfernung der beiden Punkte Q_1 und Q_2 bedeutet, und 2. daß es stets Punktepaare (Q'_1, Q'_2) in \mathfrak{R}'_r gibt, in denen Θ_r erreicht wird. $f^*(P)$ stellt dann die Fortsetzung von $f(P)$ im ganzen Bereich \mathfrak{B} dar, die nach dem Lemma des § 6 konstruiert wurde.

Da nun, wie man aus (18.12) leicht ausrechnet,

$$(18.18) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Theta_r = \frac{\Delta(R)}{\overline{\omega}}$$

ist, so erfüllt die hierdurch gewonnene Funktion $f^*(P)$ überall in \mathfrak{B} die Relation

$$\frac{|f^*(P_1) - f^*(P_2)|}{P_1 P_2} \leq \frac{\Delta(R)}{\overline{\omega}}$$

(denn die Θ_r bildeten ja eine stets wachsende Zahlenfolge!), und es ist daher auch

$$(18.19) \quad T_{f^*} = \frac{\Delta(R)}{\overline{\omega}},$$

weil die größten Werte des Differenzenquotienten von $f^*(P)$ in ganz beliebiger Nähe des Kreises $\mathfrak{R}(R)$ angenommen werden müssen.

Auf Grund der Symmetrie unseres Beispiels ist aber (18.19) auch schon der kleinste überhaupt mögliche Wert der Steilheiten für Funktionen $f(P)$, die auf \mathfrak{M} die Bedingung

$$\frac{df}{ds_{\mathfrak{B},k}} \geq \Delta,$$

erfüllen.

Wäre nun für eine Kurve $c_0 \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$

$$q(c_0) = \frac{\Delta(R)}{\overline{\omega}},$$

so müßte nach dem vorangeschickten Hilfssatz in fast allen Punkten $P \in c'_0$ und $Q \in c''_0$

$$\frac{df^*(P)}{ds} = \Delta(P) \quad \text{bzw.} \quad \frac{df^*(Q)}{ds} = -\frac{\Delta(R)}{\overline{\omega}}$$

sein; das ist aber unmöglich, wenigstens bestimmt für die zweite der hingschriebenen Gleichungen, da dieselbe, wenn überhaupt, gewiß nur auf dem Kreise $\mathfrak{R}(R)$ bestehen könnte, auf diesem Kreise aber $f^*(P)$ eine Konstante, nämlich $\lim_{r \rightarrow \infty} \Theta_r$ ist. — Damit ist alles bewiesen.

Teil B.

III. Das Funktional $\lambda(c)$.

§ 19. Nachdem wir so die Theorie der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ zu einem gewissen Abschluß gebracht haben, wenden wir uns zu entsprechenden Untersuchungen an der Funktionenklasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ (siehe Einleitung), die als Unterklasse von $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ alle diejenigen in \mathfrak{B} eindeutigen und stetigen Funktionen $f(x, y)$ enthält, die noch stetige erste Ableitungen f_x, f_y besitzen und demzufolge auf \mathfrak{M} die Ungleichung

$$\xi_1 \cdot f_x + \xi_2 \cdot f_y \geq \Delta(x, y) \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

zu erfüllen haben. In ähnlicher Weise nun, wie die Theorie der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ beherrscht war von dem Funktional $q(c)$ (§ 1), ist auch die Funktionenklasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ beherrscht von einem Funktional $\lambda(c)$, welches die positive Wurzel der Gleichung

$$(19.1) \quad \lambda(c) \cdot \int_{c - c \cdot \mathfrak{M}} ds + \int_{c \cdot \mathfrak{M}} [|\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda(c)^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds = 0$$

ist; unter welchen Umständen (19.1) eine solche Wurzel hat, wird der unten folgende Satz 7 lehren. Zunächst noch etwas zur Erläuterung der Bezeichnungsweise: ds bedeutet in (19.1) das positiv durchlaufene Linienelement der Kurve c , die selbst geschlossen und rektifizierbar ist, α den Winkel dieses Linienelementes gegen die Richtung des Vektors (ξ_1, ξ_2) , welcher als zwischen $-\pi$ und $+\pi$ enthalten angenommen werden soll und positiv dann gezählt wird, wenn durch eine Linksdrehung um den Betrag α das Linienelement ds in die Richtung (ξ_1, ξ_2) übergeführt werden kann. $c \cdot \mathfrak{M}$ ist der Durchschnitt der Kurve c mit der abgeschlossenen Punktmenge \mathfrak{M} .

Die Gleichung (19.1) kann reelle Lösungen nur dann haben, wenn die Differenz $\lambda^2 - \Delta^2$ nicht negativ ausfällt. Wann dies sicherlich zutrifft, sagt der

Satz 7. Ist

$$(19.2) \quad q(c) > \max_{(x, y) \in \mathfrak{M} \cap c} \Delta(x, y),$$

so besitzt (19.1) genau eine positive Lösung $\lambda(c)$, und diese genügt der Ungleichung

$$(19.3) \quad \lambda(c) > q(c).$$

Beweis. Unter der Voraussetzung (19.2) darf man $q(c)$ an Stelle von $\lambda(c)$ in die linke Seite der Gleichung (19.1) einführen, ohne dadurch zu nicht

reellen Werten zu gelangen; man bekommt auf diese Weise bei Verwendung der kanonischen Zerschneidung $c = c' + c''$ und Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \int_{c'} \Delta ds &= q(c) \cdot \int_{c''} ds: \\ q(c) \cdot \int_{c-c''} ds + \int_{c''} [|\sin \alpha| \sqrt{q^2(c) - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds \\ &= q(c) \cdot \int_{c''-c''} ds + \int_{c''} |\sin \alpha| \sqrt{q(c)^2 - \Delta^2} ds - \int_{c'} \Delta ds - \int_{c''} \Delta \cdot \cos \alpha ds \\ &= - \int_{c''} [q(c) - |\sin \alpha| \cdot \sqrt{q(c)^2 - \Delta^2} + \Delta \cdot \cos \alpha] ds; \end{aligned}$$

hier ist aber die eckige Klammer der letzten Zeile zufolge der Schwarzschen Ungleichung

$$|\sin \alpha| \cdot \sqrt{q^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha \leq q$$

stets positiv, wodurch wir erkennen, daß die Einsetzung von $q(c)$ an Stelle von $\lambda(c)$ in die linke Seite der Gleichung (19.1) etwas Negatives liefert. Da diese linke Seite aber eine stets zunehmende Funktion von $\lambda(c)$ ist, folgt somit der Satz 7.

§ 20. Als Gegenstück zu dem Satz 4 des § 5 notieren wir hier den

Satz 8. $\lambda(c)$ ist dann und nur dann $= \infty$, wenn c eine geschlossene Integralkurve des Systems (E. 2) auf der Punktmenge \mathfrak{M} ist.

Zum Beweise schreiben wir die Gleichung (19.1) in der Form

$$(20.1) \quad 1 = \frac{\int_{c \in \mathfrak{M}} \left[1 + \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \cos \alpha - |\sin \alpha| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2} \right] ds}{\oint_c ds}$$

Ist nun hierin $\lambda(c) = \infty$, so heißt das:

$$1 = \frac{\int_{c \in \mathfrak{M}} [1 - |\sin \alpha|] ds,}{\oint_c ds},$$

eine Gleichung, die nur bei gleichzeitigem Bestehen von

$$1) \int_{c \in \mathfrak{M}} ds = \oint_c ds \quad \text{und} \quad 2) \int_{c \in \mathfrak{M}} |\sin \alpha| ds = 0$$

richtig sein kann. Die erste dieser letzteren Gleichungen besagt aber, daß c ganz auf der abgeschlossenen Punktmenge \mathfrak{M} gelegen sein muß, während die

zweite ausdrückt, daß höchstens in einer Teilmenge vom Lebesgueschen Maße Null auf $c\mathfrak{M}$ der Winkel $\alpha \neq 0$ sein kann. Da aber die Vektoren (ξ_1, ξ_2) stetig auf $c\mathfrak{M}$ variieren, ist dies nicht möglich, womit c als eine auf \mathfrak{M} gelegene geschlossene Integralkurve des Systems (E. 2) nachgewiesen ist.

Ist nun umgekehrt c eine geschlossene Integralkurve von (E. 2) auf \mathfrak{M} , so ist 1. $c\mathfrak{M} = c$ und 2. reduziert sich (20. 1) auf

$$0 = \oint_c \frac{\Delta}{\lambda} ds.$$

Nun wurde aber Δ stets $\geq m_1 > 0$ (Formel (E. 3) der Einleitung) vorausgesetzt, so daß diese Gleichung nur richtig sein kann, wenn $\lambda = \infty$ ist. Damit ist alles bewiesen.

§ 21. Wir kommen jetzt zum wichtigsten Satz über das Funktional $\lambda(c)$, der in der Theorie der Funktionenklasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ ungefähr die gleiche Bedeutung besitzt, wie der Satz 4 des § 5 für die Theorie der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$. Denn mit seiner Hilfe wird es uns gelingen, die Sätze der Funktionenklasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ abzuleiten aus den schon bekannten Gesetzmäßigkeiten der Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ für \mathfrak{B} umfassende Bereiche \mathfrak{B} , die wir schließlich sich auf \mathfrak{B} zusammenziehen lassen. \mathfrak{M} ist dabei eine in \mathfrak{B} gelegene abgeschlossene Punktmenge, welche jeden Punkt der abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$ als inneren Punkt enthält (siehe § 22).

Der Satz lautet:

Satz 9. $\lambda(c)$ ist auf der Gesamtheit aller geschlossenen rektifizierbaren Kurven $c \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$, deren Bogenlänge unterhalb einer festen Schranke L gelegen ist, nach oben halbstetig, sofern auf der fraglichen Gesamtheit

$$q(c) > \max_{(x,y) \subset \mathfrak{M}} \Delta(x,y)$$

ist. (Diese letztere Bedingung wurde nur zu dem Zwecke der reellen Bestimmbarkeit von $\lambda(c)$ aus (19. 1) gemacht; vgl. den Satz 7 des § 19).

Sein Beweis stützt sich auf eine Reihe von Hilfssätzen, die wir der Reihe nach vorweg behandeln wollen.

Hilfssatz a). Bedeutet α den zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegenen Winkel des positiv orientierten Linienelementes ds einer rektifizierbaren Kurve γ gegen die Richtung des Vektors (ξ_1, ξ_2) , so ist das Funktional

$$(21.1) \quad \int_{\gamma} |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds,$$

in dem λ eine von γ nicht abhängende Konstante ist, unterhalb stetig auf der Klasse aller rektifizierbaren Kurvenstücke γ von gleichmäßig beschränkter Bogenlänge.

Den Beweis des Hilfssatzes führen wir in mehreren Schritten.

1. Schritt. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es auf γ ein System endlich vieler getrenntliegender Teilbögen $\{\gamma^{(k)}\}$, mit welchem die Ungleichung

$$(21.2) \quad 0 \leq \int_{\gamma} |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds - \sum_k \left| \int_{\gamma^{(k)}} \sin \alpha \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| \leq \varepsilon$$

befriedigt werden kann. In der Tat, verteilen wir die Punkte von γ auf zwei Klassen γ^+ und γ^- , von denen γ^+ alle und nur die Punkte bekommt, in denen $\sin \alpha \geq 0$ ist, und γ^- alle übrigen, so läßt sich sowohl für γ^+ als auch für γ^- je ein maßgleicher Kern $\hat{\gamma}^+$ bzw. $\hat{\gamma}^-$ so bestimmen, daß in allen Punkten $P \in \hat{\gamma}^+$ ($P \in \hat{\gamma}^-$) die Menge γ^+ (bzw. γ^-) die Lebesguesche Dichte 1 besitzt. Infolgedessen gibt es zu jeder Zahl $\varepsilon_1 > 0$ um die Punkte $P \in \hat{\gamma}^+$ und $P \in \hat{\gamma}^-$ Intervalle $J(P)$ jeder beliebigen Kleinheit, die

$$(21.3) \quad \frac{\mu J(P) \cdot \gamma^+}{\mu \gamma^+} \geq 1 - \varepsilon_1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mu J(P) \cdot \gamma^-}{\mu \gamma^-} \geq 1 - \varepsilon_1$$

erfüllen. Aus ihrer Gesamtheit können wir dann endlich viele getrenntliegende $\{J_i\}$ so auswählen, daß ihre Vereinigung die Punktmenge $(\hat{\gamma}^+ + \hat{\gamma}^-)$, die auch ein maßgleicher Kern des ganzen Bogens γ ist, entsprechend der Forderung

$$(21.4) \quad \sum_i \mu(J_i \cdot (\hat{\gamma}^+ + \hat{\gamma}^-)) \geq (1 - \varepsilon_2) \cdot \mu(\hat{\gamma}^+ + \hat{\gamma}^-) = (1 - \varepsilon_2) \cdot \mu \gamma$$

überdeckt, in der $\varepsilon_2 > 0$ unabhängig von ε_1 irgendwie vorgegeben sei (Überdeckungssatz von Vitali).

Setzen wir jetzt vorübergehend (d. h. bis Formel (21. 5)) die Betrachtungen nur am Beispiel der Punktmenge $\hat{\gamma}^-$ ausführlicher auseinander, da sie für die Punkte $\hat{\gamma}^+$ ganz gleichlautend verlaufen würden, so können wir weiter schließen.

1. ist

$$\int_{J_i} |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds = \left| \int_{J_i \hat{\gamma}^-} \sin \alpha \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| + \int_{J_i - J_i \hat{\gamma}^-} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds$$

und 2.

$$\left| \int_{J_i} \sin \alpha \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| \geq \left| \int_{J_i \hat{\gamma}^-} \sin \alpha \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| - \int_{J_i - J_i \hat{\gamma}^-} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds.$$

Daraus entsteht durch Subtraktion bei Berücksichtigung von (21. 3)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{J_i} |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds - \left| \int_{J_i} \sin \alpha \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| \\ &\leq 2 \cdot \int_{J_i - J_i \hat{\gamma}^-} |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \leq 2 \cdot \varepsilon_1 \cdot M \cdot \mu J_i, \end{aligned}$$

wenn man mit M eine obere Schranke für den Ausdruck $\sqrt{\lambda^2 - \Delta^2}$ auf der Menge γ bezeichnet. Eine ganz entsprechende Abschätzung gilt auch für die Intervalle $J_i(P)$, die zu Punkten $P \in \gamma^+$ gehören. Durch Summation über l bekommt man zunächst

$$(21.5) \quad 0 \leq \sum_i \int_{J_i} |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds - \sum_i \left| \int_{J_i} \sin \alpha \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| \leq 2 \cdot \varepsilon_1 \cdot M \cdot \mu \gamma.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds &= \sum_i \int_{J_i} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds + \int_{\gamma - \sum J_i} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \\ &\leq \sum_i \int_{J_i} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds + M \cdot \mu (\gamma - \sum J_i) \\ &\leq \sum_i \int_{J_i} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds + \varepsilon_1 \cdot M \cdot \mu \gamma, \end{aligned}$$

wie sich sofort unter Heranziehung von (21.4) aus der Tatsache nachrechnen läßt, daß alle J_i auf γ gelegen sind; und dies in (21.5) eingeführt, ergibt

$$0 \leq \int_{\gamma} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds - \sum_i \left| \int_{J_i} \sin \alpha \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| \leq M \cdot (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot \mu \gamma,$$

eine Ungleichung, die mit (21.2) übereinstimmt, wenn man dort für $\gamma^{(k)}$ die Intervalle J_i und für ε die Zahl $M \cdot (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot \mu \gamma$ nimmt.

2. Schritt. Es sei $\{\gamma_v\}$ eine gegen γ konvergierende Folge rektifizierbarer Kurven gleichmäßig beschränkter Bogenlänge und $\{\gamma^{(k)}\}$ das der Ungleichung (21.2) entsprechende auf γ bestimmte System aus endlich vielen getrennliegenden Intervallen. Beziehen wir dann γ und γ_v auf einen und denselben Parameter t , so entspricht jedem Intervall $\gamma^{(k)} \subset \gamma$ ein $\gamma_v^{(k)} \subset \gamma_v$, wenn Punkte mit demselben t -Wert einander zugeordnet werden. („Abbildung durch konstante Parameter.“) Infolgedessen konvergieren die Teilbögen $\gamma_v^{(k)}$ mit wachsendem $v \rightarrow \infty$ auch gegen einen Teilbogen $\gamma^{(k)}$, und weil das Funktional

$$\int_{\gamma} \sin \alpha \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds$$

stetig ist auf der Gesamtheit aller rektifizierbaren Kurvenbögen gleichmäßig beschränkter Bogenlänge¹⁸⁾, so gilt die Beziehung

$$(21.6) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\gamma_v^{(k)}} \sin \alpha \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds = \int_{\gamma^{(k)}} \sin \alpha \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds.$$

¹⁸⁾ L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Bd. I (1921), § 108 b.

Nun hat man

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\gamma}} |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds - \int_{\tilde{\gamma}_v} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \\ &= \left[\int_{\tilde{\gamma}} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds - \sum_k \left| \int_{\gamma^{(k)}} \sin \alpha \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| \right] \\ & \quad - \left[\int_{\tilde{\gamma}_v} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds - \sum_k \left| \int_{\gamma_v^{(k)}} \sin \alpha \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| \right] \\ & \quad + \sum_k \left[\left| \int_{\gamma^{(k)}} \sin \alpha \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| - \left| \int_{\gamma_v^{(k)}} \sin \alpha \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \right| \right], \end{aligned}$$

und hierin wird das letzte Glied rechts wegen (21. 6) ganz beliebig klein, falls $v \rightarrow \infty$ geht, das vorletzte ist nie positiv und das erste wegen (21. 2) $\leq \varepsilon$. Da dieses aber willkürlich wählbar ist, können wir hieraus die Grenzungleichung

$$(21. 7) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_v} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds \geq \int_{\tilde{\gamma}} |\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} ds$$

behaupten, die nur der formelmäßige Ausdruck für die Aussage des Hilfssatzes a) ist.

Hilfssatz b). Ist 1. $\{\gamma_v\}$ eine gegen die rektifizierbare Kurve γ konvergierende Folge von Kurven gleichmäßig beschränkter Bogenlänge, ist 2. $\tilde{\gamma}$ ein System endlich vieler auf γ getrennliegender Intervalle und $\tilde{\gamma}_v$, die ihr auf γ_v vermöge der „Abbildung durch konstante Parameter“ entsprechende Intervallmenge und definiert man 3. die Zahlen χ bzw. χ_v als positive Wurzeln (deren Existenz vorausgesetzt!) der Gleichungen

$$(21. 8) \quad \chi \cdot \int_{\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_v} ds + \int_{\tilde{\gamma}_v} [|\sin \alpha| \cdot \sqrt{\chi^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds = 0$$

bzw.

$$(21. 9) \quad \chi_v \cdot \int_{\tilde{\gamma}_v - \tilde{\gamma}_v} ds + \int_{\tilde{\gamma}_v} [|\sin \alpha| \cdot \sqrt{\chi_v^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds = 0,$$

so gilt stets

$$(21. 10) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \chi_v \leq \chi.$$

Beweis. Vermöge des Hilfssatzes a) ist

$$\lim_{v' \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_{v'}} |\sin \alpha| \sqrt{\chi_{v'}^2 - \Delta^2} ds \geq \int_{\tilde{\gamma}} |\sin \alpha| \sqrt{\chi^2 - \Delta^2} ds$$

für diejenige Teilfolge $\{\gamma_{v'}\}$ aus $\{\gamma_v\}$, die

$$\lim_{v' \rightarrow \infty} \chi_{v'} = \lim_{v \rightarrow \infty} \chi_v = \tilde{\chi}$$

liefert. Da nun außerdem die Bogenlänge ein unterhalbstetiges Funktional ist, gewinnt man aus (21. 9) durch diesen Grenzübergang $\nu' \rightarrow \infty$

$$\tilde{\chi} \cdot \int_{\gamma-\tilde{\gamma}} ds + \int_{\tilde{\gamma}} [|\sin \alpha| \sqrt{\tilde{\chi}^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds \leq 0,$$

denn $\int_{\tilde{\gamma}} \Delta \cdot \cos \alpha ds$ ist ein stetiges Funktional auf der Gesamtheit aller rektifizierbaren Kurven gleichmäßig beschränkter Bogenlänge¹⁹⁾. Der Vergleich mit (21. 8) ergibt dann sofort die Behauptung (21. 10) des Hilfssatzes b), weil doch die linke Gleichungsseite stets wachsend in χ ist.

Hilfssatz c). Ist auf der rektifizierbaren Kurve γ ein aus endlich vielen getrenntliegenden Intervallen bestehendes System $\tilde{\gamma}$ gegeben, welches die abgeschlossene Punktmenge $\gamma \cdot \mathfrak{M}$ ganz umschließt, so folgt aus der vorausgesetzten Existenz einer positiven Lösung der Gleichung

$$(21. 11) \quad \lambda \cdot \int_{\gamma-\gamma\mathfrak{M}} ds + \int_{\gamma\mathfrak{M}} [|\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds = 0$$

die einer positiven Lösung der Gleichung

$$(21. 12) \quad \chi \cdot \int_{\gamma-\tilde{\gamma}} ds + \int_{\tilde{\gamma}} [|\sin \alpha| \cdot \sqrt{\chi^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds = 0,$$

und man kann zu jeder vorgeschriebenen kleinen Zahl $\eta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ so finden, daß die Forderung

$$(21. 13) \quad \mu(\tilde{\gamma} - \gamma\mathfrak{M}) \leq \varepsilon$$

die Ungleichung

$$(21. 14) \quad |\lambda - \chi| \leq \eta$$

nach sich zieht.

Beweis. Führen wir zunächst in die linke Seite der Gleichung (21. 12) an Stelle von χ die Wurzel λ der Gleichung (21. 11) ein, so erhalten wir (da ja $\tilde{\gamma} \supset \gamma\mathfrak{M}$ sein sollte!)

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \int_{\gamma-\tilde{\gamma}} ds + \int_{\tilde{\gamma}} [|\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} - \Delta \cos \alpha] ds \\ = \lambda \cdot \int_{\gamma-\gamma\mathfrak{M}} ds + \int_{\gamma\mathfrak{M}} [|\sin \alpha| \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds \\ - \int_{\tilde{\gamma}-\gamma\mathfrak{M}} [\lambda - |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} + \Delta \cdot \cos \alpha] ds; \end{aligned}$$

¹⁹⁾ Vgl. L. Tonelli, l. c., Anm. 18).

hier verschwindet aber das erste Glied rechts wegen (21. 11), und das zweite ist nie positiv wegen der Schwarzischen Ungleichung. Mithin muß

$$(21. 15) \quad \lambda \leq \chi$$

sein, was schon die erste Aussage des Hilfssatzes c) darstellt.

Zum zweiten können wir die gleiche Umformung auch mit der Gleichung (21. 11) selbst vornehmen und erhalten dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq \chi \cdot \int_{\gamma-\gamma\mathfrak{M}} ds + \int_{\gamma\mathfrak{M}} [|\sin \alpha| \cdot \sqrt{\chi^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds \\ &= \int_{\bar{\gamma}-\gamma\mathfrak{M}} [\chi - |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\chi^2 - \Delta^2} + \Delta \cdot \cos \alpha] ds \leq 2\chi \cdot \mu(\bar{\gamma} - \gamma\mathfrak{M}) \leq 2 \cdot \varepsilon \cdot \chi, \end{aligned}$$

wenn wir noch die Bedingung (21. 13) einführen. Hieraus und aus (21. 11) gewinnen wir dann die Abschätzung

$$(21. 16) \quad 0 \leq (\chi - \lambda) \cdot \int_{\gamma-\gamma\mathfrak{M}} ds + \int_{\gamma\mathfrak{M}} |\sin \alpha| \cdot [\sqrt{\chi^2 - \Delta^2} - \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2}] ds \leq 2 \cdot \varepsilon \cdot \chi.$$

Nun ist wegen (21. 15)

$$\sqrt{\chi^2 - \Delta^2} - \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} = \frac{\chi^2 - \lambda^2}{\sqrt{\chi^2 - \Delta^2} + \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2}} \geq \frac{\chi^2 - \lambda^2}{2\sqrt{\chi^2 - \Delta^2}} \geq 0,$$

was in (21. 16) eingesetzt

$$(21. 17) \quad 0 \leq (\chi - \lambda) \cdot \left\{ \int_{\gamma-\gamma\mathfrak{M}} ds + \int_{\gamma\mathfrak{M}} |\sin \alpha| \cdot \frac{\lambda + \chi}{2\sqrt{\chi^2 - \Delta^2}} ds \right\} \leq 2 \cdot \varepsilon \cdot \chi$$

ergibt. Ist nun $\gamma = \gamma\mathfrak{M}$, so muß wegen $\gamma \supset \bar{\gamma} \supset \gamma\mathfrak{M}$ die Wurzel χ mit der Wurzel λ übereinstimmen, und es ist nichts mehr zu beweisen. Wir dürfen daher $\gamma \supset \gamma\mathfrak{M}$ voraussetzen. Dann hat aber die geschweifte Klammer in (21. 17) einen positiven Wert, der nicht beliebig klein sein kann; folglich muß die Differenz $|\chi - \lambda|$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null gehen, womit auch die zweite Behauptung des Hilfssatzes c) verifiziert ist.

Jetzt sind wir endlich so weit, den eigentlichen Beweis des Satzes 9 in Angriff nehmen zu können. Wir geben uns eine rektifizierbare Kurve c und eine gegen sie konvergierende Folge $\{c_i\}$ solcher Kurven von gleichmäßig beschränkter Bogenlänge vor, die alle der Kurvenfamilie $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ entnommen sind und so gewählt seien, daß für sie die Funktionale $\lambda(c)$ und $\lambda(c_i)$ existieren. Überdecken wir dann auf c die Punktmenge $c\mathfrak{M}$ durch ein System \bar{c} getrenntliegender endlich vieler Teilbögen und übertragen dasselbe „mittels konstanter Parameter t “ auf die Kurven c_i , als die Intervallmenge \bar{c}_i , so können wir durch die Gleichungen

$$(21. 18) \quad \begin{cases} \chi \cdot \int_{c-\bar{c}} ds + \int_{\bar{c}} [|\sin \alpha| \sqrt{\chi^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds = 0, \\ \chi_i \cdot \int_{c_i-\bar{c}_i} ds + \int_{\bar{c}_i} [|\sin \alpha| \sqrt{\chi_i^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds = 0 \end{cases}$$

zwei Funktionale χ und χ_r definieren, die wegen (21. 15) zu den Funktionalen $\lambda(c)$ und $\lambda(c_r)$ in den Beziehungen

$$(21. 19) \quad \chi \geq \lambda(c) \quad \text{bzw.} \quad \chi_r \geq \lambda(c_r)$$

stehen, womit gleichzeitig ihre Definition durch die Forderungen (21. 18) legitimiert erscheint.

Nach dem Hilfssatz b) ist

$$\chi \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \chi_r,$$

und daher auch (wegen (21. 19))

$$(21. 20) \quad \chi \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(c_r).$$

Nach dem Hilfssatz c) aber kann man \bar{c} die Menge $c \cdot \mathfrak{M}$ so gut überdecken lassen, daß χ ganz beliebig wenig von $\lambda(c)$ unterschieden ist. Dann ergibt sich aber aus (21. 20) sofort

$$(21. 21) \quad \lambda(c) \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(c_r),$$

und das ist nichts anderes als die Halbstetigkeitsaussage des Satzes 9.

Damit haben wir alles vorbereitet, was notwendig ist, um die in der Funktionenklasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ gültigen Abschätzungsformeln herzuleiten, welche die Steilheiten T_r (insbesondere ihre untere Grenze $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$) innerhalb der Klasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ in Verbindung bringen mit den möglichen Dichtigkeitsverteilungen der Punktmenge \mathfrak{M} auf den rektifizierbaren geschlossenen Kurven $c \subset \mathbb{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$.

IV. Die Funktionenklasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$.

§ 22. Wir beginnen mit dem Existenzsatz

Satz 10. Ist $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) < \infty$, so enthält die Funktionenklasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ mindestens eine überall eindeutige, stetige und endliche Funktion $f(x, y)$, was sich auch in der Form ausdrücken läßt, daß die untere Grenze $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ der Steilheiten

$$T_r = \max_{(x, y) \in \mathfrak{B}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

der Funktionen $f(x, y) \in \mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ stets endlich ist:

$$(22. 1) \quad T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) < \infty.$$

Für seinen Beweis betten wir den Bereich \mathfrak{B} ein in einen umfassenderen Bereich $\hat{\mathfrak{B}}$, der jeden Punkt (d. h. inneren oder Randpunkt) von \mathfrak{B} ganz in seinem Innern enthält, und bestimmen in ihm eine abgeschlossene Punktmenge $\hat{\mathfrak{M}}$ mit der Eigenschaft, daß um jeden Punkt der abgeschlossenen Punktmenge $\hat{\mathfrak{M}} \subset \hat{\mathfrak{B}}$ eine ganze Kreisscheibe existiert, die nur aus Punkten von $\hat{\mathfrak{M}}$ besteht. Haben dann $\mathbb{C}(\hat{\mathfrak{B}}, \hat{\mathfrak{M}})$, $\mathfrak{F}(\hat{\mathfrak{B}}, \hat{\mathfrak{M}})$, $q(c)$, $\bar{q}(\hat{\mathfrak{B}}, \hat{\mathfrak{M}})$ für den Bereich $\hat{\mathfrak{B}}$ und die

Punktmenge \mathfrak{M} die gleiche Bedeutung wie die Größen $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ usw. für den Bereich \mathfrak{B} mit der Punktmenge \mathfrak{M} , so überzeugen wir uns zunächst davon, daß \mathfrak{B} stets so eng um \mathfrak{B} herumgezogen werden kann, daß

$$(22.2) \quad \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) < \infty$$

ausfällt. Denn anderenfalls ließe sich eine Folge ineinandergeschachtelter und auf \mathfrak{B} zusammenschrumpfender Bereiche

$$\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{B}_k \supset \mathfrak{B}_{k+1} \supset \dots \rightarrow \mathfrak{B}$$

mit dazugehörigen abgeschlossenen Punkt Mengen

$$\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{M}_k \supset \mathfrak{M}_{k+1} \supset \dots \rightarrow \mathfrak{M}$$

so ausfindig machen, daß immer

$$\bar{q}(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{M}_k) = \infty$$

wäre; das bedeutete aber auf Grund des Satzes 4 aus § 5 die Existenz einer einfach geschlossenen²⁰⁾ Integralkurve \hat{C}_k auf der Menge \mathfrak{M}_k , und alle diese Integralkurven hätten gleichmäßig beschränkte Bogenlängen. Wir könnten daher eine Auswahlfolge unter ihnen angeben, die gegen eine einfach geschlossene Integralkurve \hat{C} von (E. 2) auf der Menge \mathfrak{M} konvergierte, was mit der Voraussetzung $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) < \infty$ in Widerspruch steht. (Beweisgrund ist wieder der Satz 4 des § 5.)

Auf dem um \mathfrak{B} herumgelegten Bereiche \mathfrak{B} , für welchen (22. 2) gilt, wählen wir dann eine Funktion $\hat{f}(x, y) \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ mit minimaler Steilheit $T_{\hat{f}} = T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$, setzen sie auf Grund des Lemmas des § 6 in die ganze xy -Ebene hinein stetig fort und bilden mit ihr die weiter unten aufgeführten Tonellischen Polynome²¹⁾ (22. 3). Zu dem Ende legen wir um \mathfrak{B} ein hinreichend großes Quadrat Ω mit achsenparallelen Seiten von der Länge l , das den Ursprung $x = y = 0$ zum Mittelpunkt hat und auf seinem Rande keinen Punkt von \mathfrak{B} besitzt. In ihm betrachten wir dann die Polynome

$$(22.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_n(x, y) = \frac{k_n}{4} \cdot \int_{\Omega} \hat{f}(u, v) \cdot K_n(x - u, y - v) du dv, \\ K_n(\xi, \eta) = \left[1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l^2} \right]^n, \\ \frac{1}{k_n} = \int_0^l du \int_0^l dv \cdot K_n(u, v), \end{array} \right.$$

²⁰⁾ Einfachgeschlossen deshalb, weil auch in hinreichend kleiner Umgebung der Menge \mathfrak{M} keine singulären Punkte des Gleichungssystems (E. 2) gelegen sein können!

²¹⁾ L. Tonelli, Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali. Rendiconti circolo mat. di Palermo 29 (1910), p. 1–36.

welche die Eigenschaften haben, mit wachsendem $n \rightarrow \infty$ in jedem Punkte xy aus \mathfrak{B} gleichmäßig gegen $\dot{f}(x, y)$ zu konvergieren.

Da $f(x, y)$ als Funktion beschränkter Steilheit in allen Punkten xy des Bereiches \mathfrak{B} , höchstens mit Ausnahme solcher, die insgesamt ein zweidimensionales Lebesguesches Maß Null haben, ein totales Differential im Stolzischen Sinne²²⁾ und damit dort auch partielle Ableitungen \dot{f}_x, \dot{f}_y besitzt, so kann man die Ungleichung

$$(22.4) \quad \sqrt{\dot{f}_x^2 + \dot{f}_y^2} \leq T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

aufschreiben, die in allen Punkten $(x, y) \in \mathfrak{B}$ gilt, in denen die Ableitungen \dot{f}_x, \dot{f}_y vorhanden sind. Durch Differentiation von (22.3) bekommt man jetzt

$$(22.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial P_n(x, y)}{\partial x} = \frac{k_n}{4} \cdot \iint_{\Omega} \frac{\partial \dot{f}}{\partial u} \cdot K_n(x-u, y-v) du dv - p_{1n}(x, y), \\ p_{1n}(x, y) = \frac{k_n}{4} \cdot \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial u} [\dot{f} \cdot K_n(x-u, y-v)] du dv, \\ \frac{\partial P_n(x, y)}{\partial y} = \frac{k_n}{4} \cdot \iint_{\Omega} \frac{\partial \dot{f}}{\partial v} \cdot K_n(x-u, y-v) du dv - p_{2n}(x, y), \\ p_{2n}(x, y) = \frac{k_n}{4} \cdot \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial v} [\dot{f} \cdot K_n(x-u, y-v)] du dv, \end{cases}$$

und darin gehen $p_{1n}(x, y)$ und $p_{2n}(x, y)$ dem Betrag nach gleichmäßig gegen Null, wenn $n \rightarrow \infty$ wächst. Durch Zusammenfassung dieser Ausdrücke (22.5) und Einführung in die vorhergehende Formel (22.4) entsteht

$$(22.6) \quad \sqrt{\left(\frac{\partial P_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_n}{\partial y}\right)^2} \leq T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) + \sqrt{p_{1n}^2 + p_{2n}^2},$$

und diese Ungleichung zeigt, daß für hinreichend große n die Steilheit des Polynoms $P_n(x, y)$ im ganzen Gebiete \mathfrak{B} die Schranke $T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ nur um ganz beliebig wenig übertreffen kann.

Bedenkt man schließlich, daß um jeden Punkt $P = (x, y)$ der abgeschlossenen Punktmenge \mathfrak{M} als Zentrum ein Quadrat $\hat{\Omega}(P)$ mit achsenparallelen Seiten und der kleinen (von dem Punkte P nicht mehr abhängenden) Länge \hat{i} so gewählt werden kann, daß es nur Punkte aus \mathfrak{M} enthält, so läßt sich für die Faltung

$$\xi_1(x, y) \cdot \frac{\partial P_n}{\partial x} + \xi_2(x, y) \cdot \frac{\partial P_n}{\partial y}$$

²²⁾ Vgl. H. Rademacher: Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformation der Doppelintegrale, Math. Annalen 79 (1919) S. 340–359.

auch schreiben

$$\begin{aligned}
 (22.7) \quad & \xi_1(x, y) \cdot \frac{\partial P_n}{\partial x} + \xi_2(x, y) \cdot \frac{\partial P_n}{\partial x} \\
 &= \frac{k_n}{4} \cdot \iint_{\hat{\Omega}(P)} [\dot{f}_u \cdot \xi_1(u, v) + \dot{f}_v \cdot \xi_2(u, v)] \cdot K_n(x - u, y - v) du \cdot dv \\
 &\quad + \{ - [\xi_1(x, y) \cdot p_{1n}(x, y) + \xi_2(x, y) \cdot p_{2n}(x, y)] \\
 &\quad + \frac{k_n}{4} \cdot \iint_{\Omega - \hat{\Omega}(P)} [\dot{f}_u \cdot \xi_1(x, y) + \dot{f}_v \cdot \xi_2(x, y)] \cdot K_n(x - u, y - v) du dv \\
 &\quad + \frac{k_n}{4} \cdot \iint_{\hat{\Omega}(P)} [\dot{f}_u \cdot (\xi_1(x, y) - \xi_1(u, v)) + \dot{f}_v \cdot (\xi_2(x, y) - \xi_2(u, v))] \cdot \\
 &\quad \cdot K_n(x - u, y - v) du dv \},
 \end{aligned}$$

wenn man hierin die Punkte (x, y) auf die Punktmenge \mathfrak{M} beschränkt. Nun konvergieren der erste und der zweite Term in der geschweiften Klammer rechts in (22.7) mit wachsendem $n \rightarrow \infty$ jeder für sich gleichmäßig gegen Null (Eigenschaft der Tonellischen Polynome), während der dritte absolut genommen kleiner ist als eine universelle Konstante multipliziert mit dem Maximum der Wurzel

$$\sqrt{(\xi_1(x, y) - \xi_1(u, v))^2 + (\xi_2(x, y) - \xi_2(u, v))^2}$$

innerhalb des Quadrates $\hat{\Omega}$; letzteres verschwindet aber mit gegen Null strebender Seitenlänge \hat{l} . Andererseits hat man für die längs des positiven Bogenelementes ds_C der Integralkurve C genommenen Richtungsableitung

$$\frac{d\dot{f}}{ds_C} = \frac{\dot{f}_u \cdot \xi_1(u, v) + \dot{f}_v \cdot \xi_2(u, v)}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \geq \Delta(u, v)$$

in fast allen Punkten (u, v) des Quadrates $\hat{\Omega}$ (Stolz'sche Differenzierbarkeit!), und das führt zu der Grenzungleichung

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{4} \cdot \iint_{\hat{\Omega}} [\dot{f}_u \cdot \xi_1(u, v) + \dot{f}_v \cdot \xi_2(u, v)] \cdot K_n(x - u, y - v) du dv \\
 \geq \Delta(x, y) \cdot \sqrt{\xi_1(x, y)^2 + \xi_2(x, y)^2}.
 \end{aligned}$$

Man kann daher zu jeder irgendwie vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ stets einen Index n_ε so finden, daß für alle $n \geq n_\varepsilon$ auf der Punktmenge \mathfrak{M}

$$\xi_1(x, y) \cdot \frac{\partial P_n}{\partial x} + \xi_2(x, y) \cdot \frac{\partial P_n}{\partial x} \geq (1 - \varepsilon) \cdot \Delta(x, y) \cdot \sqrt{\xi_1(x, y)^2 + \xi_2(x, y)^2}$$

ist, was soviel besagt wie, daß die Funktion

$$f(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{1 - \varepsilon}$$

zur Funktionenklasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ des Bereiches \mathfrak{B} gehört, und damit ist der Satz 10 schon bewiesen.

Ziehen wir nun aber (22. 6) heran, so läßt sich für ihre Steilheit T , sogar noch die Abschätzung

$$(22. 8) \quad T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \leq T_f \leq T(\hat{\mathfrak{B}}, \hat{\mathfrak{M}}) + \eta(\varepsilon)$$

angeben, in welcher $\eta(\varepsilon) > 0$ eine zugleich mit ε gegen Null strebende Größe bedeutet; diese Abschätzung wird uns im nächsten Paragraphen zum Ausgangspunkt dienen, wenn wir dort mittels des Funktional $\lambda(c)$ eine obere Schranke für die untere Grenze $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ der Steilheiten aufstellen wollen.

§ 23. Machen wir nämlich jetzt die Annahme²³⁾

$$(23. 1) \quad T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) > \underset{(x,y) \in \mathfrak{M}}{\text{Max}} \Delta(x, y),$$

so folgt aus (22. 8) für hinreichend kleine $\eta(\varepsilon)$ auch die Gültigkeit von

$$\bar{q}(\hat{\mathfrak{B}}, \hat{\mathfrak{M}}) > \underset{(\mathfrak{M})}{\text{Max}} \Delta(x, y),$$

und das bedeutet, wenn wir jetzt $\hat{\mathfrak{B}}$ eine sich auf \mathfrak{B} zusammenziehende Bereich-folge $\{\hat{\mathfrak{B}}_k\}$ durchwandern lassen, nach dem Satze 3 des § 4 die Existenz einer Schar rektifizierbarer Kurven $\hat{c}_k \in \mathfrak{C}(\hat{\mathfrak{B}}_k, \hat{\mathfrak{M}}_k)$ von gleichmäßig beschränkter Bogenlänge, auf deren jeder

$$q(\hat{c}_k) \geq \bar{q}(\hat{\mathfrak{B}}_k, \hat{\mathfrak{M}}_k) - \varepsilon_1$$

ist ($\varepsilon_1 > 0$ beliebig vorgeschrieben!) und die gleichmäßig gegen eine rektifizierbare Kurve c_0 aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ im Bereiche \mathfrak{B} konvergieren. Wegen des Hauptsatzes (§ 16) und der Formel (19. 3) können wir daher an Stelle von (22. 8) auch

$$T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \leq \varepsilon_1 + \eta(\varepsilon) + \lambda(\hat{c}_k)$$

schreiben; und wenn wir hierin jetzt $k = \infty$ setzen und die Oberhalbstetigkeit des Funktional $\lambda(c)$ berücksichtigen (Satz 9 in § 21), bekommen wir die Formel

$$(23. 2) \quad T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \leq \lambda(c_0) \leq \underset{c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})}{\text{Max}} \lambda(c),$$

in der wir, wegen seiner Willkür, den Term $(\varepsilon_1 + \eta(\varepsilon))$ gleich gestrichen haben. Ungleichung (23. 2) enthält den einen Teil der Aussage, die in Formel (E. 10) der Einleitung formuliert wurde.

²³⁾ Der Fall $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \underset{\mathfrak{M}}{\text{Max}} \Delta(x, y)$ ist ja ohne Interesse, da hier eine obere Grenze schon bekannt ist!

§ 24. Den anderen, der eine Beschränkung für $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ von unten her bedeutet, erhalten wir folgendermaßen: Wir gehen aus von den beiden algebraischen Identitäten

$$(24.1) \quad x' \cdot f_x + y' \cdot f_y \\ \equiv \frac{(\xi_1 \cdot f_x + \xi_2 \cdot f_y) \cdot (x' \cdot \xi_1 + y' \cdot \xi_2)}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + \frac{(\xi_2 \cdot f_x - \xi_1 \cdot f_y) \cdot (x' \cdot \xi_2 - y' \cdot \xi_1)}{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

und

$$(24.2) \quad (f_x^2 + f_y^2) \cdot (\xi_1^2 + \xi_2^2) \equiv (\xi_1 \cdot f_x + \xi_2 \cdot f_y)^2 + (\xi_2 \cdot f_x - \xi_1 \cdot f_y)^2$$

und setzen in sie für $f(x, y)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$, für (ξ_1, ξ_2) den Vektor des Kurvenfeldes (E, 2) und für (x', y') das Richtungselement einer beliebigen Integrationskurve c ein. α bedeute wieder (wie in § 19) den Winkel zwischen diesem Linienelement und der Richtung des Vektors (ξ_1, ξ_2) . Dann folgt aus der für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ auf \mathfrak{M} gültigen Ungleichung

$$(24.3) \quad f_x \cdot \xi_1 + f_y \cdot \xi_2 \geq \Delta \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

zunächst aus (24. 2)

$$(24.4) \quad |\xi_2 \cdot f_x - \xi_1 \cdot f_y| \leq \sqrt{f_x^2 + f_y^2 - \Delta^2} \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \text{ auf } \mathfrak{M},$$

und beides, d. h. (24. 3) und (24. 4), in (24. 1) eingesetzt ergibt dann

$$\frac{df}{ds} \geq \Delta \cdot \cos \alpha - |\sin \alpha| \cdot \sqrt{f_x^2 + f_y^2 - \Delta^2}$$

in allen denjenigen Punkten $P \in \mathfrak{M} \cdot c$, in denen $\cos \alpha \geq 0$ ist; sie wollen wir zu der Punktmenge $\mathfrak{M}c^+$ zusammenfassen. Verknüpfen wir nun dieses mit der Identität

$$0 = \oint_c \frac{df}{ds} ds = \int_{\mathfrak{M}c^+} \frac{df}{ds} ds + \int_{c - \mathfrak{M}c^+} \frac{df}{ds} ds$$

und berücksichtigen die allgemein geltenden Relationen

$$\frac{df}{ds} \geq -T, \quad \text{und} \quad T \geq \sqrt{f_x^2 + f_y^2},$$

so resultiert die Ungleichung

$$0 \geq -T \cdot \int_{c - \mathfrak{M}c^+} ds + \int_{\mathfrak{M}c^+} [\Delta \cdot \cos \alpha - |\sin \alpha| \cdot \sqrt{T^2 - \Delta^2}] ds,$$

die in Verbindung mit dem Umstand, für jedes $f(x, y) \in \mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ richtig zu sein, sofort zu

$$T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \cdot \int_{c - \mathfrak{M}c^+} ds + \int_{\mathfrak{M}c^+} [|\sin \alpha| \cdot \sqrt{T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds \geq 0$$

führt. Dieser Ausdruck lehrt aber, daß $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ nie kleiner ist als die positive Wurzel der Gleichung

$$\omega(c) \cdot \int_{c - \mathfrak{M} c^+} ds + \int_{c \mathfrak{M}^+} [|\sin \alpha| \cdot \sqrt{\omega(c)^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \cos \alpha] ds = 0,$$

sofern eine solche existiert²⁴⁾. Da hierin aber $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ ganz willkürlich war, können wir

$$T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \geq \text{obere Grenze } \omega(c) \\ c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

behaupten und dieses Resultat mit dem Ergebnis der Formel (23. 2) zu dem Satze zusammenfassen:

Satz 11. Entweder ist die untere Grenze $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ der Steilheiten T , für Funktionen $f(x, y)$ aus der Klasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ gleich dem Maximum von $\Delta(x, y)$ auf der Punktmenge \mathfrak{M} , oder aber es gilt die Ungleichung

$$(24. 5) \quad \text{obere Grenze } \omega(c) \leq T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \leq \text{Max}_{c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})} \lambda(c).$$

Falls hier die beiden äußersten Glieder der Ungleichung (24. 5) miteinander zusammenfallen, läßt sich auch für die Klasse $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ die untere Steilheitsgrenze $T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ allein durch die Betrachtung der Dichtigkeitsverteilungen der Punkte aus \mathfrak{M} auf den Kurven $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ berechnen. Doch hängen die Kriterien hierfür aller Wahrscheinlichkeit nach noch davon ab, in welcher Weise die Werte der Funktion $\Delta(x, y)$ über die Punktmenge \mathfrak{M} verteilt sind, und darüber dürften sich im allgemeinen nur schwer Einsichten gewinnen lassen.

§ 25. Immerhin sind auch schon die Abschätzungen (24. 5) ausreichend genug, um einzusehen, daß die Hinzunahme der Forderung nach der Existenz stetiger erster Ableitungen f_x, f_y zu den Bedingungen, die sonst den Funktionen $f(x, y)$ der Klasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ noch auferlegt werden, eine wirkliche Verschärfung darstellt, was sich auch darin ausdrückt, daß der Fall

$$T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) < T_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

mit Ausschluß des Gleichheitszeichens wirklich vorkommen kann. Man braucht dazu nur ein Beispiel anzugeben, bei welchem die Ungleichung

$$(25. 1) \quad \text{obere Grenze } \omega(c) > \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) \\ c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

²⁴⁾ Für ihre Existenz gilt ein dem Satz 7 aus § 19 ganz analoger Satz, der deshalb hier unterdrückt werden darf.

mit strengem Ausschluß des Gleichheitszeichen erfüllt wird. Ein solches liegt aber schon in dem von uns in § 18 betrachteten Beispiele vor. Nach der dortigen Formel (18. 13)²⁵⁾ war für dasselbe

$$\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \frac{\Delta(R)}{\tilde{\omega}};$$

gehen wir nun an die Berechnung von $\omega(c)$ auf dem Kreis $c = \mathfrak{R}(R)$ vom Radius

$$R = P \cdot c^{1 + \frac{2\pi\tilde{\omega}}{\omega^2}} \cdot z,$$

so erhalten wir:

1. da die ganze Kreislinie $\mathfrak{R}(R)$ eine Punktmenge $\mathfrak{M}c^+$ ist,

$$\int_{\mathfrak{R}(R)} |\sin \alpha| \cdot \sqrt{\omega^2 - \Delta^2} ds = \int_{\mathfrak{R}(R)} \Delta \cdot \cos \alpha \cdot ds$$

und 2. für den Winkel α die Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha = \tilde{\omega}.$$

Damit bestimmt sich aber $\omega(\mathfrak{R}(R))$ leicht zu

$$\omega(\mathfrak{R}(R)) = \frac{\Delta(R)}{\tilde{\omega}} \cdot \sqrt{1 + \tilde{\omega}^2} > \frac{\Delta(R)}{\tilde{\omega}} = \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}),$$

was also erst recht (25. 1) nach sich zieht und damit den Beweis unserer obigen Behauptung darstellt.

²⁵⁾ Alle Bezeichnungen und ihre Bedeutungen sind aus dem § 18 zu entnehmen.

Berichtigung zu der vorstehenden Arbeit:
Wilhelm Damköhler, Funktionen geringster Steilheit.

Nach Drucklegung meiner Arbeit bemerkte ich folgende Unstimmigkeit:
 Der Seite 133 (§ 15, letzter Absatz) vollzogene Schluß auf die Gültigkeit der Ungleichung

$$T, \geq q(c)$$

für flächenhaft verteilte Punktmengen \mathfrak{M} ist insofern nicht stichhaltig, als es bei der Weite der Kurvenklasse $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ sehr wohl geschehen kann, daß auf einer Kurve c die Teilmenge c' ein positives Lebesguesches Maß besitzt und daß dennoch in keinem ihrer Punkte von der Funktion $f(x, y) \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ die Ungleichung

$$(1) \quad \frac{df}{ds_c} \geq \Delta(x, y)$$

erfüllt wird; denn sobald der Durchschnitt der Menge c' mit einer Integralkurve C des Gleichungssystems

$$(2) \quad \dot{x} = \xi_1(x, y), \quad \dot{y} = \xi_2(x, y)$$

auf C nur eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null ausschneidet, braucht ja dort (1) nicht zu bestehen. Nun lassen sich aber Beispiele konstruieren, bei welchen eine rektifizierbare Kurve c eine „Parallelfaserung“ sozusagen monoton durchsetzt, d. h. jede einzelne Faser nur in einem einzigen Punkte schneidet, und bei welcher dennoch die Menge der Punkte c' , in denen c die Fasern gleichsinnig berührt, auf c gemessen ein positives Lebesguesches Maß besitzt.

Um daher die Schlüsse des § 15 und damit die Aussage des Hauptsatzes in § 16 aufrecht erhalten zu können, müssen wir die Kurvenklasse $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ verengen zu der Klasse $\mathfrak{C}^*(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ und haben mithin zu definieren: $\mathfrak{C}^*(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ umfaßt die Gesamtheit aller geschlossenen rektifizierbaren und orientierten Kurven c des Bereiches \mathfrak{B} , bei welchen der Durchschnitt c' derjenigen ihrer Punkte mit der abgeschlossenen Punktmenge \mathfrak{M} , in denen die orientierten Linienelemente ds_c von c die Vektoren (ξ_1, ξ_2) gleichsinnig berühren, folgenden Aufbau gestattet: c' ist die Vereinigung einer Menge n vom auf c gemessenen linearen Maße Null und einer Summe höchstens abzählbar unendlich vieler Mengen c'_i , deren jede ganz einer einzelnen Feldkurve C_i des Gleichungssystems (2) angehört und auf ihr ein positives oder verschwindendes Lebesguesches Maß haben darf:

$$c' = n + \sum_i c'_i.$$

Man überzeugt sich dann leicht, daß für das auf dieser engeren Kurvenklasse $\mathfrak{C}^*(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ definierte Funktional $q(c)$ alle früher bewiesenen Sätze ebenfalls gelten und daß für den Fall, daß \mathfrak{M} auf endlich oder abzählbar unendlich vielen getrennt liegenden Integralkurvenbögen C von (2) verteilt ist, $\mathfrak{C}^*(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ mit der alten Kurvenklasse $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ zusammenfällt. Der Hauptsatz des § 16 aber nimmt jetzt folgenden Wortlaut an:

Hauptsatz. *Ist die abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} im Innern des einfach zusammenhängenden Bereiches \mathfrak{B} irgendwie verteilt und liegt auf ihr keine geschlossene Integralkurve des Systems*

$$\dot{x} = \xi_1(x, y), \quad \dot{y} = \xi_2(x, y),$$

so enthält die Funktionenklasse $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ stets mindestens eine Funktion $\Phi(P)$ kleinstmöglicher Steilheit

$$T_\Phi = T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

und diese minimale Steilheit läßt sich aus der Betrachtung der Dichtigkeitsverteilungen derjenigen Punkte $c' \subset c$, in denen die Kurven $c \subset \mathfrak{C}^(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ auf \mathfrak{M} die Vektoren (ξ_1, ξ_2) gleichsinnig berühren, nach der Formel*

$$T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \text{obere Grenze } q(c) \\ c \subset \mathfrak{C}^*(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$$

berechnen.

N. B. Für die Betrachtungen des Teiles B (Funkt. Kl. $\mathfrak{F}_{st}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$) bleibt es selbstverständlich bei der alten Kurvenklasse $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$, die alle geschlossenen rektifizierbaren und orientierbaren Kurven c aus \mathfrak{B} umfaßt, welche überhaupt \mathfrak{M} schneiden.

(Eingegangen am 17. 7. 1938.)

Nachruf auf Otto Hölder.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Am 29. August 1937 starb im Alter von 77 Jahren der Leipziger Mathematiker Otto Hölder, der nicht nur von 1908 bis 1928 dem Herausgeberstab der Mathematischen Annalen angehörte, sondern der vor allem unserer Zeitschrift eine Reihe von Abhandlungen von grundlegender Bedeutung geschenkt hat. Die Redaktion verliert in ihm einen treuen, immer interessierten Mitarbeiter.

Ein wahrhaft großer Wissenschaftler ist von uns gegangen, einer von den Männern, die an der Jahrhundertwende der modernen Mathematik ihre Richtung gewiesen haben: die Richtung vom Formalen zum Kritischen, von der Rechnung zum Begriff. Auf streng logische Sauberkeit in Denken und Ausdruck ist sein Streben immer gerichtet gewesen, und die Lektüre seiner kristallklaren Arbeiten ist immer wieder ein hoher geistiger Genuß.

Wie alle Klassiker unserer Wissenschaft war er von jeder Einseitigkeit frei. Für die Algebra und für große Teile der Analysis war sein Werk bahnbrechend, aber auch Geometrie, Logik und Zahlentheorie verdanken ihm wertvolle Erkenntnisse.

Otto Hölder wurde am 22. Dezember 1859 in Stuttgart geboren als Sohn des Professors Otto Hölder, der am dortigen Polytechnikum Französisch lehrte. Er studierte zunächst in Stuttgart, dann in Berlin bei Weierstraß, der einen nachhaltigen Eindruck auf sein ganzes Denken hinterlassen hat, endlich in Tübingen bei P. du Bois-Reymond. Nach seiner Promotion in Tübingen 1882 ging er zuerst nach Leipzig zu Felix Klein, aber dessen Einstellung und Denkweise unterschieden sich doch zu sehr von den Hölderschen, als daß es damals zu einer fruchtbaren Zusammenarbeit kommen konnte; erst später, in Göttingen, hat das gemeinsame Interesse an der Gruppentheorie die beiden Männer zusammengeführt. Hölder verließ daher Leipzig und habilitierte sich 1884 in Göttingen, wurde dort 1889 zum außerordentlichen Professor ernannt, erhielt im gleichen Jahr ein Extraordinariat in Tübingen, wurde 1896 als Nachfolger von Minkowski nach Königsberg berufen und erhielt 1899 den Lieschen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Leipzig.

Kurz vor der Übersiedlung nach Leipzig heiratete er Helene Lautenschläger aus Stuttgart. Seitdem lebte er im Kreise seiner Familie ein stilles, zurückgezogenes Gelehrtenleben. 1899 wurde er zum Mitglied der sächsischen Akademie der Wissenschaften gewählt. Bis in seine letzten Lebensjahre hinein ist er unermüdlich im Interesse der Wissenschaft tätig gewesen.

Die ihn näher kannten, schätzten sein hohes geistiges Niveau, seinen aufrechten, makellosen Charakter und seine menschliche Liebenswürdigkeit.

Der begriffliche, nicht formelmäßige Charakter seines Denkens zeigt sich schon in der Fragestellung seiner Dissertation [1]: Welche Bedingungen müssen zur Stetigkeit einer Massenbelegung hinzukommen, damit für das Potential dieser Belegung die Laplacesche Gleichung

$$\Delta V = -4\pi\kappa$$

gilt? Uns mag eine solche Fragestellung natürlich vorkommen; in einer Zeit aber, die eben erst von der Existenz nicht differenzierbarer Funktionen gehört hatte, war sie ganz neuartig. Ebenso originell ist die Antwort: die berühmte „Höldersche Bedingung“

$$|\kappa(x, y, z) - \kappa(a, b, c)| < Ar^\mu \quad (\mu > 0).$$

In derselben sorgfältigen Weise wird, nach einer Erörterung der Begriffe der Fläche und des Flächeninhaltes, das Potential einer stetigen Flächenbelegung untersucht, die Existenz der inneren und äußeren normalen Ableitung des Potentials in einem Punkt der Fläche bewiesen und der Sprung in der normalen Ableitung berechnet. Neu sind Hölders Ergebnisse über das Verhalten des Potentials am Rande des mit Masse belegten Flächenstücks.

Die von Hölder geschaffene Methode der potentialtheoretischen Untersuchung wurde von Lichtenstein, Petrini und anderen weiter ausgebaut (vgl. den Enzyklopädiebericht von L. Lichtenstein). Auch Hölder selbst hat später noch schöne Beiträge zur Potentialtheorie geliefert [30, 40, 44].

Hölder wendet sich jetzt unter Weierstraß' Einfluß der Funktionentheorie zu. Der bekannte Satz, daß eine analytische Funktion in der Nähe einer isolierten wesentlich singulären Stelle jedem Wert beliebig nahe kommt, stammt von ihm [2]. Weierstraß hatte nur den Fall einer in der ganzen Ebene meromorphen Funktion auf schwierigem Wege mit Hilfe der Produktdarstellung erledigt; Hölder aber gab einen direkten, allgemein gültigen Beweis.

Die Abhandlung [3] ist für die Theorie der divergenten Reihen grundlegend geworden. In ihr wird nämlich die als Höldersche Summation bekanntgewordene Summationsmethode eingeführt, und es wird gezeigt, daß der Abelsche Grenzwertsatz für alle Hölder-summierbaren Reihen gilt. In der Habilitationsschrift [5] untersucht Hölder im Anschluß an du Bois-Reymond die Frage, unter welchen Bedingungen die Koeffizienten einer Fourierschen Reihe, die eine nicht notwendige stetige Funktion darstellt, in der bekannten Weise als Integrale dargestellt werden können. Um diese Frage auch für nicht beschränkte Funktionen beantworten zu können, muß zunächst das (uneigent-

liche) Integral einer solchen Funktion definiert werden, was Hölder in der ihm eigenen sauberen Weise durchführt. Daran anschließend, stellt er [6] eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer stetigen Funktion durch eine Fouriersche Reihe auf, die so heißt: Teilt man das Intervall in Teilintervalle und approximiert die Funktion $f(x)$ in jedem Teilintervall durch eine lineare Funktion $g(x)$, so soll die Summe der Quotienten der Integrale $\int |f(x) - g(x)| dx$ durch die jeweiligen Intervalllängen bei Verfeinerung der Teilung gegen Null streben.

Lange Zeit hat Hölder sich vergeblich bemüht, eine algebraische Differentialgleichung für die Gammafunktion zu finden, bis ihm allmählich die Ausichtslosigkeit des Unternehmens dämmerte. Der Sucher nach restloser Klarheit war aber nicht zufrieden, bevor er nicht den strengen Beweis erbracht hatte, daß eine solche Differentialgleichung unmöglich ist [9]. Ebenso konstruierte er eine Funktion, die keiner algebraischen Funktionalgleichung genügt. An diese beiden Ergebnisse, sowie an Untersuchungen von Liouville hat sich eine Reihe von Untersuchungen anderer Forscher angeschlossen, über die Bieberbach auf dem Kongreß in Zürich 1932 zusammenfassend berichtet hat.

Am Ende der Göttinger Periode beginnt Hölder seine klassisch gewordenen gruppentheoretischen Untersuchungen. Ausgehend von einem Problem der Galoisschen Theorie, nämlich von der Zurückführung einer algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen mit einfachen Gruppen ohne Einführung akzessorischer Irrationalitäten, kommt er auf die Frage nach der eindeutigen Bestimmtheit dieser einfachen Gruppen. Jordan hatte schon bewiesen, daß in einer Kompositionsreihe einer endlichen Gruppe die Indices (also die Quotienten aufeinanderfolgender Ordnungen) bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt sind. Hölder bildet nun [11] den für die seitherige Gruppentheorie grundlegenden Begriff der Faktorgruppe und beweist die Eindeutigkeit der Kompositionsfaktoren bis auf Isomorphie. Heutzutage kann man sich eine Gruppentheorie ohne Faktorgruppen und eine Galoissche Theorie ohne Jordan-Hölderschen Satz kaum mehr vorstellen, so sehr haben die von Hölder geschaffenen Begriffsbildungen die Algebra durchdrungen. — Auch die Unmöglichkeit der Auflösung einer Gleichung 3. Grades durch reelle Radikale im Casus irreducibilis hat Hölder zuerst bewiesen [15].

In den nun folgenden Arbeiten untersucht Hölder ganz systematisch die Struktur der endlichen Gruppen gegebener Ordnung. Da die einfachen Gruppen die Bausteine aller bilden, betrachtet er diese zuerst [16]. Von den zusammengesetzten Gruppen bieten die der Ordnungen p^2 und pq keine Schwierigkeit; also betrachtet er [17] die Gruppen der Ordnungen p^3 , pq^2 , pqr und p^4 . Um aber weiter zu kommen, muß man zuerst wissen, wie man

aus einer vorgegebenen Faktorgruppe und einem vorgegebenen Normalteiler eine zusammengesetzte Gruppe bildet. Diese Frage wird in der großen Abhandlung [18] eingehend behandelt. Um die Ergebnisse dieser Untersuchung in einem konkreten Fall anwenden zu können, muß man die Automorphismen des vorgegebenen Normalteilers kennen. Demgemäß werden in derselben Abhandlung die Automorphismengruppen einer Reihe von wichtigen Gruppen durchdiskutiert. Dabei ergibt sich unter anderem der Satz, daß die symmetrische Gruppe für $n \neq 6$ vollkommen ist, d. h. kein Zentrum besitzt und ihre eigene Automorphismengruppe darstellt. Die Ergebnisse dieser Untersuchung gestatten die Aufstellung aller nicht auflösbaren Gruppen der Ordnungen < 200 .

Auch die Struktur der Gruppen von quadratfreier Ordnung hat Hölder vollständig bestimmt, indem er beweist [19], daß jede solche einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe besitzt.

Durch die feinsinnige Untersuchung [20] über die Prinzipien der Mechanik wurde eine verzwickte Frage, über die Jourdain und Réthy (Math. Annalen 48, S. 513) nicht zu einer Einigung kommen konnten, glücklich geklärt. Es folgt nun eine Reihe von Abhandlungen über die Grundlagen der Geometrie, die von der mehr ins Philosophische gehenden Leipziger Antrittsrede [24] ihren Ausgang nimmt. Diese schönen Arbeiten haben leider nicht die Beachtung gefunden, die sie verdienen. In [25] wird untersucht, unter welchen Bedingungen ein System von vergleichbaren und addierbaren Größen durch Zahlen gemessen werden kann, wobei insbesondere der Fall der Strecken auf Grund der Kongruenzaxiome und des archimedischen Postulats ausführlich behandelt wird. In [26] wird die Einführung der Zahlenskala auf der projektiven Geraden, ohne Bezugnahme auf den umgebenden Raum, auf Grund von Axiomen über die harmonische Lage und Stetigkeitsaxiomen durchgeführt. Das wichtigste Hilfsmittel dabei ist die unbeschränkt fortgesetzte harmonische Zweiteilung einer Strecke. In [28] schließlich wird ohne Stetigkeit und ohne archimedisches Postulat die Koordinatenrechnung in einer affinen oder projektiven Desarguesschen Geometrie neu begründet.

In der kleinen Abhandlung [29] kehrt Hölder zur Theorie der Fourierschen Reihen zurück. In eleganter Weise werden notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt, die die Koeffizienten einer Fourierschen Reihe erfüllen müssen, damit die Reihe eine reelle analytische Funktion darstellt.

In der elementar algebraischen Note [33] wird der Wert einer Determinante berechnet, in der oberhalb der Hauptdiagonale überall dieselbe Zahl a und unterhalb dieser Diagonale überall dieselbe Zahl b steht. In [35] wird ein einfacher, von Hurwitz stammender Beweis derselben Formel gegeben.

In der Zeit von 1914 bis 1923 hat Hölder sich hauptsächlich mit logisch-philosophischen Untersuchungen über die Grundlegung der Mathematik befaßt. Die Frage, in welcher Weise die mathematische Begriffsbildung vor sich geht und wie sie möglich ist, hat ihn gepackt und nicht mehr losgelassen. In seiner Programmabhandlung [34] begründet er die Auffassung, daß die Arithmetik keiner Axiome bedarf, sondern nur durch den folgerichtigen Aufbau ihrer Begriffe begründet wird. Die Untersuchung mußte aber, wie er erkannte, von einer noch breiteren Basis aus geführt werden. In dem großen Werk über die mathematische Methode [38] werden systematisch Logik, Arithmetik, Geometrie, Mechanik und ein Teil der Physik durchforscht und ihre eigentümlichen Schlußweisen und Voraussetzungen aufgedeckt. Ich will hier nur einige von den wichtigsten Grundgedanken dieses Werkes hervorheben.

Nach Hölder besteht einer der wesentlichen Züge der mathematischen Methode darin, daß über Begriffe immer neue Begriffe höherer Ordnung „überbaut“ werden, in dem Sinn, daß die Begriffe und Schlußweisen einer Stufe auf der nächsthöheren Stufe selbst als Objekte der mathematischen Betrachtung genommen werden, indem man z. B. zuerst ein Beweisverfahren entwickelt und nachher die Schritte des Beweisverfahrens abzählt oder sie anderen Objekten zuordnet oder durch Relationen miteinander verknüpft. Aus dieser Auffassung schließt Hölder (und neuere logistische Untersuchungen von Gödel geben ihm völlig recht), daß man niemals die gesamte Mathematik durch einen logischen Formalismus erfassen kann, weil nämlich die logischen Betrachtungen, die man über die Formeln des Formalismus selber anstellt, mit Notwendigkeit über den Formalismus hinausführen und dennoch auch zur Mathematik gehören.

Auf Grund von logischen Überlegungen über die Definition von Teilmengen wird der Begriff der Potenzmenge, das ist der Menge aller Teilmengen einer vorgegebenen Menge, abgelehnt. Damit bricht auch die auf den Dedekindschen Schnitt begründete Theorie des Kontinuums zusammen. Hölder sieht sich daher genötigt, die Existenz des Kontinuums durch besondere Axiome zu postulieren. Dieser Punkt ist vielfach angegriffen worden.

Die Grundbegriffe und Axiome der Geometrie, ebenso wie die der Mechanik und Physik, werden nach Hölders Auffassung, die sich an die Helmholtzsche anschließt, aus der Erfahrung abstrahiert. Ausführlich setzt Hölder sich mit den entgegengesetzten philosophischen Auffassungen auseinander. Seine Ablehnung des Weylschen Intuitionismus hat er in einer späteren Note [43] begründet.

Von seinen späteren Untersuchungen über spezielle analytische Funktionen seien noch zwei hervorgehoben, [45] und [48], in denen er, an Unter-

suchungen von Abel anschließend, einen Grenzübergang rechtfertigt und eine Funktionalgleichung für die durch

$$\Psi(x) = - \int \frac{\ln(1-x)}{x} dx$$

definierte Funktion nachweist.

Hölder hat die Zahlentheorie immer geliebt; in seinen letzten Lebensjahren konnte er sich dieser Liebe ungestört widmen. In den Noten [53, 57, 60, 61, 63] werden gewisse Reziprozitätsformeln für summatorische Funktionen, zunächst in Spezialfällen, dann immer allgemeiner, aufgestellt. Die meisten von ihnen haben die Gestalt

$$\sum_{\alpha < a \leq \alpha'} \varphi(\alpha) \Psi(f(\alpha)) - \sum_{\beta' < b \leq \beta} \psi(b) \Phi(g(b)) \\ = \Phi(\alpha') \Psi(\beta') - \Phi(\alpha) \Psi(\beta) \quad [\beta = f(\alpha); \beta' = f(\alpha')],$$

wobei Φ und Ψ die summatorischen Funktionen von φ und ψ sind und g die Umkehrfunktion der monotonen Funktion f ist.

Die Noten [54] und [58] leiten aus bekannten asymptotischen Formeln für elementare zahlentheoretische Funktionen andere ebensolche ab.

In [59] wird ein allgemeines Prinzip zur Herleitung von Umkehrformeln für zahlentheoretische Funktionen:

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a_n F\left(\frac{x}{n}\right) \rightleftharpoons F(x) = \sum_{n \leq x} b_n G\left(\frac{x}{n}\right)$$

angegeben.

Besonders möge noch auf die Note [65] hingewiesen werden, in der ein einfacher Ausdruck für die „Summe von Ramanujan“, d. h. für die Summe der n -ten Potenzen der primitiven m -ten Einheitswurzeln angegeben wird:

$$\sum \zeta^n = \frac{\varphi(m)}{\varphi(m')} \mu(m') \quad \left[d = (m, n); m' = \frac{m}{d} \right].$$

Es war unmöglich, alle Einzelergebnisse aus dem reichhaltigen Werk Hölders hervorzuheben. Es sollte genügen, die großen Linien der begrifflichen Entwicklung aufzudecken, die sein ganzes Lebenswerk durchziehen. Er ist immer den grundlegenden Begriffen nachgegangen, die das Gebäude der Mathematik tragen; er hat diese Begriffe bis in ihre letzten Konsequenzen durchdacht und bis in ihre tiefsten Gründe zu klären versucht. Sein Gedanken-
gut ist zum unverlierbaren Besitz der Wissenschaft geworden.

Verzeichnis der Publikationen von Otto Hölder.

1882. [1] Beiträge zur Potentialtheorie, Dissertation, Tübingen 1882.
[2] Beweis des Satzes, daß eine eindeutige analytische Funktion in unendlicher Nähe einer wesentlich singulären Stelle jedem Wert beliebig nahe kommt, Math. Annalen **20**, S. 138–142.
[3] Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze, Math. Annalen **20**, S. 535–549.

1884. [4] Zum Invariantenbegriff, Math.-naturwiss. Mitteilungen 1, S. 59—65.
 [5] Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen 24, S. 181—216.
1885. [6] Über eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Funktion durch die Fouriersche Reihe, Ber. preuß. Akad. Berlin 1885, S. 419—434.
1886. [7] Bemerkung zu der Mitteilung des Herrn Weierstraß: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1886, S. 241—244.
 [8] Über eine transzendente Funktion, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1886, S. 514—522.
 [9] Über die Eigenschaft der Gammafunktion, keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen, Math. Annalen 28, S. 1—13.
1887. [10] Über eine Funktion, welche keiner algebraischen Funktionalgleichung genügt, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1887, S. 662—676.
1889. [11] Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen, Math. Annalen 34, S. 26—56.
 [12] Bemerkungen zur Quaternionentheorie, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1889, S. 34—38.
 [13] Über einen Mittelwertsatz, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1889, S. 38—47.
 [14] Über den Söderbergschen Beweis des Galoisschen Fundamentalsatzes, Math. Annalen 34, S. 454—462.
1891. [15] Über den Casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades, Math. Annalen 38, S. 307—312.
1892. [16] Die einfachen Gruppen im ersten und zweiten Hundert der Ordnungszahlen, Math. Annalen 40, S. 55—88.
1893. [17] Die Gruppen der Ordnungen p^2 , pq^2 , pqr , p^4 , Math. Annalen 43, S. 301—412.
1895. [18] Bildung zusammengesetzter Gruppen, Math. Annalen 46, S. 321—422.
 [19] Die Gruppen mit quadratfreier Ordnungszahl, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1895, S. 211—229.
1896. [20] Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1896, S. 122—157.
 [21] Weierstraß, Mathematische Werke, zweiter Band, Göttinger gelehrte Anzeigen 1896, S. 769—773.
1897. [22] Herleitung der elliptischen Funktionen, Schriften phys.-ökon. Ges. Königsberg 38, S. 53—57.
1899. [23] Galoissche Theorie mit Anwendungen, Enzykl. d. math. Wiss. 1, S. 480 bis 520.
1900. [24] Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung gehalten am 22. Juli 1899. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. 75 Seiten. Leipzig, B.-G. Teubner.
1901. [25] Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß, Ber. sächs. Akad. Leipzig 53, S. 1—64.

1908. [26] Die Zahlenskala auf der projektiven Geraden und die independente Geometrie dieser Geraden, *Math. Annalen* 65, S. 161—260.
- [27] Adolf Mayer, Nekrolog, gesprochen in der öffentlichen Gesamtsitzung beider Klassen der K. Sächs. Ges. d. Wiss. am 14. Nov. 1908, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 60, S. 353—373.
1911. [28] Streckenrechnung und projektive Geometrie, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 63, S. 65—183.
- [29] Bedingungen des analytischen Charakters für reelle Funktionen reellen Arguments, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 63, S. 388—401.
- [30] Die Cauchysche Randwertaufgabe für den Kreis in der Potentialtheorie, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 63, S. 477—500.
1913. [31] Über einige Determinanten, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 65, S. 110—120.
- [32] Neues Verfahren zur Herleitung der Differentialgleichung für das relative Extremum eines Integrals, *Annali di Mat. (3)* 20, S. 171—184.
1914. [33] Über einige Determinanten. Zweite Mitteilung, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 66, S. 98—102.
- [34] Die Arithmetik in strenger Begründung, *Programmabh. Phil. Fakultät Leipzig* 1914, IV + 74 Seiten.
- [35] Abschätzungen in der Theorie der Differentialgleichungen, *Schwarz-Festschrift* S. 116—132.
1921. [36] Karl Rohn, Nekrolog, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 72, S. 109—127.
1922. [37] Karl Neumann zum 90. Geburtstag, *Math. Annalen* 86, S. 161—162.
1924. [38] Die mathematische Methode. Logisch-erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik. Berlin, X + 563 Seiten.
- [39] Das Volumen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und seine Invarianteneigenschaft, *Math. Zeitschr.* 20, S. 7—20.
1925. [40] Über gewisse Hilfssätze der Potentialtheorie und das alternierende Verfahren von Schwarz, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 77, S. 61—73.
- [41] C. Neumann, Nachruf, gesprochen am 14. November 1925 in der öffentlichen Sitzung beider Klassen, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 77, S. 154—172.
1926. [42] Carl Neumann, *Math. Annalen* 96, S. 1—25.
- [43] Der angebliche circulus vitiosus und die sogenannte Grundlagenkrise in der Analysis, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 78, S. 243—250.
- [44] Bemerkungen zu meinem Aufsatz: Über gewisse Hilfssätze der Potentialtheorie, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 78, S. 240—242.
1927. [45] Über einen Grenzübergang in Abels Recherches sur les Fonctions Elliptiques, *J. f. reine u. angew. Math.* 157, S. 171—188.
1928. [46] Über einige trigonometrische Reihen, *S.-B. bayer. Akad. Wiss. München* 1928, S. 83—96.
- [47] Bemerkungen über die Herleitung einiger elementarer Formeln, *Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 80, S. 117—121.

- [48] Über eine von Abel untersuchte Transzendente und eine merkwürdige Funktionalbeziehung, Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig 80, S. 312—325.
- [49] Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung für komplexe Größen, Math. Annalen 100, S. 438—444.
- 1929. [50] Der indirekte Beweis in der Mathematik, Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig 81, S. 201—216.
- 1930. [51] Ein Versuch im Gebiet der höheren Mächtigkeiten, Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig 82, S. 83—96.
- [52] Nachtrag zu meinem Aufsatz über den indirekten Beweis, Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig 82, S. 97—104.
- [53] Einige Sätze über die größten Ganzen, Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig 82, S. 159—170.
- 1931. [54] Über gewisse Teilsummen von $\sum \varphi(n)$, Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig 83, S. 175—178.
- [55] Axiome, empirische Gesetze und mathematische Konstruktionen, Scientia 49, S. 317—326.
- 1932. [56] Zur Theorie der zahlentheoretischen Funktion $\mu(n)$, Ber. sächs. Ges. Wiss. 83, S. 321—328.
- [57] Über eine Art von Reziprozität bei summatorischen Funktionen, Ber. sächs. Ges. Wiss. 83, S. 329—332.
- [58] Über einen asymptotischen Ausdruck, Acta math. 59, S. 79—89.
- 1933. [59] Über gewisse der Möbiusschen Funktion $\mu(n)$ verwandte zahlentheoretische Funktionen, die Dirichletsche Multiplikation und eine Verallgemeinerung der Umkehrformeln, Ber. sächs. Ges. Wiss. 85, S. 3—28.
- [60] Zusätzliche Gleichungen zur Hermiteschen Formel, Math. Annalen 108, S. 605—614.
- 1934. [61] Verallgemeinerung einer Dirichletschen Summenumformung, Math. Zeitschr. 38, S. 476—482.
- 1935. [62] Zur Theorie der Gaußschen Summen, Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig 87, S. 27—36.
- [63] Verallgemeinerung einer Formel von Hacks, Math. Zeitschr. 40, S. 463—468.
- [64] Bemerkungen zu einer Dirichletschen Frage, Ber. sächs. Ges. Wiss. 87, S. 81—84.
- 1936. [65] Zur Theorie der Kreisteilungsgleichung $K_m(x) = 0$, Prace mat.-fiz. 43, S. 13—23.
- [66] Über eine Verallgemeinerung der binomischen Formel, Ber. sächs. Ges. Wiss. 88, S. 61—66.
- [67] Elementare Herleitung einer dem binomischen Satz verwandten Formel, Ber. sächs. Ges. Wiss. 88, S. 133—134.
- 1937. [68] Über eine Darstellung der Eulerschen Konstanten, Ber. sächs. Ges. Wiss. 89, S. 167—170.

(Eingegangen am 5. 7. 1938.)

Die Darstellung biquadratischer Formen als Summen von Quadraten mit Anwendung auf die Variationsrechnung.

Von

F. J. Terpstra in Hilversum (Niederlande).

Erstes Kapitel.

1. Einleitung. Aus der Variationsrechnung der einfachen Integrale ist folgendes bekannt¹⁾. Es sei

$$f(t, x_i, \dot{x}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

die Grundfunktion des Problems. Mit Hilfe der partiellen Ableitungen

$$f_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}$$

bilden wir die quadratische Form

$$(1.1) \quad f_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Jedem Linienelement im Raum der t, x_i wird nach (1.1) eine Form zugeordnet; ein Linienelement heißt regulär, singular oder irregulär, je nachdem die zugehörige Form definit, semidefinit oder indefinit ist. Es gelten:

Satz 1. *Ein Linienelement einer Minimale ist positiv regulär oder positiv singular.*

Satz 2. *Wenn eine Extremale (d. h. eine Lösung der Eulerschen Gleichungen) im Punkt A ein positiv reguläres Linienelement besitzt, so ist diese Extremale in der Umgebung von A Minimal.*

Es sei jetzt wie in VmI.²⁾ $f(t_a, x_i, p_{ia})$ die Grundfunktion eines mehrfachen Variationsproblems. Hierin steht p_{ia} für $\frac{\partial x_i}{\partial t_a}$; lateinische Indizes laufen von 1 bis n , griechische von 1 bis μ .

Wir betrachten dann mit der Abkürzung

$$f_{ia,j\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{ia} \partial x_{j\beta}}$$

¹⁾ Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Teubner, 1935. Zwölftes Kapitel.

²⁾ Mit VmI. bezeichnen wir einen Aufsatz von Boerner über die Variationsrechnung der mehrfachen Integrale in den Math. Annalen 112, S. 187, in dem der Leser auch eine Angabe der grundlegenden Arbeiten von Carathéodory findet.

die zu (1. 1) analoge doppeltquadratische Form:

$$(1. 2) \quad f_{i\alpha, j\beta} \xi_i \xi_j \eta_\alpha \eta_\beta.$$

Jedem Flächenelement (d. h. jedem Wertsystem der t_α , x_i , $p_{i\alpha}$) wird eine Form (1. 2) zugeordnet; ein Flächenelement heißt regulär, singular oder irregulär, je nachdem die zugehörige Form definit, semidefinit oder indefinit ist.

Statt positiv regulär und positiv singular schreiben wir weiterhin regulär und singular schlechthin.

Wie Herr Boerner mir brieflich mitteilte, ist es nicht schwer, für beliebige n und μ zu beweisen, daß jedes Flächenelement einer Minimalfläche entweder regulär oder singular ist.

Die vorliegende Arbeit untersucht nun, ob Satz 2 auch verallgemeinert werden kann.

Wir wollen ein reguläres Flächenelement E stark regulär nennen, wenn jede Extremalfläche, die E enthält, Minimalfläche ist in der Umgebung von E . Es handelt sich also um die Frage, ob bei Flächenelementen genau so wie bei Linienelementen ein reguläres Element immer stark regulär ist.

Im Paragraphen 2 werden wir zeigen, daß ein Flächenelement E stark regulär ist, wenn in der Schar von quadratischen Formen

$$(1. 3) \quad f_{i\alpha, j\beta} x_{i\alpha} x_{j\beta} - \lambda_{i\alpha, j\beta} (x_{i\alpha} x_{j\beta} - x_{i\beta} x_{j\alpha}),$$

die man E zuordnen kann, mindestens eine positiv definite Form enthalten ist. Wir sagen dann, daß E die Bedingung B erfüllt, und haben also noch zu untersuchen, ob B erfüllt ist, wenn (1. 2) positiv definit ist.

Im selben Paragraphen beweisen wir auch noch folgende Hilfssätze:

I. Für das Erfülltsein der Bedingung B ist notwendig und hinreichend, daß $f_{i\alpha, j\beta} \xi_i \xi_j \eta_\alpha \eta_\beta$ positiv definit ist und zugleich zerlegbar in eine Summe von Quadraten bilinearer Formen unter denen wenigstens $n\mu$ linear unabhängig sind.

II. Wenn im Gebiet der $\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n$ jede positiv definite biquadratische Form überhaupt eine Zerlegung in Quadrate gestattet, so kann man auch für jede solche Form eine Zerlegung angeben, die wenigstens $n\mu$ linear unabhängige bilineare Formen enthält.

Satz 2 wird also sicher in der Variationsrechnung mehrfacher Integrale gelten, wenn folgende rein algebraische Frage bejaht werden kann: *Kann jede doppeltquadratische positiv definite Form als Summe von Quadraten bilinearer Formen geschrieben werden?*

Ein ähnliches Problem behandelt Hilbert in den Mathematischen Annalen Bd. 32, S. 342 (in den gesammelten Abhandlungen Bd. 2, S. 154), wo er untersucht, ob jede positiv definite Form in n Variablen und vom Grade $2m$ in eine Quadratsumme zerlegbar ist. Abgesehen vom Fall $m = 1$ und be-

liebigen n , der allgemein bekannt ist, und $n = 2$, beliebiges m , der auch in wenigen Worten zu erledigen ist, beweist Hilbert, daß die Frage nur bejahend zu beantworten ist für $n = 3$, $m = 2$. In den übrigen Fällen gibt es immer nichtzerlegbare positiv definite Formen.

Die Gedankengänge der Hilbertschen Beweise hat der Verfasser, der hierbei häufig freundlichst von Herrn van der Waerden unterstützt wurde, für seine Beweise im 2. und 3. Kapitel verwenden können. Er beweist dort, daß die Zerlegung einer positiv definiten Form in eine Summe von Quadraten bilinearer Formen immer möglich ist, wenn $n \leq 2$ oder $\mu \leq 2$ ist, während sie für $n \geq 3$ und $\mu \geq 3$ nicht immer möglich ist.

Für n und $\mu \geq 3$ bleibt die Möglichkeit also noch offen, daß ein Flächenelement regulär ist, ohne daß es stark regulär ist.

2. Satz. Ein Flächenelement E ist stark regulär, wenn in E die Bedingung B erfüllt ist.

Beweis. Es sei für das Zahlensystem $g_{ia,j\beta} = \lambda_{ia,j\beta}$ die Form (1.3) positiv definit. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß

$$g_{ia,j\beta} = g_{j\beta,ia} = -g_{i\beta,ja} = -g_{ja,i\beta}$$

ist. Die Koeffizienten der gegebenen positiv definiten Form sind also

$$(2.1) \quad f_{ia,j\beta} - g_{ia,j\beta} + g_{i\beta,ja} = f_{ia,j\beta} - 2g_{ia,j\beta}.$$

Wir denken uns durch E irgendeine Extremale U , d. h. eine Lösung der Eulerschen Gleichungen [Formel (10.1) in VmI.]. Nach dem 2. Kapitel in VmI. gibt es ein geodätisches Feld, das U transversal schneidet. Das Feld sei gegeben durch die Funktion Δ . In E gelten die Beziehungen

$$(2.2) \quad f = \Delta \quad f_{ia} = \Delta_{ia}.$$

Von U müssen wir beweisen, daß sie in der Umgebung von E Minimale ist, und das ist sicher der Fall [Formel (2.5) in VmI.], wenn die quadratische Form mit den Koeffizienten

$$f_{ia,j\beta} - \frac{1}{f} (f_{ia} f_{j\beta} - f_{i\beta} f_{ja})$$

positiv definit ist. (In VmI. heißt übrigens regulär, was bei uns stark regulär ist.) Da äquivalente Probleme dieselben Minimalen haben, sind wir fertig mit dem Beweis, wenn wir ein zu f äquivalentes Problem F angeben können, so daß die Koeffizienten

$$(2.3) \quad F_{ia,j\beta} - \frac{1}{F} (F_{ia} F_{j\beta} - F_{i\beta} F_{ja})$$

mit (2.1) übereinstimmen. Es sei

$$F = f - \Delta + G.$$

Das Integral von G über einen Teil irgendeiner Fläche sei nur von der Begrenzung dieses Teiles abhängig, also nicht vom Wege; wir erreichen dies, indem wir für G eine Summe nehmen, von der jeder Summand nach (2.4) bzw. (2.5) aus einem Funktionensystem S entsteht [vgl. VmI. (2.1)]. [In (2.4) und (2.5) soll über zweimal vorkommende Indizes nicht summiert werden.]

$$G = \sum_{i, \alpha, j, \beta} \Delta^{i\alpha, j\beta} + \sum_{i, \alpha} \Delta^{i\alpha},$$

$$(2.4) \left. \begin{aligned} S_\alpha &\equiv a_{i\alpha, j\beta} x_i \\ S_\beta &\equiv x_j \\ S_\gamma &\equiv t_\gamma \gamma \neq \alpha \text{ oder } \beta \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta^{i\alpha, j\beta} = a_{i\alpha, j\beta} (p_{i\alpha} p_{j\beta} - p_{i\beta} p_{j\alpha}).$$

Es sei weiter

$$a_{i\alpha, j\beta} = a_{j\beta, i\alpha} = -a_{i\beta, j\alpha} = -a_{j\alpha, i\beta}.$$

$$(2.5) \left. \begin{aligned} S_\alpha &\equiv w_{i\alpha} x_i \\ S_\gamma &\equiv t_\gamma \gamma \neq \alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta^{i\alpha} = w_{i\alpha} p_{i\alpha}.$$

Wegen (2.2) geht jetzt (2.3) über in

$$(2.6) \quad f_{i\alpha, j\beta} - \Delta_{i\alpha, j\beta} + a_{i\alpha, j\beta} - \frac{1}{G} (G_{i\alpha} G_{j\beta} - G_{i\beta} G_{j\alpha}).$$

Wir können wegen $\Delta_{i\alpha, j\beta} = -\Delta_{i\beta, j\alpha} = \frac{1}{G} (\Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta} - \Delta_{i\beta} \Delta_{j\alpha})$ die Parameter $a_{i\alpha, j\beta}$ so bestimmen, daß $2a_{i\alpha, j\beta} = \Delta_{i\alpha, j\beta} - 2g_{i\alpha, j\beta}$ ist. Sodann wählen wir die $w_{i\alpha}$ so, daß die Matrix von $G_{i\alpha}$ den Rang eins hat. (2.6) geht dann, wie wir noch zu beweisen hatten, über in (2.1).

Hilfssatz I. Für das Erfülltsein der Bedingung B ist notwendig und hinreichend, daß $P = f_{i\alpha, j\beta} \xi_i \xi_j \eta_\alpha \eta_\beta$ positiv definit ist und zugleich zerlegbar in eine Summe von Quadraten bilinearer Formen, unter denen wenigstens $n\mu$ linear unabhängig sind.

Beweis der Notwendigkeit. Für ein gewisses Wertsystem der $\lambda_{i\alpha, j\beta}$ enthalte die Schar (1.3) eine positiv definite Form L . L ist zerlegbar in eine Summe von Quadraten linearer Formen, unter denen wenigstens $n\mu$ linear unabhängig sind. Man substituiere in die Formel, die diese Zerlegung ausdrückt, links und rechts

$$(2.7) \quad x_{i\alpha} = \xi_i \eta_\alpha.$$

Man erhält so für P eine Zerlegung der verlangten Art, da die lineare Unabhängigkeit bei der Substitution (2.7) bestehen bleibt.

Beweis, daß es hinreicht. Es sei

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{i\alpha, j\beta} \xi_i \xi_j \eta_\alpha \eta_\beta &= \sum_{\varrho} (a_{i\alpha}^{\varrho} \xi_i \eta_\alpha)^2, \\ \text{wo die rechte Seite wenigstens } n\mu \text{ linear unabhängige} \\ &\quad \text{Formen enthält.} \end{aligned} \right.$$

Wir denken uns in die linke und rechte Seite von (2.8)

$$(2.9) \quad \xi_i \xi_j \eta_\alpha = x_{i\alpha} x_{j\beta} \text{ bzw. } \xi_i \eta_\alpha = x_{i\alpha}$$

eingesetzt. Die beiden Seiten gehen bei dieser Substitution in quadratische Formen der $x_{i\alpha}$ über, deren Differenz $Q = q_{i\alpha, j\beta} x_{i\alpha} x_{j\beta}$ bei der Substitution (2.7) identisch in den ξ_i, η_α verschwindet. Man schließt hieraus, wie wir beweisen werden, daß Q zu schreiben ist als eine Linearform der Größen

$$(2.10) \quad x_{i\alpha} x_{j\beta} - x_{i\beta} x_{j\alpha}.$$

In jedem Glied von Q ordnen wir die Faktoren so an, daß immer $i \leq j$ ist. Ist dann $\alpha > \beta$, so schreiben wir (wobei nicht summiert wird über i, j, α, β)

$$q_{i\alpha, j\beta} x_{i\alpha} x_{j\beta} = q_{i\alpha, j\beta} x_{i\beta} x_{j\alpha} + q_{i\alpha, j\beta} (x_{i\alpha} x_{j\beta} - x_{i\beta} x_{j\alpha}).$$

Wir erhalten so

$$Q = R + S, \text{ wo } R = r_{i\alpha, j\beta} x_{i\alpha} x_{i\beta} \quad (i \leq j; \alpha \leq \beta)$$

und $S = s_{i\alpha, j\beta} (x_{i\alpha} x_{j\beta} - x_{i\beta} x_{j\alpha})$ ist.

Da $R = Q - S$ ist, so geht R bei der Substitution (2.7) identisch in Null über, d. h. $r_{i\alpha, j\beta} \xi_i \xi_j \eta_\alpha \eta_\beta$ verschwindet identisch. Da es in R nur ein einziges Glied mit $\xi_i \xi_j \eta_\alpha \eta_\beta$ gibt, so schließt man auf

$$r_{i\alpha, j\beta} = 0.$$

Wegen (2.8) hat man jetzt

$$(2.11) \quad f_{i\alpha, j\beta} x_{i\alpha} x_{j\beta} - s_{i\alpha, j\beta} (x_{i\alpha} x_{j\beta} - x_{i\beta} x_{j\alpha}) = \sum_{\alpha} (a_{i\alpha}^0 x_{i\alpha})^2.$$

Da unter den $a_{i\alpha}^0 x_{i\alpha}$ wenigstens $n\mu$ Formen linear unabhängig sind, so ersieht man aus (2.11), daß die Schar (1.3) wirklich eine positiv definite Form enthält.

Hilfssatz II. Wenn im Gebiet der $\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_\mu$ jede positiv definite biquadratische Form überhaupt eine Zerlegung in Quadrate gestattet, so kann man auch immer eine Zerlegung angeben, die wenigstens $n\mu$ linear unabhängige bilineare Formen enthält.

Beweis. Es sei Q eine beliebige positiv definite Form. Es sei weiter $R \equiv Q - k(\xi_1^2 \eta_1^2 + \xi_1^2 \eta_2^2 + \dots + \xi_n^2 \eta_\mu^2)$, wo k eine positive Zahl kleiner als das Minimum von

$$\frac{Q}{\xi_1^2 \eta_1^2 + \xi_1^2 \eta_2^2 + \dots + \xi_n^2 \eta_\mu^2}$$

ist. Die Form R ist also auch positiv definit und besitzt daher nach der Voraussetzung eine Zerlegung in eine Summe von Quadraten $R = \sum_{\alpha} (b_{i\alpha}^0 \xi_i \eta_\alpha)^2$. Hieraus folgt für Q eine Zerlegung der gewünschten Art.

$$Q = \sum_{\alpha} (b_{i\alpha}^0 \xi_i \eta_\alpha)^2 + k \xi_1^2 \eta_1^2 + k \xi_1^2 \eta_2^2 + \dots + k \xi_n^2 \eta_\mu^2.$$

Zweites Kapitel.

3. Satz. Wenn

$$P(1) = f_{i\alpha, j\beta} \xi_i \xi_j \eta_\alpha \eta_\beta \quad (i, j = 1, 2; \alpha, \beta = 1, \dots, \mu)$$

positiv definit ist, so besteht eine Identität

$$P(1) = \sum_{q=1}^{\mu+1} (a_{i\alpha}^q \xi_i \eta_\alpha)^2 \quad a_{i\alpha}^q \text{ reell.}$$

Beweis. Wir wollen vorläufig den Satz für $\mu = 3$ beweisen.

Es sei $P(0)$ eine Summe von vier Quadraten beliebiger reeller doppelt-linearer Formen, die keinen gemeinsamen Nullpunkt haben. Nullpunkte, wie überhaupt Wertsysteme der ξ_i, η_α , von denen alle ξ_i oder alle η_α verschwinden, schließen wir aus.

Der Gedankengang des Beweises ist dieser. Wir zeigen, daß es möglich ist, durch stetige Veränderung der Koeffizienten, die wir als bestimmte Funktionen eines von 0 bis 1 heranwachsenden Parameters auffassen, $P(0)$ in $P(1)$ überzuführen und dabei zugleich die Zerlegung von $P(0)$ in eine reelle Zerlegung von $P(1)$.

Ausgangspunkt des Beweises ist die Gleichung

$$(3.1) \quad F = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2,$$

wo F eine doppeltquadratische Form mit den Koeffizienten f_l ($l = 1, \dots, 18$) und jedes φ_l eine doppeltlineare Form bedeuten möge.

Jedes φ_l hat sechs Koeffizienten. Die insgesamt 24 Koeffizienten im rechten Glied nennen wir in bestimmter Reihenfolge a_k ($k = 1, \dots, 24$).

Indem wir die entsprechenden Koeffizienten links und rechts gleichsetzen, erhalten wir ein System von 18 Gleichungen

$$(3.2) \quad f_l = F_l(a_1, \dots, a_{24}) \quad (l = 1, \dots, 18).$$

4. In diesem Paragraphen beweisen wir, daß das System (3.2) algebraisch unabhängig ist.

Die a_k fassen wir als orthogonale Koordinaten in einem 24-dimensionalen Raum E_{24} auf. Die Gleichungen (3.2) bestimmen in E_{24} eine 18-parametrische Schar von Mannigfaltigkeiten.

Jeder Punkt (a_k) in E_{24} enthält ein Exemplar dieser Schar. Dieses Exemplar hat in (a_k) einen linearen Tangentialraum, den wir den Lokalraum in (a_k) nennen wollen. Der Lokalraum, den wir beschreiben mit den lokalen Koordinaten da_k , ist bestimmt durch die Gleichungen

$$(4.1) \quad 0 = \frac{\partial F_l}{\partial a_k} da_k \quad (l = 1, \dots, 18).$$

Eine algebraische Beziehung zwischen den F_l mit konstanten Koeffizienten würde heißen, daß das System (4.1) linear abhängig wäre bei jeder Wahl

der a_k . Wir werden zeigen, daß diese lineare Abhängigkeit nur für besondere Wertsysteme der a_k zutrifft.

Einem Wertsystem der da_k , das (4.1) erfüllt, ordnen wir ein Formenquadrupel φ_e zu, das aus φ_e entsteht, indem man a_k durch da_k ersetzt. Es sei ε eine Konstante. Wir setzen jetzt

$$(4.2) \quad F + \Delta F = \sum_{e=1}^4 (\varphi_e + \varepsilon \varphi_e)^2.$$

Wegen einer bekannten Definition der partiellen Ableitung haben die Koeffizienten Δf_i von ΔF die Gestalt

$$\Delta f_i = \frac{\partial F_i}{\partial a_k} \varepsilon da_k + \eta_{ik} \varepsilon da_k$$

mit der Bedingung

$$(4.3) \quad \eta_{ik} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wegen (4.1) hat man

$$(4.4) \quad \Delta f_i = \eta_{ik} \varepsilon da_k.$$

Wenn man in

$$\Delta F = 2 \varepsilon \sum_{e=1}^4 \varphi_e \varphi_e + \varepsilon^2 \sum_{e=1}^4 \varphi_e^2$$

links die biquadratische Form mit den Koeffizienten (4.4) einsetzt, sodann durch ε dividiert und schließlich ε nach Null streben läßt, so erhält man wegen (4.3)

$$(4.5) \quad \varphi_1 \varphi_1 + \varphi_2 \varphi_2 + \varphi_3 \varphi_3 + \varphi_4 \varphi_4 = 0$$

und daraus die Kongruenz

$$\varphi_4 \varphi_4 \equiv 0 \quad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

Der Punkt P , in dem wir den lokalen Raum betrachten, sei so beschaffen, daß $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und φ_4 keinen gemeinsamen Nullpunkt haben.

Die Gesamtheit aller Nullpunkte $(\lambda a_1, \lambda a_2; \mu b_1, \mu b_2, \mu b_3)$, die bei veränderlichen λ und μ aus einem Nullpunkt $(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3)$ entstehen, nennen wir eine Nullstellenklasse. Die Formen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ haben, wegen unserer Annahme über die φ_e , endlich viele gemeinsame Nullstellenklassen P_1, P_2, \dots, P_m .

Da eine Nullstellenklasse im 5-dimensionalen Raum der x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, so ist das Ideal $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ 2-dimensional.

Nach einem bekannten Satz ist im Polynombereich der Veränderlichen x_1, \dots, x_n ein Ideal mit r Basiselementen ungemischt, wenn es $(n-r)$ -dimensional ist.

Das Ideal $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ hat also, in einer Zerlegung in Primärkomponenten, keine eingebetteten 0- oder 1-dimensionalen Komponenten. Wegen der Homogenität der φ_i waren schon isolierte 0- oder 1-dimensionale Komponenten ausgeschlossen.

Die Nullstellenmannigfaltigkeiten der Komponenten sind also gerade die obengenannten Nullstellenklassen P_1, \dots, P_m .

Die Komponenten selbst nennen wir q_1, \dots, q_m und die zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$. Aus $\varphi_i \varphi_j \equiv 0 (q_i)$ und $\varphi_i \not\equiv 0 (p_i)$ schließt man wegen der Eigenschaften eines Primärideals und des zugehörigen Primideals auf $\varphi_j \equiv 0 (q_i)$, d. h.

$$\varphi_4 \equiv 0 \quad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

oder

$$\varphi_4 = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + A_3 \varphi_3$$

mit konstanten Koeffizienten A_i . Ähnliche Ausdrücke finden wir für φ_1, φ_2 und φ_3 . Da (4. 5) erfüllt sein soll, sind nicht alle Koeffizienten A_i unabhängig. Wir erhalten als notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen von (4. 5), wenn die φ_i die genannte Eigenschaft besitzen:

$$(4. 6) \quad \begin{cases} \varphi_1 = & -A_6 \varphi_2 - A_4 \varphi_3 - A_1 \varphi_4 \\ \varphi_2 = A_6 \varphi_1 & -A_5 \varphi_3 - A_2 \varphi_4 \\ \varphi_3 = A_4 \varphi_1 + A_5 \varphi_2 & -A_3 \varphi_4 \\ \varphi_4 = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + A_3 \varphi_3 \end{cases}$$

Dem Formenquadrupel φ_i entspricht eineindeutig ein Vektor des lokalen Raumes. Der lokale Raum ist also höchstens 6-dimensional. Wegen (4. 1) ist er mindestens 6-dimensional. Er ist also genau 6-dimensional in P . Das System (4. 1) ist linear unabhängig, das System (3. 2) also algebraisch unabhängig. Gleichzeitig folgt, daß die durch (3. 2) definierte Mannigfaltigkeit in allen Punkten P von der oben angenommenen Beschaffenheit genau die Dimension 6 hat.

5. In E_{24} nehmen wir einen reellen Punkt P_0 an, der so beschaffen sein soll, daß der lokale Vektorraum in P_0 6-dimensional ist.

Die dem Punkt laut (3. 1) zugeordnete Form nennen wir $P(0)$.

$P(1)$ sei eine beliebige positiv definite biquadratische Form.

Wir denken uns die f_i als Funktionen eines Parameters t , so daß, wenn t stetig von 0 bis 1 heranwächst, $P(0)$ stetig in $P(1)$ übergeht. Die Ableitungen der $f_i(t)$ seien stetige Funktionen von t . $F(t)$ sei die Form mit den Koeffizienten $f_i(t)$.

Es sei in E_{24} der Punkt P_{t_1} ein reeller Punkt mit 6-dimensionalem Lokalraum und $F(t_1)$ die zugehörige Form. Wir wollen zeigen, daß es eine Zahl δ gibt, so daß für jedes t mit der Eigenschaft $t_1 \leq t \leq t_1 + \delta$ die Form $F(t)$ als Summe reeller Quadrate darstellbar ist. Die Gleichungen, die entstehen,

wenn wir in (3.2) $f_l = f_l(t)$ setzen; nennen wir das System (3.2. t). Es sei S ein System von sechs reellen linearen Gleichungen, die den 18-dimensionalen Raum S_{18} , der senkrecht zum Lokalraum in P_{t_1} ist, bestimmen. Das System, zusammengesetzt aus (3.2. t) und S , nennen wir α .

Die Funktionaldeterminante von α nach den a_1, \dots, a_{24} ist in P_{t_1} von Null verschieden, da zwischen S_{18} und dem Lokalraum in P_{t_1} keine lineare Beziehung besteht. Wir können jetzt den klassischen Satz über implizite Funktionen anwenden. Dieser ergibt, daß in einer gewissen Umgebung

$$(5.1) \quad t_1 - \delta \leq t \leq t_1 + \delta$$

genau ein System von reellen Funktionen $a_k = a_k(t)$ existiert, das den Gleichungen α genügt, und für welches

$$f_l(t_l) = F_l(a_1(t_l), \dots, a_{24}(t_l)) \quad (l = 1, \dots, 18)$$

ist.

Eine Form heiße kritisch, wenn sie eine Zerlegung (3.1) besitzt von der Beschaffenheit, daß die φ_i einen gemeinsamen Nullpunkt haben. Für eine kritische Form F gibt es, wie sich aus (3.1) ergibt, ein Wertsystem der x_i und y_a , für das die Gleichungen

$$(5.2) \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0$$

gelten. Wir nennen ein derartiges Wertsystem einen Doppelpunkt von F .

6. Es sei

$$(6.1) \quad F = \lambda_1 P(0) + \lambda_2 P(1) + \lambda_3 R.$$

Hier ist R eine positiv definite Form, die wir später noch genauer bestimmen werden. Die λ_a seien die Entfernungen eines Punktes in der euklidischen Ebene zu den drei Seiten eines Dreiecks, positiv gerechnet für Punkte im Innern des Dreiecks. Es gilt also

$$(6.2) \quad \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \lambda_3 s_3 = 2O.$$

Hier sind s_a und O die Seiten bzw. der Flächeninhalt des Dreiecks.

Wenn ein Punkt im Inneren des Dreiecks kritisch ist, d. h. laut (6.1) eine kritische Form liefert, so hat F einen Doppelpunkt $(p_1, p_2, q_1, q_2, q_3)$.

Da F positiv definit ist, so ist auch der komplex konjugierte Punkt (\bar{p}_1, \bar{q}_a) ein Doppelpunkt von F . Es ist klar, daß sowohl (p_1, p_2) und (\bar{p}_1, \bar{p}_2) auf einer projektiven Geraden, wie auch (q_1, q_2, q_3) und $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3)$ in einer projektiven Ebene verschieden sind. Diese doppelte Verschiedenheit werden wir verlangen, wenn wir später von verschiedenen Doppelpunkten reden. Gesetzt, es wären z. B. (p_1, p_2) und (\bar{p}_1, \bar{p}_2) nicht verschieden. Man könnte dann p_1 und p_2 reell annehmen, und es wäre entweder $(p_1, p_2, q_1 + \bar{q}_1, q_2 + \bar{q}_2, q_3 + \bar{q}_3)$ ein reelles Wertsystem, das den Gleichungen (5.2) genügt, oder es wäre $q_1 + \bar{q}_1 = q_2 + \bar{q}_2 = q_3 + \bar{q}_3 = 0$. Aber dann wäre $(p_1, p_2, iq_1, iq_2, iq_3)$ ein reelles Wertsystem, das (5.2) genügt,

Ein kritischer Punkt im Innern des Dreiecks liefert also laut (6.1) eine kritische Form mit zwei verschiedenen Doppelpunkten.

Im nächsten Paragraphen werden wir beweisen, daß es im Innern des Dreiecks nur endlich viele Punkte mit dieser Eigenschaft, also auch nur endlich viele kritische Punkte geben kann.

Wir brauchen dann zum Beweis des Satzes für $n = 2$, $\mu = 3$ bloß noch folgendes hinzuzufügen. Man ziehe eine differenzierbare Kurve, die vom Eckpunkt $(1, 0, 0)$ bis zum Eckpunkt $(0, 1, 0)$ gänzlich im Innern des Dreiecks läuft und keinen kritischen Punkt enthält. Längs der Kurve seien die λ_α differenzierbare Funktionen eines von 0 bis 1 heranwachsenden Parameters t . Wegen (6.1) erhalten wir so ein Funktionensystem $f_i(t)$. Wir wissen dann, daß für keinen Wert von t ($0 \leq t < 1$) $F(t)$ kritisch ist, d. h. alle Formen $F(t)$ haben eine reelle Zerlegung (3.1), und dasselbe gilt für $P(1)$.

7. Wenn wir in (5.2) (p_i, q_α) bzw. $(\bar{p}_i, \bar{q}_\alpha)$ einsetzen, so erhalten wir ein System von 10 homogenen linearen Gleichungen in den f_i , die wir das System L_{10} nennen wollen. Wegen der Eulerschen Homogenitätsbedingung

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial F}{\partial y_3} = 2F$$

sind höchstens acht Gleichungen von L_{10} linear unabhängig.

Wir wollen für einen Augenblick voraussetzen, daß $p_2 = \bar{p}_2 = q_3 = \bar{q}_3 = 1$ und $p_1 \neq \bar{p}_1$, $q_1 \neq \bar{q}_1$, $q_2 \neq \bar{q}_2$ ist. Nötigenfalls kann man das erreichen, indem man passende homogene lineare Transformationen der x_i allein und der y_α allein vornimmt, wobei das System L_{10} in ein äquivalentes System von der gleichen Gestalt übergeht.

Äquivalent zu L_{10} ist das System L_8 , das man erhält, wenn man in

$$F = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0$$

$x_i = p_i$; $y_\alpha = q_\alpha$ bzw. $x_i = \bar{p}_i$; $y_\alpha = \bar{q}_\alpha$ einsetzt.

Ich nehme jetzt das Polynom $f = (q_2 - \bar{q}_2)(y_2 - q_2) + (y_2 - q_2)^2$, das ersichtlich allen Gleichungen L_8 außer $(\frac{\partial F}{\partial y_2})_{x_i = \bar{p}_i; y_\alpha = \bar{q}_\alpha} = 0$ genügt. Wenn man alle Glieder von f mit passenden Potenzprodukten von x_2 und y_3 multipliziert, so erhält man eine biquadratische Form mit derselben Eigenschaft. So kann man immer Formen angeben, die allen Gleichungen L_8 außer einer genügen. Das System L_8 enthält also genau acht linear unabhängige Gleichungen. Unter der Bedingung, daß $(p_i; q_\alpha)$ und $(\bar{p}_i; \bar{q}_\alpha)$ verschiedene Doppelpunkte sind, kann man somit aus L_{10} die Größen f_1, \dots, f_8 auflösen.

$$(7.1) \quad \begin{aligned} f_1 &= a_1^9 f_9 + a_1^{10} f_{10} + \dots + a_1^{18} f_{18} \\ &\vdots \\ f_8 &= a_8^9 f_9 + a_8^{10} f_{10} + \dots + a_8^{18} f_{18}. \end{aligned}$$

Jeder der Koeffizienten a ist eine rationale Funktion der $p_i, \bar{p}_i, q_a, \bar{q}_a$. Die Koeffizienten einer beliebigen Form mit zwei verschiedenen Doppelpunkten erfüllen also für irgend ein Wertsystem der $p_i, \bar{p}_i, q_a, \bar{q}_a$ die Gleichungen (7. 1). Wir fassen (7. 1) auf als die Definitionsgleichungen einer irreduziblen Korrespondenz zwischen dem Raum der f_i und dem 10-dimensionalen Raum der $p_i, \bar{p}_i, q_a, \bar{q}_a$. Der Übergang von L_{10} auf (7. 1) war deswegen notwendig, weil L_{10} noch die Korrespondenz enthält, die entsteht, wenn man in L_{10} $p_i = \bar{p}_i, q_a = \bar{q}_a$ nimmt.

Die Größen $f_i, p_i, \bar{p}_i, q_a, \bar{q}_a$, die durch die Gleichungen (7. 1) miteinander verknüpft sind, haben einen bestimmten Transzendenzgrad T , den wir nach der Methode von van der Waerden in zwei verschiedenen Weisen bestimmen werden (vgl. Math. Annalen Bd. 110, S. 140).

Es sei a die Anzahl der algebraisch unabhängigen Größen unter den $p_i, \bar{p}_i, q_a, \bar{q}_a$ und b die Anzahl der algebraisch unabhängigen unter den f_i , nachdem die $p_i, \bar{p}_i, q_a, \bar{q}_a$ als gegeben angenommen werden. Ebenso definieren wir c und d unter Vertauschung der Größensysteme f_i und $p_i, \bar{p}_i, q_a, \bar{q}_a$. Es gilt dann $T = a + b = c + d$.

Offenbar ist $a = 10$. Da (7. 1) linear unabhängig ist, ist $b = 10$.

Wenn man die allgemeine Form mit zwei verschiedenen Doppelpunkten hat, so entspricht diesem Doppelpunktpaar genau eine 4-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit im 10-dimensionalen Raum der $p_i, \bar{p}_i, q_a, \bar{q}_a$, da in diesem Raum Wertsysteme der p_i usw., die sich um einen Faktor unterscheiden, verschiedene Punkte liefern. Es gilt also $d = 4$, mithin $c = 16$. Die Urmannigfaltigkeit im Raum der f_i wollen wir M_{16} nennen. Es können also nur Punkte von M_{16} eine Form mit zwei verschiedenen Doppelpunkten repräsentieren.

Mit Hilfe dieses Satzes werden wir jetzt beweisen, daß es nur endlich viele kritische Punkte im Innern des im vorigen Paragraphen betrachteten Dreiecks gibt. Es mögen die Koeffizienten von $P(0)$, $P(1)$ und R in (6. 1) g_i bzw. h_i bzw. r_i sein. Ein kritischer Punkt findet sich aus (6. 2), (7. 1) und

$$(7. 2) \quad \lambda_1 g_i + \lambda_2 h_i + \lambda_3 r_i - f_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 18).$$

Geometrisch gesprochen handelt es sich darum, daß man im 18-dimensionalen Raum der f_i die Schnittpunkte von M_{16} mit der Ebene durch (g_i) , (h_i) und (r_i) bestimmt. Alle Punkte in einer Umgebung von (g_i) stellen positiv definite Formen dar; man kann daher die Form R so angeben, daß die Schnittpunkte, soweit sie nicht auf der Geraden durch (g_i) und (h_i) liegen, endlich an der Zahl sind. Schnittpunkte auf der genannten Geraden interessieren uns daher nicht, weil für sie $\lambda_3 = 0$ ist und ihnen also Punkte auf dem Rand des Dreiecks entsprechen. Wir haben jetzt dargetan, daß es, bei geschickter Wahl von R , im Innern des Dreiecks nur endlich viele kritische Punkte gibt.

8. Der Beweis des Satzes für $n = 2$, $\mu = 3$ kann in allen Einzelheiten fast buchstäblich verallgemeinert werden für den Fall $n = 2$ und beliebiges μ . In der Verallgemeinerung von (3. 1) hat F jetzt $p = \frac{3}{2}\mu(\mu + 1)$ Koeffizienten. Die $\mu + 1$ bilinearen Formen im rechten Glied von (3. 1) haben insgesamt $q = 2\mu(\mu + 1)$ Koeffizienten. Die Verallgemeinerung des Systems (4. 6) führt, wie man aus der Symmetrie von (4. 6) ersieht, zu einem System mit $r = \frac{1}{2}\mu(\mu + 1)$ Koeffizienten.

Die Möglichkeit der Verallgemeinerung des Beweises beruht nun letzten Endes darauf, daß auch jetzt wieder $r = q - p$ ist.

Denn aus diesem Grund sind die neuen Gleichungen (3. 2) algebraisch unabhängig, man kann wieder Loklräume betrachten, die im allgemeinen $\frac{1}{2}\mu(\mu + 1)$ -dimensional sind, und im Dreieck gibt es wieder endlich viele kritische Punkte.

Wenn man nun versucht, die obenstehende Methode auf den Fall $n = \mu = 3$ anzuwenden, dann muß man eine Zerlegung in fünf Quadrate ansetzen, da fünf die kleinste Anzahl der Formen ist, die jetzt im allgemeinen keine gemeinsamen Nullpunkte haben. Die Methode muß aber scheitern, weil nicht einmal 36 gleich $45 - 9$ ist.

Wir werden im dritten Kapitel sogar beweisen, daß jetzt eine Zerlegung unter Umständen unmöglich ist.

Drittes Kapitel.

9. Satz. Es gibt positiv definite biquadratische Formen

$f_{i\alpha, j\beta} x_i x_j y_\alpha y_\beta$, ($i, j = 1, \dots, n$; $\alpha, \beta = 1, \dots, \mu$), $n \geq 3$ und $\mu \geq 3$, die nicht als Summe endlich vieler Quadrate bilinearer Formen zu schreiben sind.

Wir wollen den Satz zunächst für $\mu = n = 3$ beweisen.

Es seien x_1, x_2, x_3 die (immer reellen) Koordinaten in einer reellen projektiven Ebene S_3 . In S_3 ziehen wir vier verschiedene Gerade l_i ($i = 1, \dots, 4$). Die sechs Schnittpunkte, von denen wir voraussetzen, daß für keinen $x_3 = 0$ ist, numerieren wir ganz beliebig mit nicht eingeklammerten Zahlen. Sodann numerieren wir sie noch einmal und zwar mit eingeklammerten Zahlen nach dieser Regel, daß jede der vier Geraden entweder i oder (i) enthält (vgl. die Fig.). Es seien $L_i = 0$ die Gleichungen

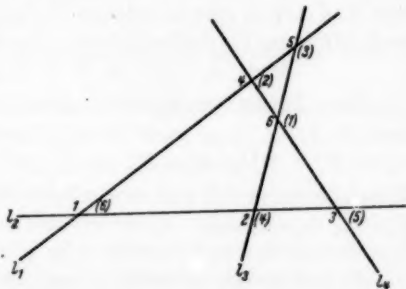


Fig. 1.

der l_i . Wir denken uns L_1 und L_3 in der Gestalt gegeben (durch eventuelle Multiplikation mit -1 könnten wir das immer erreichen), daß die Ungleichungen

$$(9.1) \quad L_1(6) L_2(6) > 0 \quad L_3(1) L_4(1) > 0$$

gelten. Es sei M_i diejenige Form, die entsteht, wenn man in L_i die x_i durch y_i ersetzt. Wir betrachten die Form

$$(9.2) \quad F = (L_1 M_1)^2 + (L_2 M_2)^2 + (L_3 M_3)^2 + (L_4 M_4)^2 + p L_1 L_2 M_3 M_4, \quad p > 0.$$

Es sei P_i dasjenige Punktepaar in S_3 , dessen erstes Element der Punkt i ist, und dessen zweites Element derjenige Punkt ist, der in der Figur mit einem eingeklammerten i versehen ist.

$F(P_i)$ sei der Wert von F für ein Koordinatensextupel von P , ist also bis auf einen positiven Faktor bestimmt.

Indem man einsetzt, sieht man ohne Mühe mit Hilfe der Figur, daß

$$(9.3) \quad F(P_1) = F(P_2) = F(P_3) = F(P_4) = F(P_5) = 0,$$

und wegen (9.1), daß

$$(9.4) \quad F(P_6) > 0$$

ist. Wir können die P_i als Punkte Q_i in einem 4-dimensionalen euklidischen Raum E_4 mit dem rechtwinkligen Koordinatensystem

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad \frac{y_1}{y_3} = z, \quad \frac{y_2}{y_3} = t$$

darstellen. Jetzt sind wir imstande, den Begriff Umgebung des Punktes P_i zu definieren, und zwar als die Menge der reellen Zahlensextupel, deren Repräsentanten in E_4 eine endliche Umgebung von Q_i bilden.

Wir zeigen jetzt, daß für genügend kleines p die P_i ($i = 1, \dots, 5$) isolierte Nullpunkte von F sind, d. h. daß in einer gewissen Umgebung von P_i keine Nullpunkte von F liegen. Es habe Q_i die Koordinaten a_i, b_i, c_i, d_i . Da wir also nur Umgebungen der P_i betrachten, in denen keine Punkte liegen mit $x_3 = 0$ oder $y_3 = 0$, so können wir $x_3 = y_3 = 1$ setzen; jetzt entwickeln wir F nach steigenden Potenzen von $(x_1 - a_i)$, $(x_2 - b_i)$, $(y_1 - c_i)$ und $(y_2 - d_i)$. Es fehlen in dieser Entwicklung die Glieder nullter und erster Ordnung, wie man ersieht, wenn man in (9.2) jedes L_i und jedes M_i einzeln entwickelt; also ist nur der Teil zweiter Ordnung für das Isoliertsein maßgebend. Für $i = 1$ hat er die Gestalt

$$M_1^2(6) L_1^2(6) + M_2^2(6) L_2^2(6) + L_3^2(1) M_3^2 + L_4^2(1) M_4^2.$$

Dieses Polynom ist positiv für jedes Punktepaar mit Ausnahme von P_1 . Auch für $i = 2, \dots, 5$ ist er leicht zu berechnen, für $i = 2$ finden wir z. B.

$$L_1^2(2) M_1^2 + M_2^2(4) L_3^2 + M_3^2(4) L_3^2 + L_4^2(2) M_4^2 + p L_1(2) M_3(4) L_2 M_4.$$

Wenn man dieses Polynom als quadratische Form in den Größen $(x_1 - a_2)$, $(x_2 - b_2)$, $(y_1 - c_2)$, $(y_2 - d_2)$ auffaßt, und wenn man die Diskriminante bildet, so sieht man, daß auch diese Form für genügend kleines p positiv definit ist.

Bis jetzt ist also bewiesen, daß es eine positive Zahl p' gibt so, daß für $0 < p < p'$ die Form (9.2) in einer Umgebung jeder der P_i (für P_6 ist es

eine Folge von 9. 4) nicht-negative Werte annimmt; nur in den Punktepaaren P_1, \dots, P_5 selbst ist $F = 0$.

Wir denken uns jetzt im doppeltprojektiven Raum offene Umgebungen mit der genannten Eigenschaft angegeben. Die Komplementärmenge dieser Umgebungen, die also abgeschlossen ist, nennen wir V . Jetzt betrachten wir die Werte, die der Ausdruck

$$(9.5) \quad \left| \frac{(L_1 M_1)^2 + (L_2 M_2)^2 + (L_3 M_3)^2 + (L_4 M_4)^2}{L_1 L_2 M_3 M_4} \right|$$

annimmt für beliebige Koordinatensextupel aller Punkte in V . Da (9. 5) vom nullten Grade ist, so ist er eine Funktion der Punkte von V .

Nirgends in V hat er den Wert Null, er hat also ein positives Minimum m . Wenn wir jetzt p so wählen, daß gleichzeitig $0 < p < p'$ und $p < m$ ist, so hat F in V gewiß keinen Nullpunkt.

Wir haben also die Existenz einer biquadratischen Form F dargetan, für die $F(P_i) = 0$ ist ($i = 1, \dots, 5$), während in jedem anderen Punkt $F > 0$ ist.

Es sei G eine willkürliche positiv definite biquadratische Form und q eine positive Zahl, die wir später noch einer gewissen Bedingung unterwerfen. Gesetzt, die positiv definite Form $H = F + qG$ wäre zu schreiben als eine Summe von 36 Quadraten

$$(9.6) \quad H = \sum_{i=1}^{36} \varphi_i^2,$$

wo die φ_i bilineare reelle Formen sind.

Aus (9. 6) schließt man, daß es mindestens ein φ_i gibt, für das $\varphi_i^2(P_6) \geq \frac{1}{36} H(P_6)$ ist. Es sei dies φ_1 , d. h.

$$(9.7) \quad |\varphi_1(P_6)| \geq \frac{1}{6} \sqrt{H(P_6)}.$$

Eine Folge von (9. 6) und (9. 3) ist

$$(9.8) \quad |\varphi_1(P_i)| \leq \sqrt{qG(P_i)} \quad (i = 1, \dots, 5).$$

Da die P_i ($i = 1, \dots, 6$) das vollständige System gemeinschaftlicher Nullpunkte der vier bilinearen Formen $L_i M_j$ sind, so gibt es eine Relation

$$(9.9) \quad \alpha_1 \varphi_1(P_1) + \alpha_2 \varphi_1(P_2) + \dots + \alpha_6 \varphi_1(P_6) = 0,$$

wo die α_i nur von der Lage der sechs Punktepaare, also nicht von der Form φ_1 und auch nicht von q abhängen.

Wir wollen etwas ausführlicher hierauf eingehen. Die vier bilinearen Formen $L_j M_j$ denken wir ausmultipliziert. Statt $x_1 y_1, x_1 y_2, \dots, x_3 y_3$ schreiben wir z_1, \dots, z_9 . $L_j M_j$ möge dabei übergehen in λ_j .

Das Punktepaar 2, (3) erfüllt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, aber nicht $\lambda_4 = 0$.

Mit Hilfe der Figur kann man so stets Beispiele angeben, in denen ein Punktepaar drei der Gleichungen $\lambda_i = 0$ erfüllt und die vierte nicht. Die vier Gleichungen $\lambda_i = 0$ sind also linear unabhängig, sie haben somit auch nicht mehr als fünf linear unabhängige Lösungen.

Jedes der sechs Punktepaare $i, (i)$ liefert eine Lösung, die wir $(z_j)_i$ ($j = 1, \dots, 9$) nennen wollen. Es gibt mithin sechs Konstanten α_i , die nicht alle gleich Null sind, so daß $\alpha_1(z_j)_1 + \alpha_2(z_j)_2 + \dots + \alpha_6(z_j)_6 = 0$ ($j = 1, \dots, 9$) ist.

Jetzt nehmen wir eine willkürliche bilineare Form φ_1 , in der wir, wie vorher, $x_1 y_1 = z_1, \dots, x_3 y_3 = z_9$ setzen. Es sei $\varphi_1(P_i)$ das Ergebnis, wenn wir $z_j = (z_j)_i$ in φ_1 einsetzen. ($j = 1, \dots, 9$).

Wie wir beweisen mußten, gilt also die Beziehung (6.9).

Wir wollen noch zeigen, daß keine der Konstanten α_i verschwindet. Wenn z. B. $\alpha_6 = 0$ wäre, so würde mindestens eine der übrigen Konstanten α_i , sagen wir α_5 , nicht $= 0$ sein. Das würde bedeuten, daß jede bilineare Form, die P_1, P_2, P_3, P_4 enthält, auch P_5 enthalten muß. Das Beispiel von $L_2 M_3$ zeigt uns aber, daß dies nicht zutrifft, denn 1, 2 und 3 liegen auf l_2 , aber 5 nicht, und (4) liegt auf l_3 , aber (5) nicht. Mithin ist $\alpha_6 \neq 0$.

Ebenso könnte man beweisen, daß die anderen α_i von Null verschieden sind. Aus (9.9) folgt

$$(9.10) \quad \varphi_1(P_i) \leq \sum_{t=1}^6 \left| \frac{\alpha_t}{\alpha_6} \varphi_1(P_t) \right|.$$

Wir setzen jetzt in (9.10) die Abschätzungen (9.7) und (9.8) ein, die Gültigkeit hätten, wenn die Zerlegung von H in eine Summe von 36 Quadraten möglich wäre. Dann bekommen wir

$$\frac{1}{6} \sqrt{F(P_6) + qG(P_6)} \leq \sum_{t=1}^6 \left| \frac{\alpha_t}{\alpha_6} \sqrt{qG(P_t)} \right|.$$

Wenn man q nach Null streben läßt, so findet man $F(P_6) = 0$. Das ist ein Widerspruch (vgl. 9.4).

Wäre nun eine Zerlegung in eine Summe von mehr als 36 Quadraten möglich, so würde es auch mit 36 Quadraten gehen. Da nämlich unsere biquadratischen Formen 36 Koeffizienten haben, so gibt es zwischen mehr als 36 solchen Formen eine lineare Relation. Wir lösen diese Relation nach derjenigen Form auf, die absolut mit dem größten Koeffizienten versehen ist, setzen in die Zerlegung für diese Form den gefundenen Ausdruck ein und haben so die Zahl der Quadrate um 1 vermindert. Diese Reduktion kann man immer machen, solange die Zahl der Quadrate noch größer als 36 ist.

Es sei H die oben konstruierte unzerlegbare Form. Dann ist $H + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) y_4^2$ positiv definit im Gebiet der Größen $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4)$ und unzerlegbar. Denn wenn es eine Zerlegung gäbe, und man würde $y_4 = 0$ setzen, so würde man eine Zerlegung für H erhalten. Durch dieses Beispiel ist genügend klar, wie man mit vollständiger Induktion den Satz für beliebige $n > 3$ und $\mu > 3$ beweisen kann.

(Eingegangen am 8. 3. 1938.)

Über periodische und asymptotische Lösungen beim n -fachen Pendel in der Ebene*).

Von

G. Bradistilov in Sofia (Bulgarien), z. Z. München.

§ 1.

Aufstellung der Differentialgleichungen.

Wir betrachten allgemein ein System von n Pendeln, bestehend aus n starren Körpern, die um parallele horizontale Achsen drehbar sind, und zwar der erste um eine feste Achse O , der zweite um eine Achse O_1 des ersten Körpers usw. Der Schwerpunkt des ersten Körpers S_1 liege auf der Geraden OO_1 , derjenige des zweiten Körpers S_2 auf der Geraden O_1O_2 usw., und zwar jeweils O_{v-1} nicht zwischen S_v und O_v .

Sind x_v, y_v die Koordinaten des Schwerpunktes S_v des v -ten Pendels mit der Masse m_v in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit der positiven y -Achse nach unten, ist $a_v = \overrightarrow{O_{v-1}S_v}$, $b_v = \overrightarrow{O_{v-1}O_v}$ und φ_v der Winkel zwischen der Richtung $\overrightarrow{O_{v-1}S_v}$ und der positiven y -Achse, so sind die a_v, b_v positiv und es bestehen die Gleichungen¹⁾

$$(1) \quad \begin{cases} x_v = a_v \sin \varphi_v + \sum_{k=1}^{v-1} b_k \sin \varphi_k, \\ y_v = a_v \cos \varphi_v + \sum_{k=1}^{v-1} b_k \cos \varphi_k, \end{cases} \quad (v = 1, \dots, n)$$

und

$$\begin{aligned} x'_v &= a_v \cos \varphi_v \cdot \varphi'_v + \sum_{k=1}^{v-1} b_k \cos \varphi_k \cdot \varphi'_k, \\ y'_v &= -a_v \sin \varphi_v \cdot \varphi'_v - \sum_{k=1}^{v-1} b_k \sin \varphi_k \cdot \varphi'_k, \end{aligned} \quad (v = 1, \dots, n).$$

*) Diese Arbeit ist von der Philosophischen Fakultät II. Sektion der Universität München als Dissertation (D 19) angenommen worden. Herrn Geheimrat Prof. Dr. O. Perron danke ich herzlich für die wertvollen Anregungen.

¹⁾ Leere Summen $\sum_{k=n+1}^n$, $\sum_{k=1}^0$ sind stets gleich Null.

Wir bezeichnen mit J_r das Trägheitsmoment des r -ten Pendels in bezug auf seinen Schwerpunkt und setzen

$$(2) \quad \begin{cases} A_r = a_r^2 m_r + b_r^2 \sum_{k=r+1}^n m_k, \\ B_r = a_r m_r + b_r \sum_{k=r+1}^n m_k. \end{cases} \quad (r = 1, \dots, n).$$

Wir sehen leicht ein, daß die kinetische und potentielle Energie des Pendelsystems durch die Ausdrücke

$$(3) \quad T = \sum_{r=1}^n T_r = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n [J_r \varphi_r'^2 + m_r (x_r'^2 + y_r'^2)] \\ = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n [2B_r \varphi_r' \sum_{k=1}^{r-1} b_k \cos(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k' + (A_r + J_r) \varphi_r'^2]$$

und

$$(4) \quad U = -g \sum_{r=1}^n B_r \cos \varphi_r,$$

gegeben sind.

Daraus folgt das Integral der lebendigen Kraft:

$$(5) \quad \sum_{r=1}^n [2B_r \varphi_r' \sum_{k=1}^{r-1} b_k \cos(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k' + (A_r + J_r) \varphi_r'^2] \\ = 2g \sum_{r=1}^n B_r \cos \varphi_r + h.$$

Wegen (3) und (4) und bei Berücksichtigung der Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_r'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_r} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi_r} \quad (r = 1, \dots, n)$$

erhalten wir die folgenden Bewegungsgleichungen des Systems

$$(6) \quad \begin{aligned} & B_r \sum_{k=1}^{r-1} b_k [\cos(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] + (A_r + J_r) \varphi_r'' \\ & + b_r \sum_{k=r+1}^n B_k [\cos(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] = -g B_r \sin \varphi_r, \\ & (r = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Wenn wir in dieser Gleichung $J_r = 0$ setzen, erhalten wir die Bewegungsgleichungen des n -fachen mathematischen Pendels, bei welchem die einzelnen Pendel in beliebigen Punkten der Verbindungsstrecken aufgehängt sind:

$$(6a) \quad \begin{aligned} & B_r \sum_{k=1}^{r-1} b_k [\cos(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] + A_r \varphi_r'' \\ & + b_r \sum_{k=r+1}^n B_k [\cos(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] = -g B_r \sin \varphi_r, \\ & (r = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Setzen wir schließlich in Gleichung (6a) $a_r = b_r$, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen für n aneinander hängende Pendel:

$$(6b) \quad \begin{aligned} & M_r \sum_{k=1}^r a_k [\cos(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] \\ & + \sum_{k=r+1}^n M_k a_k [\cos(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] = -M_r g \sin \varphi_r, \\ & \quad (r = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

wobei $M_r = \sum_{k=r}^n m_k$.

Von hier ab werden wir uns mit dem System von physischen Pendeln, also mit den Gleichungen (6) beschäftigen, weil alle Ergebnisse, welche wir für dieses System erhalten, sofort durch Spezialisierung auf die beiden Systeme von mathematischen Pendeln (6a) und (6b) zu übertragen sind. Es ist nur nötig, entsprechend $J_r = 0$ bzw. auch noch $a_r = b_r$ zu setzen.

Die Gleichungen (6) lassen sofort erkennen, daß, wenn das Pendelsystem bei seiner Bewegung zweimal durch die Gleichgewichtslage geht, die Bewegung periodisch wird, d. h. die Lösung der Gleichungen (6), die diese Bewegung darstellt, wird periodisch. In der Tat bleiben die Gleichungen (6) unverändert, wenn man φ_r ($r = 1, \dots, n$), t durch $-\varphi_r, 2\omega - t$ ersetzt, wo ω eine beliebige Konstante ist. Wenn also die Gleichungen $\varphi_r = \Phi_r(t)$ ($r = 1, \dots, n$) eine Lösung von (6) darstellen, so stellen die Gleichungen $\varphi_r = -\Phi_r(2\omega - t)$ ($r = 1, \dots, n$) ebenfalls eine dar. Wenn das Pendelsystem etwa für $t = 0$ und $t = \omega$ durch die Gleichgewichtslage geht, so ist

$$\Phi_r(0) = 0, \quad \Phi_r(\omega) = 0 \quad (r = 1, \dots, n),$$

und die Formeln

$$\begin{aligned} \varphi_r(t) &= \Phi_r(t) && \text{für } 0 \leq t \leq \omega, \\ \varphi_r(t) &= -\Phi_r(2\omega - t) && \text{für } \omega \leq t \leq 2\omega, \end{aligned} \quad (r = 1, \dots, n)$$

stellen eine periodische Lösung dar mit der Periode 2ω ; die Bewegung des Pendelsystems hat die y -Achse zur Symmetrieachse. Diese Bemerkung wird zum Existenzbeweis der periodischen Lösungen von (6) dienen.

Setzen wir nun²⁾

$$\varphi_r = \lambda \psi_r \quad (r = 1, \dots, n),$$

²⁾ Wir befolgen hier eine Methode des Herrn Perron: Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem, Monatsh. für Mathematik und Physik 43, S. 81.

wo λ ein Parameter ist, so gehen die Gleichungen (5) und (6) über in:

$$(7) \quad \sum_{v=1}^n [2 B_v \lambda^2 \psi_v' \sum_{k=1}^{v-1} b_k \cos \lambda(\psi_v - \psi_k) \cdot \psi_k' + \lambda^2 (A_v + J_v) \psi_v'^2] \\ = 2g \sum_{v=1}^n B_v \cos \lambda \psi_v + h$$

und

$$(8) \quad B_v \sum_{k=1}^{v-1} b_k [\cos \lambda(\psi_v - \psi_k) \cdot \psi_k'' + \lambda \sin \lambda(\psi_v - \psi_k) \cdot \psi_k'^2] + (A_v + J_v) \psi_v'' \\ + b_v \sum_{k=v+1}^n B_k [\cos \lambda(\psi_v - \psi_k) \cdot \psi_k'' + \lambda \sin \lambda(\psi_v - \psi_k) \cdot \psi_k'^2] \\ = -g B_v \psi_v + \lambda g B_v \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n-2} \psi_v^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Speziell für $\lambda = 0$ ist (8) ein lineares System:

$$(9) \quad B_v \sum_{k=1}^{v-1} b_k \psi_k'' + (A_v + J_v) \psi_v'' + b_v \sum_{k=v+1}^n B_k \psi_k'' = -g B_v \psi_v \\ (v = 1, \dots, n).$$

§ 2.

Die charakteristische Gleichung.

Um ein Fundamentalsystem von (9) zu finden, setzen wir

$$\psi_v = L_v e^{\rho t} \quad (v = 1, \dots, n)$$

ein, und nachdem wir den gemeinsamen Faktor beseitigt haben, erhalten wir die Bedingungen, die von L_v ($v = 1, \dots, n$) und ρ erfüllt werden müssen:

$$(10) \quad B_v \rho^2 \sum_{k=1}^{v-1} b_k L_k + [(A_v + J_v) \rho^2 + g B_v] L_v + b_v \rho^2 \sum_{k=v+1}^n B_k L_k = 0 \\ (v = 1, \dots, n).$$

Durch Elimination von L_v erhalten wir die charakteristische Gleichung des Systems:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} (A_1 + J_1) \rho^2 + g B_1 & b_1 B_2 \rho^2 & \dots & b_1 B_n \rho^2 \\ b_1 B_2 \rho^2 & (A_2 + J_2) \rho^2 + g B_2 & \dots & b_2 B_n \rho^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n \rho^2 & b_2 B_n \rho^2 & \dots & (A_n + J_n) \rho^2 + g B_n \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir

$$\rho^2 = \frac{g}{u},$$

so erhalten wir

$$(12) \quad \begin{vmatrix} A_1 + J_1 + B_1 u & b_1 B_2 & \dots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 + B_2 u & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n + J_n + B_n u \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist, weil die a_r , b_r , also auch die B_r positiv sind, eine verallgemeinerte Säkulargleichung, so daß alle Wurzeln dieser Gleichung reell sind³⁾.

Jetzt werden wir zeigen, daß alle Wurzeln von Gleichung (12) negativ sind.

Die Gleichung (12) kann in der Form

$$(13) \quad B_1 \dots B_n u^n + S_1 u^{n-1} + \dots + S_n = 0$$

geschrieben werden, wo S_r die Summe aller Hauptminoren r -ten Grades der Determinante

$$(14) \quad \begin{vmatrix} A_1 + J_1 & b_1 B_2 & \dots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n + J_n \end{vmatrix},$$

jeder mit einem positiven Faktor multipliziert, ist.

Um festzustellen, daß alle Wurzeln von Gleichung (13) negativ sind, genügt es zu zeigen, daß die Koeffizienten dieser Gleichung ≥ 0 sind und speziell S_n sogar > 0 . Diese Koeffizienten sind aber sicher ≥ 0 und S_n sogar > 0 , wenn die Determinante (14) positiv ist und alle ihre Hauptminoren ≥ 0 sind.

Zunächst werden wir zeigen, daß die Determinante

$$(15) \quad \begin{vmatrix} A_1 & b_1 B_2 & \dots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n \end{vmatrix},$$

die aus (14) durch Beseitigung von J_1, J_2, \dots, J_n hervorgeht, positiv ist und alle ihre Hauptminoren ≥ 0 sind.

Genau die gleiche Determinante (15) erhält man, wenn man die folgende

$$(15a) \quad \begin{vmatrix} a_1 \sqrt{m_1} & b_1 \sqrt{m_2} & b_1 \sqrt{m_3} & \dots & b_1 \sqrt{m_n} \\ 0 & a_2 \sqrt{m_2} & b_2 \sqrt{m_3} & \dots & b_2 \sqrt{m_n} \\ 0 & 0 & a_3 \sqrt{m_3} & \dots & b_3 \sqrt{m_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \sqrt{m_n} \end{vmatrix}$$

³⁾ Siehe Perron, Algebra Bd. II, 2. Aufl., Satz 13.

quadriert und dabei die Multiplikation zeilenweise durchführt. Daraus folgt, daß die Determinante (15) positiv ist.

Ein jeder Hauptminor der Determinante (15) hat die Form

$$(16) \quad \begin{vmatrix} A_p & b_p B_q & b_p B_r & \dots & b_p B_l \\ b_p B_q & A_q & b_q B_r & \dots & b_q B_l \\ b_p B_r & b_q B_r & A_r & \dots & b_r B_l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_p B_l & b_q B_l & b_r B_l & \dots & A_l \end{vmatrix} \quad (p < q < r < \dots < l).$$

Aber diese Determinante stellt genau das symbolische Quadrat derjenigen Matrix dar, die man aus (15a) erhält, wenn man nur die Zeilen mit den Nummern p, q, r, \dots, l beibehält; sie läßt sich also als Summe von lauter Quadraten darstellen. Daraus folgt, daß die Determinante (16) gewiß ≥ 0 ist.

Also sind alle Hauptminoren der Determinante (15) ≥ 0 .

Nun ist sofort zu sehen, daß die Determinante, die aus (16) durch Addition von nichtnegativen Gliedern J_1, J_2, \dots, J_n zu den Elementen ihrer Hauptdiagonale hervorgeht, ebenfalls ≥ 0 ist und speziell S_n sogar > 0 . Dazu genügt es, diese Determinante nach den J_ν ($\nu = 1, \dots, n$) zu entwickeln, wobei die verschiedenen Koeffizienten dieser Entwicklung entsprechend die Hauptminoren eines bestimmten Grades der Determinante (15) darstellen, die, wie oben gezeigt wurde, ≥ 0 sind.

Folglich besitzt die Gleichung (13) nur negative Wurzeln.

Gleichung (11) besitzt also nur rein imaginäre Wurzeln, die wir mit

$$\pm i\varrho_1, \dots, \pm i\varrho_n$$

bezeichnen. Wir nehmen an, daß sie alle voneinander verschieden sind.

Das System (9) hat das folgende Fundamentalsystem von Integralen:

$$\begin{aligned} \psi_{1\mu} &= L_{1\mu} e^{i\varrho_\mu t}, \quad \dots, \quad \psi_{n\mu} = L_{n\mu} e^{i\varrho_\mu t}, \\ \psi_{1\nu} &= L_{1\mu} e^{-i\varrho_\mu t}, \quad \dots, \quad \psi_{n\nu} = L_{n\mu} e^{-i\varrho_\mu t}, \end{aligned} \quad (\mu = 1, \dots, n; \quad \nu = \mu + n),$$

wo $L_{1\mu}, \dots, L_{n\mu}$ dem Gleichungssystem

$$(10a) \quad B_\nu \varrho_\mu^2 \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k L_{k\mu} + [(A_\nu + J_\nu) \varrho_\mu^2 - g B_\nu] L_{\nu\mu} + b_\nu \varrho_\mu^2 \sum_{k=\nu+1}^n B_k L_{k\mu} = 0$$

$$(\nu = 1, \dots, n)$$

genügen.

Folglich ist das allgemeine Integral des linearen Systems (9) folgendes:

$$(17) \quad \begin{cases} \psi_\nu = \sum_{\mu=1}^n L_{\nu\mu} (C_\mu \cos \varrho_\mu t + D_\mu \sin \varrho_\mu t), \\ \psi'_\nu = \sum_{\mu=1}^n L_{\nu\mu} (-C_\mu \varrho_\mu \sin \varrho_\mu t + D_\mu \varrho_\mu \cos \varrho_\mu t), \end{cases} \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Wir zeigen jetzt, daß die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{vmatrix}$$

verschieden von Null ist. In der Tat bilden die partikulären Integrale

$$L_{1\mu} e^{-i\varrho_\mu t}, \dots, L_{n\mu} e^{-i\varrho_\mu t}, L_{1\mu} e^{i\varrho_\mu t}, \dots, L_{n\mu} e^{i\varrho_\mu t}$$

gemeinsam mit den ersten Ableitungen nach t ein Fundamentalsystem der Gleichungen (9). Folglich ist die aus diesen Integralen gebildete Determinante

$$i^n \begin{vmatrix} L_{11} e^{-i\varrho_1 t} & \dots & L_{1n} e^{-i\varrho_n t} & L_{11} e^{i\varrho_1 t} & \dots & L_{1n} e^{i\varrho_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} e^{-i\varrho_1 t} & \dots & L_{nn} e^{-i\varrho_n t} & L_{n1} e^{i\varrho_1 t} & \dots & L_{nn} e^{i\varrho_n t} \\ -\varrho_1 L_{11} e^{-i\varrho_1 t} & \dots & -\varrho_n L_{1n} e^{-i\varrho_n t} & \varrho_1 L_{11} e^{i\varrho_1 t} & \dots & \varrho_n L_{1n} e^{i\varrho_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varrho_1 L_{n1} e^{-i\varrho_1 t} & \dots & -\varrho_n L_{nn} e^{-i\varrho_n t} & \varrho_1 L_{n1} e^{i\varrho_1 t} & \dots & \varrho_n L_{nn} e^{i\varrho_n t} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden. Wenn wir aber die gemeinsamen Faktoren dieser Determinante beseitigen, können wir durch Addition der $(n+1)$ -ten Spalte zur ersten Spalte, der $(n+2)$ -ten Spalte zur zweiten usw., leicht einsehen, daß die Determinante gleich

$$(2i)^n \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n \begin{vmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{vmatrix}^2 = (2i)^n \varrho_1 \dots \varrho_n \Delta^2$$

ist. Daraus folgt, daß die Determinante Δ von Null verschieden ist.

§ 3.

Periodische Lösungen durch die stabile Gleichgewichtslage.

Jetzt betrachten wir speziell das Partikulärintegral von (9)

$$(18) \quad \begin{cases} \psi_\nu = L_{\nu 1} \sin \varrho_1 t, \\ \psi'_\nu = L_{\nu 1} \varrho_1 \cos \varrho_1 t, \end{cases} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

mit den Anfangswerten

$$\psi_\nu(0) = 0, \quad \psi'_\nu(0) = L_{\nu 1} \varrho_1.$$

Das Integral von (8) mit den modifizierten Anfangswerten

$$\begin{aligned} \psi_\nu(0) &= 0, \\ \psi'_\nu(0) &= L_{\nu 1} \varrho_1 + \sum_{k=2}^n L_{\nu k} \varrho_k \alpha_k, \end{aligned} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

hat die Form

$$(19) \quad \begin{cases} \psi_v = \psi_v(t, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda), \\ \psi'_v = \psi'_v(t, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda), \end{cases}$$

wo die rechten Seiten sich nach Poincaré bekanntlich in Potenzreihen in bezug auf $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda$ entwickeln lassen.

Dabei ist

$$(20) \quad \begin{cases} \psi_v(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda) = 0, \\ \psi'_v(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda) = L_{v,1} \varrho_1 + \sum_{k=2}^n L_{v,k} \varrho_k \alpha_k, \end{cases} \quad (v = 1, \dots, n).$$

Aus (17) entnimmt man speziell für $\lambda = 0$

$$(21) \quad \psi_v(t, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0) = L_{v,1} \sin \varrho_1 t + \sum_{k=2}^n L_{v,k} \sin \varrho_k t \cdot \alpha_k.$$

Das Integral (18) hat die Periode $\frac{2\pi}{\varrho_1}$. Das Integral (19) wird für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|$ nach § 1 die modifizierte Periode $\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}$ haben, wenn

$$(22) \quad \psi_v\left(\frac{\pi + \delta}{\varrho_1}, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda\right) = 0 \quad (v = 1, \dots, n)$$

ist.

Es handelt sich nun darum zu zeigen, daß aus den n Gleichungen (22) die n Unbekannten $\delta, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sich eindeutig als Funktion von λ bestimmen lassen. Setzen wir $\omega_k = \frac{\pi \varrho_k}{\varrho_1}$, so werden für $t = 0$ die Potenzentwicklungen nach $\delta, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda$ der Gleichungen (22) mit Rücksicht auf (21) die folgenden sein:

$$(23) \quad -L_{v,1} \delta + \sum_{k=2}^n L_{v,k} \sin \omega_k \cdot \alpha_k + f_v = 0 \quad (v = 1, \dots, n),$$

wo die f_v Potenzentwicklungen nach $\lambda, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta$ darstellen. In f_v sind die Glieder ohne den Faktor λ wenigstens von zweiter Dimension.

Für $\lambda = 0$ haben die Gleichungen (23) die Lösung

$$\alpha_2 = \dots = \alpha_n = \delta = 0.$$

Um ihre Lösbarkeit für kleine Werte von $|\lambda|$ sicherzustellen, müssen wir ihre Funktionaldeterminante nach $\delta, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ für das Wertsystem $\delta = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \lambda = 0$ berechnen. Diese ist gleich

$$\Phi = \begin{vmatrix} -L_{1,1} & L_{1,2} \sin \omega_2 & \dots & L_{1,n} \sin \omega_n \\ -L_{2,1} & L_{2,2} \sin \omega_2 & \dots & L_{2,n} \sin \omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -L_{n,1} & L_{n,2} \sin \omega_2 & \dots & L_{n,n} \sin \omega_n \end{vmatrix}$$

oder

$$\Phi = -\sin \omega_1 \dots \sin \omega_n \cdot \begin{vmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{vmatrix} = -\sin \omega_1 \dots \sin \omega_n \cdot \Delta.$$

Dieser Wert ist verschieden von Null, wenn $\omega_1, \dots, \omega_n$ keine Multipla von π sind, wenn also f_1, \dots, f_n keine Multipla von ϱ_1 sind. Das ist also eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine Schar periodischer Lösungen existiert, deren Periode annähernd gleich $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ ist, d. h. für $\lambda \rightarrow 0$ gegen $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ konvergiert.

Durch Ersetzen von ϱ_1 durch $\varrho_2, \dots, \varrho_n$ erhalten wir auch noch $n-1$ Lösungsscharen, die ebenfalls von nur einem Parameter abhängen. Dabei muß vorausgesetzt werden, daß keine der Zahlen $\frac{\varrho_n}{\varrho_r}$ ganzzahlig ist.

§ 4.

Spezialfall $n = 2$.

Bei den in § 3 nachgewiesenen periodischen Bewegungen haben die Anfangsgeschwindigkeiten der einzelnen Pendelschwerpunkte die Vertikal-komponente Null; die Horizontalkomponente ist beim r -ten Pendel gleich

$$a_r \varphi'_r(0) + \sum_{k=1}^{r-1} b_k \varphi'_k(0) = \lambda [a_r \psi'_r(0) + \sum_{k=1}^{r-1} b_k \psi'_k(0)].$$

Wir wollen jetzt speziell im Fall $n = 2$ das Verhältnis der beiden Horizontalkomponenten und der beiden Winkelgeschwindigkeiten $\varphi'_1(0), \varphi'_2(0)$ zueinander genauer untersuchen, wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall des mathematischen Pendels (also $J_r = 0, a_r = b_r$) beschränken.

Die Gleichung (12) lautet dann, wenn man in jeder Zeile die gemeinsamen Faktoren unterdrückt:

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(a_1 + u) & a_2 m_2 \\ a_1 & a_2 + u \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$u_1 = -\frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2},$$

$$u_2 = -\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}$$

und

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{g}{-u_1}}, \quad \varrho_2 = \sqrt{\frac{g}{-u_2}}.$$

Außerdem ist

$$L_{1k} = a_2 + u_k, \quad L_{2k} = -a_1 \quad (k = 1, 2),$$

wobei wir einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor, der schließlich durch den Parameter λ absorbiert würde, unterdrückt haben.

Es ist $|u_1| < |u_2|$, daher $\varrho_1 > \varrho_2$. Daher kann gewiß ϱ_2 kein Vielfaches von ϱ_1 sein, und folglich existiert sicher die periodische Lösungsschar mit annähernd der Periode $\frac{2\pi}{\varrho_1}$. Im allgemeinen wird auch die zweite Lösungsschar mit annähernd der Periode $\frac{2\pi}{\varrho_2}$ existieren; das ist dann eine langsamere Schwingung als die erste. Nur in dem Ausnahmefall, daß $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ eine ganze Zahl ist, kann die Existenz der zweiten Schar nicht garantiert werden, also im Falle

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}} = \text{ganze Quadratzahl},$$

d. h.

$$\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 a_1 a_2} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1 a_1 a_2}{m_1 + m_2}} \right)} = \text{ganze Zahl}.$$

$\alpha)$ Schar periodischer Bewegungen abhängig von u_1 (die schnellere Schwingung).

Nach (20) ist

$$\psi'_1(0) = (a_2 + u_1) \varrho_1 + (a_2 + u_2) \varrho_2 \alpha_2,$$

$$\psi'_2(0) = -\alpha_1 \varrho_1 - a_1 \varrho_2 \alpha_2.$$

Da aber α_2 mit λ zugleich gegen Null geht, so ist

$$\varphi'_1(0) = \lambda \psi'_1(0) = \lambda (a_2 + u_1) \varrho_1 + o(\lambda),$$

$$\varphi'_2(0) = \lambda \psi'_2(0) = -\lambda a_1 \varrho_1 + o(\lambda),$$

wo $o(\lambda)$ das bekannte Größenordnungssymbol bezeichnet. [Richtig wäre auch $O(\lambda^2)$].

Dann erhalten wir für den Quotienten der Winkel φ_1^0 und φ_2^0 , welche für $\lambda \rightarrow 0$ und nach dem Anfangsmoment die beiden Pendel mit der positiven y -Achse bilden, folgende Ungleichungen:

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi'_1(0)}{\varphi'_2(0)} = \frac{\frac{a_1 - a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{a_1} \begin{cases} < 0, \\ > -\frac{a_2}{a_1}. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß in diesem Falle die beiden Pendel nach entgegengesetzter Richtung aus der Vertikalen herausgehen. Wenn $a_1 > a_2$ ist, dann $|\varphi_1^0| < |\varphi_2^0|$. Dagegen, wenn $a_1 < a_2$ ist, so ist $|\varphi_1^0| \geq |\varphi_2^0|$ möglich.

Um zu sehen, welche die Massen m_1 und m_2 der beiden Pendel gegen die Gleichgewichtslage haben, genügt es, das Verhältnis für $\lambda \rightarrow 0$ der Hori-

zontalkomponenten der Anfangsgeschwindigkeiten s_1^0 und s_2^0 , welche die Punkte m_1 und m_2 haben, zu untersuchen. Also

$$\frac{s_2^0}{s_1^0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_1 \varphi_1'(0)}{a_1 \varphi_1'(0) + a_2 \varphi_2'(0)} = \frac{a_2 + u_1}{u_1} < 0,$$

weil $u_1 < 0$ und

$$a_2 + u_1 = \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2} + \frac{a_2 - a_1}{2} > 0.$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß s_1^0 und s_2^0 entgegengesetzt sind, d. h. die Massen m_1 und m_2 gehen nach entgegengesetzten Seiten aus der Gleichgewichtslage heraus (Fig. 1).

β) Schar periodischer Bewegungen abhängig von u_2 (die langsamere Schwingung).

In derselben Weise wie in α) erhalten wir hier

$$\frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_2'(0)} = \frac{\frac{a_1 - a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{a_1} \begin{cases} < 1, \\ > 0. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß in diesem Falle die beiden Pendel nach gleichen Richtungen aus der Vertikalen und aus der Gleichgewichtslage herausgehen.

Außerdem ist auch

$$|\varphi_1^0| < |\varphi_2^0| \quad (\text{Fig. 2}).$$

Wenn die Masse m_1 im Verhältnis zu m_2 gering ist, dann sind φ_1^0 und φ_2^0 fast gleich. Wenn dagegen m_2 im Verhältnis zu m_1 gering ist und wenn $a_1 < a_2$, dann ist φ_1^0 im Verhältnis zu φ_2^0 sehr klein.

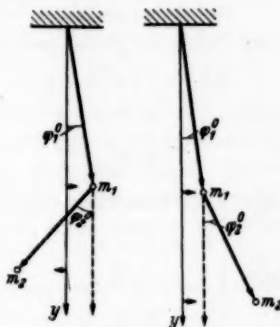


Fig. 1.

Fig. 2.

§ 5.

Periodische und asymptotische Bewegungen in der Nähe einer instabilen Gleichgewichtslage.

I. Periodische Bewegungen.

Jetzt werden wir untersuchen, ob periodische Bewegungen des Pendelsystems existieren können, bei denen einige Pendel nach oben gerichtet bleiben.

Allgemeiner Fall: p Pendel sind nach unten und q Pendel nach oben gerichtet, wobei $p + q = n$.

Wir setzen in den Gleichungen (6)

$$(24) \quad \begin{cases} \varphi_{rp} = \lambda \psi_{rp}, \\ \varphi_{rq} = \pi + \lambda \psi_{rq} \end{cases}$$

ein, wo r_p und r_q entsprechend p bzw. q verschiedene Werte annehmen, und erhalten

$$(25) \quad \varepsilon_r B_r \sum_{k=1}^{r-1} \varepsilon_k b_k [\cos \lambda (\psi_r - \psi_k) \cdot \psi_k'' + \lambda \sin \lambda (\psi_r - \psi_k) \cdot \psi_k'^2] + (A_r + J_r) \psi_r'' \\ + \varepsilon_r b_r \sum_{k=r+1}^n \varepsilon_k B_k [\cos \lambda (\psi_r - \psi_k) \cdot \psi_k'' + \lambda \sin \lambda (\psi_r - \psi_k) \cdot \psi_k'^2] \\ = \varepsilon_r \left[-g B_r \psi_r + \lambda g B_r \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n-3} \psi_r^{2n-1}}{(2n-1)!} \right],$$

wobei $\varepsilon_{rp} = 1$, $\varepsilon_{rq} = -1$. Das System (25) unterscheidet sich von (8) nur dadurch, daß b_r und B_r durch $\varepsilon_r b_r$ und $\varepsilon_r B_r$ ersetzt sind. Die weitere Behandlung ist daher analog. Speziell das lineare System (9) geht über in:

$$(26) \quad \varepsilon_r B_r \sum_{k=1}^{r-1} \varepsilon_k b_k \psi_k'' + (A_r + J_r) \psi_r'' + \varepsilon_r b_r \sum_{k=r+1}^n \varepsilon_k B_k \psi_k'' = -\varepsilon_r g B_r \psi_r.$$

Die charakteristische Gleichung (11) geht, wenn man noch die Spalten und Zeilen der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ multipliziert, über in:

$$(27) \quad \begin{vmatrix} (A_1 + J_1) \varrho^3 + \varepsilon_1 g B_1 & b_1 B_1 \varrho^3 & \dots & b_1 B_n \varrho^3 \\ b_1 B_2 \varrho^3 & (A_2 + J_2) \varrho^3 + \varepsilon_2 g B_2 & \dots & b_2 B_n \varrho^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n \varrho^3 & b_2 B_n \varrho^3 & \dots & (A_n + J_n) \varrho^3 + \varepsilon_n g B_n \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn man wieder $\frac{g}{\varrho^3} = u$ setzt:

$$(28) \quad \begin{vmatrix} A_1 + J_1 + \varepsilon_1 B_1 u & b_1 B_1 & \dots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 + \varepsilon_2 B_2 u & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n + J_n + \varepsilon_n B_n u \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von (12) nur dadurch, daß die Vorzeichen vor u in den Gliedern der Hauptdiagonale entsprechend geändert sind: p Vorzeichen sind positiv und q sind negativ.

Aber es kann sein, daß die Gleichung (28) nicht nur negative Wurzeln, sondern auch positive und imaginäre Wurzeln besitzt. Ich vermute, daß die Anzahl der negativen Wurzeln nur noch $p - 2k$ ist, wo k eine ganze Zahl ≥ 0 ist. Der Beweis scheint mir schwierig zu sein.

Ist p ungerade, so ist klar, daß wenigstens eine negative Wurzel der Gleichung (28) existiert. Denn das konstante Glied ist positiv und der höchste Koeffizient hat das Vorzeichen $(-1)^n = (-1)^{n-p}$. Die anderen Wurzeln dieser Gleichung können auch teils positiv reell, teils imaginär sein.

Wenn die charakteristische Gleichung (27) ein Paar konjugierter rein imaginärer Wurzeln $\pm i \varrho_k$ besitzt und wenn keine andere Wurzel ein ganzzahliges Multiplum von $i \varrho_k$ ist und wenn alle Wurzeln voneinander verschieden sind, so kann man zeigen, daß eine Schar von Schwingungen existiert, bei welchen alle n Pendel immer in einem Gebiet um die vertikale Lage bleiben und deren Periode nahezu gleich $\frac{2\pi}{\varrho_k}$ ist. Die Rechnung ist genau die gleiche wie in § 3. Insbesondere ergibt sich in Analogie zu der Formel (20) die folgende später zu benutzende Formel:

$$(29) \quad \begin{cases} \psi_v(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n, \lambda) = 0, \\ \psi'_v(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n, \lambda) = L_{v,k} \varrho_k + \sum_{\mu=1}^n L_{v,\mu} \varrho_\mu \alpha_\mu, \\ \quad (v = 1, \dots, n), \end{cases}$$

wo der Akzent der Σ' andeutet, daß bei der Summation nach μ der Wert $\mu = k$ auszulassen ist. Im übrigen mag die Wiederholung der Rechnung unterbleiben.

Sonderfall a: *Alle Pendel sind nach oben gerichtet.*

Hier ist $p = 0$ und $q = n$. Dann ist die Gleichung (28) die folgende:

$$(30) \quad \begin{vmatrix} A_1 + J_1 - B_1 u & b_1 B_2 & \dots & b_1 B_n \\ \cdot b_1 B_2 & A_2 + J_2 - B_2 u & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n + J_n - B_n u \end{vmatrix} = 0.$$

Sie besitzt, wie sich aus § 2 ergibt, nur positive Wurzeln. Folglich besitzt die charakteristische Gleichung (27) keine rein imaginäre Wurzel. Daher existiert in diesem Falle keine periodische Schwingung, also keine, bei der alle Pendel nach oben gerichtet und in einem Gebiet in der Nähe der instabilen Gleichgewichtslage bleiben⁴⁾.

Sonderfall b: *Ein beliebiges Pendel bleibt nach unten gerichtet, während alle übrigen Pendel nach oben gerichtet bleiben.*

Einfachheitshalber wollen wir annehmen, daß das n -te Pendel nach unten gerichtet bleibt.

Hier ist $p = 1$ und $q = n - 1$. Die Gleichung (28) ist die folgende

$$(31) \quad \begin{vmatrix} A_1 + J_1 - B_1 u & b_1 B_2 & \dots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 - B_2 u & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n + J_n + B_n u \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt wenigstens eine negative Wurzel (und, falls meine obige Vermutung zutrifft, auch *nur* eine). Also wird die charakteristische

⁴⁾ Siehe E. Picard, *Traité d'Analyse*, Bd. III, II. édition, S. 181—186

Gleichung für ϱ zwei konjugierte rein imaginäre Wurzeln $\pm i\varrho_k$ besitzen. Daraus folgt, daß, wenn keine andere Wurzel ein Multiplum von $i\varrho_k$ ist, also insbesondere, wenn meine Vermutung zutrifft, und wenn alle Wurzeln voneinander verschieden sind, eine Schar periodischer Lösungen existiert.

Sonderfall c: *Ein beliebiges Pendel ist nach oben, die übrigen sind nach unten gerichtet.*

Einfachheitshalber wollen wir auch annehmen, daß das n -te Pendel nach oben gerichtet ist.

Hier ist $p = n - 1$ und $q = 1$. Die Gleichung (28) ist die folgende:

$$(32) \quad \begin{vmatrix} A_1 + J_1 + B_1 u & b_1 B_2 & \dots & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + J_2 + B_2 u & \dots & b_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n & b_2 B_n & \dots & A_n + J_n - B_n u \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung hat offenbar wenigstens eine positive Wurzel, und diese ist, wenn meine Vermutung stimmt, die einzige positive Wurzel.

Es ist leicht einzusehen, daß bei einem geraden n unbedingt eine negative Wurzel existiert⁵⁾. Dann gibt es also ein Paar konjugierter rein imaginärer Wurzeln $\pm i\varrho_k$, und falls keine andere ein ganzzahliges Multiplum von $i\varrho_k$ ist und alle Wurzeln voneinander verschieden sind, existiert daher wenigstens eine Schar periodischer Schwingungen, bei welcher $n - 1$ Pendel nach unten gerichtet bleiben und eines nach oben. Die Anzahl solcher Scharen von Schwingungen kann höchstens $n - 1$ sein.

II. Asymptotische Bewegungen.

Jetzt wollen wir noch untersuchen, ob asymptotische Bewegungen des Pendelsystems in der Nähe einer instabilen Gleichgewichtslage existieren können.

Oben zeigten wir, daß, wenn p Pendel nach unten und q Pendel nach oben gerichtet sind ($p + q = n$), die charakteristische Gleichung (27) nicht nur rein imaginäre, sondern auch reelle und komplexe Wurzeln besitzen kann.

Wenn die Anzahl der nicht rein imaginären Wurzeln $2h$ ist, so haben h Wurzeln davon negative reelle Teile. Folglich kann man erwarten, daß in der Nähe der instabilen Gleichgewichtslage asymptotische Lösungen vorhanden sind, welche von h willkürlichen Konstanten abhängen. Um diese

⁵⁾ Wenn die Anzahl der Pendel ungerade ist, können die Längen und die Massen der Pendel vermutlich so gewählt werden, daß die Gleichung (32) keine einzige reelle negative Wurzel zuläßt. Wenigstens beim System von drei Pendeln konnte ich das einwandfrei feststellen.

Vermutung zu bestätigen, ist es bequemer, gar nicht den Parameter λ einzuführen, sondern die Rechnung direkt an die ursprünglichen Gleichungen (6) anzuschließen. Diese gehen durch die Substitution

$$\varphi_{rp} \rightarrow \varphi_{rp}, \quad \varphi_{rq} \rightarrow \pi + \varphi_{rq}$$

über in

$$(33) \quad \varepsilon, B, \sum_{k=1}^{r-1} \varepsilon_k b_k [\cos(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] + (A_r + J_r) \varphi_r'' \\ + \varepsilon, b, \sum_{k=r+1}^n \varepsilon_k B_k [\cos(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'' + \sin(\varphi_r - \varphi_k) \cdot \varphi_k'^2] = -\varepsilon_k g B, \sin \varphi_r,$$

wobei wieder $\varepsilon_{rp} = 1$, $\varepsilon_{rq} = -1$.

Das System (33) unterscheidet sich von (6) nur dadurch, daß die Größen b_r, B_r durch $\varepsilon, b_r, \varepsilon, B_r$ ersetzt sind.

Nun benutzen wir den folgenden Satz von Perron⁶⁾:

Wenn in dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{\nu k} x_k + f_\nu(x_1, \dots, x_n, t) \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

die Funktionen f_ν die Bedingungen A und B erfüllen und wenn die Wurzeln ϱ_ν ($\nu = 1, \dots, n$) der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

alle oder zum Teil einen negativen reellen Teil haben, so gibt es zu jedem Index l , für den $\Re(\varrho_l) < 0$ ist, Integralsysteme, für welche

$$\varlimsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\lg(|x_1| + \dots + |x_n|)}{t} = \Re(\varrho_l), \quad \text{also} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x_1 = 0, \dots, \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

und zwar bilden diejenigen, für welche

$$\varlimsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\lg(|x_1| + \dots + |x_n|)}{t} \leq -r < 0$$

ist, eine Schar mit genau h_1 willkürlichen Konstanten, wo h_1 die Anzahl derjenigen charakteristischen Wurzeln ϱ_r bezeichnet, für die $\Re(\varrho_r) \leq -r$ ist⁷⁾. Dabei sind auch mehrfache Wurzeln zugelassen und ihrer Vielfachheit entsprechend zu zählen.

⁶⁾ Perron, Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen, Math. Zeitschr. 29 (1929), S. 129, speziell Satz 11.

⁷⁾ Nach Lettenmeyer ist sogar der Limes schlechthin stets vorhanden, so daß \lim statt \varlimsup gesetzt werden kann. Vgl. Lettenmeyer: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen, Sitzungsber. der bayer. Akad. d. Wiss., math.-nat. Abteilung 1929, S. 201, speziell Satz 3.

Die Bedingung A ist erfüllt, wenn die Funktion $f(x_1, \dots, x_n, t)$ in einem Bereich der Gestalt

$$|x_1| \leq a, \dots, |x_n| \leq a, t \geq 0,$$

wo natürlich $a > 0$ ist, definiert und stetig ist und wenn sie daselbst der Ungleichung

$$|f(x_1, \dots, x_n, t)| \leq k(|x_1| + \dots + |x_n|)$$

genügt, wo k eine positive Konstante ist.

Die Bedingung B ist erfüllt, wenn die Funktion $f(x_1, \dots, x_n, t)$ so beschaffen ist, daß jeder positiven Zahl ε zwei positive Zahlen δ_ε und T_ε zugeordnet werden können derart, daß für

$$|x'_1| \leq \delta_\varepsilon, |x''_1| \leq \delta_\varepsilon, \dots, |x'_n| \leq \delta_\varepsilon, |x''_n| \leq \delta_\varepsilon, t \geq T_\varepsilon,$$

stets die Ungleichung

$$|f(x'_1, \dots, x'_n, t) - f(x''_1, \dots, x''_n, t)| \leq \varepsilon(|x'_1 - x''_1| + \dots + |x'_n - x''_n|)$$

gilt.

Um den Perronschen Satz auf das System (33) anwenden zu können, lösen wir dieses nach den zweiten Ableitungen auf. Die dabei auftretende Nennerdeterminante ist speziell für $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_n = 0$ identisch mit der Determinante, die aus (14) entsteht, wenn man die Zeilen und Spalten der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ multipliziert. Sie ist also für hinreichend kleine Werte von $|\varphi_1|, \dots, |\varphi_n|$ von Null verschieden. Daher ist die Auflösung nach den zweiten Ableitungen möglich und die bei der Auflösung entstehenden rechten Seiten lassen sich nach Potenzen von $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi'_1, \dots, \varphi'_n$ entwickeln. Setzt man noch $\varphi'_v = \Phi_v$, so nimmt das System schließlich die Form an:

$$(34) \quad \begin{cases} \Phi'_v = \sum_{k=1}^n a_{v,k} \varphi_k + f_v(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \Phi_1, \dots, \Phi_n), \\ \varphi'_v = \Phi_v, \end{cases} \quad (v = 1, \dots, n)$$

wo die $f_v(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ Potenzreihen von $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ sind, die mit Gliedern mindestens zweiter Dimension beginnen. Also genügt f_v den Bedingungen A und B.

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$(35) \quad \begin{vmatrix} -\varrho & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\varrho & a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & -\varrho & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & -\varrho \end{vmatrix} = 0$$

oder nach trivialer Reduktion:

$$(36) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho^2 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \varrho^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist nun aber in Wahrheit dieselbe Gleichung wie (27), weil das System (26) durch Auflösung nach den zweiten Ableitungen und durch die Substitution $\psi_r = \varphi_r$, $\psi'_r = \Phi_r$ gerade in das System (34) mit denselben a_{rk} , aber ohne die Glieder f_r übergeht.

Auf (33) kann man jetzt den Perronschen Satz (mit $2n$ an Stelle von n) anwenden, wobei man noch den Vorteil hat, daß die f_r von t unabhängig sind. Er garantiert unmittelbar die Existenz einer Schar asymptotischer Lösungen des Pendelsystems in der Nähe der instabilen Gleichgewichtslage, welche von h Konstanten abhängig ist.

Unter gewissen Voraussetzungen (die nur ausnahmsweise nicht erfüllt sind) läßt sich das asymptotische Verhalten der Lösungen noch genauer beschreiben. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

Fall A. Sind $\varrho_1, \dots, \varrho_h$ charakteristische Wurzeln mit negativem reellen Teil (es brauchen nicht alle zu sein, im Gegensatz zu der Bedeutung von h auf S. 194), so werde vorausgesetzt, daß

$$(37) \quad p_1 \varrho_1 + \dots + p_h \varrho_h \neq \varrho_r \quad (r = 1, \dots, h),$$

$$(37a) \quad p_1 \varrho_1 + \dots + p_h \varrho_h \neq \varrho_k \quad (k = h+1, \dots, 2n)$$

ist für jedes System ganzer nicht negativer Zahlen p_r , deren Summe ≥ 2 ist.

Bezeichnet man von den Wurzeln $\varrho_1, \dots, \varrho_h$ speziell die reellen negativen mit $-\xi_k$ ($k = 1, \dots, g$) und die komplexen mit negativen reellen Teilen mit $-\xi_k \pm i\eta_k$ ($k = g+1, \dots, \frac{h+g}{2}$), dann lassen sich nach Picard⁶⁾ die Lösungen in folgender Gestalt:

$$(38) \quad \begin{cases} \varphi_{r_p} = \sum_{k=1}^g L_{r_p k} C_k e^{-\xi_k t} + \sum_{k=g+1}^{\frac{h+g}{2}} L_{r_p k} (C_k \cos \eta_k t + D_k \sin \eta_k t) e^{-\xi_k t} + F_{r_p}, \\ \varphi_{r_q} = \pi + \sum_{k=1}^g L_{r_q k} C_k e^{-\xi_k t} + \sum_{k=g+1}^{\frac{h+g}{2}} L_{r_q k} (C_k \cos \eta_k t + D_k \sin \eta_k t) e^{-\xi_k t} + F_{r_q} \end{cases}$$

darstellen, wo r_p und r_q entsprechend p bzw. q ($p+q=n$) verschiedene Werte annehmen und F_r Potenzentwicklungen nach

$$C_1 e^{-\xi_1 t}, \dots, C_{g+1} \cos \eta_{g+1} t e^{-\xi_{g+1} t}, \dots, D_{g+1} \sin \eta_{g+1} t e^{-\xi_{g+1} t}, \dots$$

sind, die mit Gliedern mindestens zweiter Dimension beginnen.

⁶⁾ Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, II. édition S. 187.

Wenn in der zweiten Summe der Gleichungen (38) alle Konstanten C_k und D_k durch Null ersetzt werden, bekommen wir eine von g Konstanten abhängige Schar von Lösungen, bei welchen das Pendelsystem für $t \rightarrow \infty$ sich der instabilen Gleichgewichtslage nähert, indem jedes Pendel immer auf der gleichen Seite seiner Vertikalen bleibt und die Bewegung dauernd gegen die Vertikale hin gerichtet bleibt.

Dagegen wenn die zweite Summe wenigstens ein Glied hat, so nähert sich das Pendelsystem zwar ebenfalls asymptotisch der instabilen Gleichgewichtslage. Die Pendel führen dabei aber Zitterbewegungen aus, indem sie sich zeitweise gegen die Vertikale hin, zeitweise auch von ihr weg bewegen. Wenn jedes ξ_k der zweiten Summe größer ist als jedes ξ_k der ersten Summe, so bleiben die Pendel dauernd auf der gleichen Seite ihrer Vertikalen; wenn aber ein ξ_k der zweiten Summe kleiner ist als jedes ξ_k der ersten Summe, so entstehen gedämpfte Schwingungen um die Vertikale.

Fall B. Wenn die reellen Teile der charakteristischen Wurzeln alle voneinander verschieden sind, dann kann man aus Satz 12 der erwähnten Arbeit von Perron entnehmen⁹⁾, daß es zu jeder Wurzel ρ_k mit negativem reellem Teil eine Schar von Lösungen gibt, für die

$$(39) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_\nu(t) = 0 & (\nu = 1, \dots, n), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_1 : \varphi_2 : \dots : \varphi_n) = L_{1k} : L_{2k} : \dots : L_{nk}. \end{cases}$$

Die Anzahl der willkürlichen Konstanten dieser Schar ist gleich der Anzahl derjenigen charakteristischen Wurzeln, deren reeller Teil $\leq \Re(\rho_k)$ ist.

§ 6.

Spezialfall $n = 2$.

Wir wollen auch hier speziell $n = 2$ untersuchen und uns der Einfachheit halber auf den Fall des mathematischen Pendels beschränken.

a) *Alle zwei Pendel bleiben nach oben gerichtet.*

Die Gleichung (30) lautet dann, wenn man in jeder Zeile die gemeinsamen Faktoren unterdrückt,

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(a_1 - u) & a_2 m_2 \\ a_1 & a_2 - u \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}, \\ u_2 &= \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}. \end{aligned}$$

⁹⁾ Für die Anwendung von Satz 12 ist zunächst eine lineare Transformation erforderlich.

also $u_1 > u_2 > 0$. Die charakteristische Gleichung hat nur reelle Wurzeln, von denen zwei negativ sind:

$$-\xi_1 = -\sqrt{\frac{g}{u_1}}, \quad -\xi_2 = -\sqrt{\frac{g}{u_2}} \quad (-\xi_2 < -\xi_1).$$

Daraus folgt, daß hier eine Schar *reiner* asymptotischer Bewegungen existiert, welche von zwei Konstanten abhängig ist, indem jedes Pendel bei diesen Bewegungen immer auf der gleichen Seite seiner Vertikalen bleibt. Hier existiert keine einzige periodische Lösung.

Wir wollen nun für $t \rightarrow \infty$ das Verhältnis der Abweichungen der beiden Pendel von ihrer Vertikalen $\varphi_1^\infty, \varphi_2^\infty$ und von der Gleichgewichtslage s_1^∞, s_2^∞ genauer untersuchen, wobei wir die bei Fall B, Seite 198 angeführten Tatsachen benutzen.

Hier ist

$$L_{1\mu} = a_2 - u_\mu, \quad L_{2\mu} = -a_1 \quad (\mu = 1, 2),$$

wobei wir einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor wieder unterdrückt haben.

α) Schar asymptotischer Bewegung abhängig von ξ_1 .

Da $-\xi_1$ die größere der beiden negativen Wurzeln ist, enthält die zugehörige Schar zwei willkürliche Konstanten.

Nach (39) erhalten wir für den Quotienten der Winkel, welche für $t \rightarrow \infty$ die beiden Pendel mit der negativen J -Achse bilden, folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1^\infty}{\varphi_2^\infty} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = \frac{u_1 - a_2}{a_1} \\ &= \frac{\frac{a_1 - a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{a_1} \begin{cases} < 1, \\ > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel auf der gleichen Seite ihrer Vertikalen liegen.

Außerdem ist

$$|\varphi_1^\infty| < |\varphi_2^\infty| \quad (\text{Fig. 3}).$$

Wenn noch ξ_2 kein Multiplum von ξ_1 ist, lassen sich nach (38) die Winkel φ_1, φ_2 durch folgende Formel

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= C_1(a_2 - u_1)e^{-\xi_1 t} + C_2(a_2 - u_2)e^{-\xi_2 t} + F_1(C_1 e^{-\xi_1 t}, C_2 e^{-\xi_2 t}), \\ \varphi_2(t) &= -C_1 a_1 e^{-\xi_1 t} - C_2 a_1 e^{-\xi_2 t} + F_2(C_1 e^{-\xi_1 t}, C_2 e^{-\xi_2 t}) \end{aligned}$$

ausdrücken, wo die $F_r(C_1 e^{-\xi_1 t}, C_2 e^{-\xi_2 t})$ wieder Potenzreihen sind, die mit Gliedern mindestens zweiter Dimension beginnen.



Fig. 3.

β) Schar asymptotischer Bewegung abhängig von ξ_2 .

Da $-\xi_2$ die kleinste negative Wurzel ist, enthält die zugehörige Schar nur eine willkürliche Konstante.

Hier ist

$$\frac{\varphi_1^\infty}{\varphi_2^\infty} = \frac{u_2 - a_2}{a_1} = \frac{\frac{a_1 - a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{a_1} \begin{cases} > -\frac{a_2}{a_1}, \\ < 0. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel sich auf entgegengesetzten Seiten ihrer Vertikalen befinden. Wenn $a_1 > a_2$, dann ist stets $|\varphi_1^\infty| < |\varphi_2^\infty|$. Für $a_1 < a_2$ sind dagegen die beiden Fälle $|\varphi_1^\infty| \geq |\varphi_2^\infty|$ möglich.

Um zu sehen, welche Lage die beiden Pendel gegen die instabile Gleichgewichtslage haben, müssen wir den Quotienten $\frac{a_1 \varphi_1^\infty}{a_1 \varphi_1^\infty + a_2 \varphi_2^\infty}$ untersuchen.

Er ist gleich

$$\frac{u_2 - a_2}{u_2}, \text{ also } < 0,$$

weil $u_2 > 0$ und

$$u_2 - a_2 = \frac{a_1 - a_2}{2}$$

$$- \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2} < 0.$$

Das besagt, daß die beiden Pendel sich von entgegengesetzten Seiten der Gleichgewichtslage nähern (Fig. 4).

Diesmal lassen sich nach (38) die Winkel φ_1, φ_2 durch folgende Formel

$$\varphi_1(t) = C_2(a_2 - u_2)e^{-\xi_2 t} + F_1(C_2 e^{-\xi_2 t}),$$

$$\varphi_2(t) = -C_2 a_1 e^{-\xi_2 t} + F_2(C_2 e^{-\xi_2 t})$$

ausdrücken, weil bei diesem Fall die Bedingungen (37) und (37a) erfüllt sind.

b) Ein Pendel nach unten, das andere Pendel nach oben.

1. Erstes Pendel nach unten.

Die Gleichung (32) lautet jetzt

$$\left| \begin{matrix} (m_1 + m_2)(a_1 + u) & a_2 m_2 \\ a_1 & a_2 - u \end{matrix} \right| = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$u_1 = -\frac{a_1 - a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2},$$

$$u_2 = -\frac{a_1 - a_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2},$$



Fig. 4

also $u_1 > 0$, $u_2 < 0$. Die charakteristische Gleichung hat also eine negative Wurzel $\varrho_1 = -\xi_1 = -\sqrt{\frac{g}{u_1}}$ und ein Paar rein imaginärer Wurzeln $\pm i\varrho_2 = \pm \sqrt{\frac{g}{-u_2}}$.

Außerdem ist

$$L_{1\mu} = a_2 - u_\mu, \quad L_{2\mu} = -a_1 \quad (\mu = 1, 2),$$

wobei wir einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor wieder unterdrückt haben.

a) Schar asymptotischer Bewegungen abhängig von u_1 .

Hier können wir das bei Fall B Gesagte nicht benutzen, weil die reellen Teile teilweise einander gleich, nämlich gleich Null sind. Dagegen führt der in Fall A angegebene Picardsche Satz zum Ziel, und zwar zeigt die negative Wurzel an, daß wir eine Schar von rein asymptotischen Bewegungen haben werden, welche von einer Konstanten abhängig ist, d. h. solche Bewegungen, bei welchen jedes Pendel immer auf der gleichen Seite seiner Vertikalen bleibt.

Nach (38) ist

$$\varphi_1(t) = C_1(a_2 - u_1)e^{-\xi_1 t} + F_1(C_1 e^{-\xi_1 t}),$$

$$\varphi_2(t) = -C_1 a_1 e^{-\xi_1 t} + F_2(C_1 e^{-\xi_1 t}).$$

Daher erhalten wir die Ungleichungen

$$\frac{\varphi_1^\infty}{\varphi_2^\infty} = \frac{u_1 - a_2}{a_1} = \frac{-\frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{a_1} \begin{cases} < 0, \\ > -1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel nach der gleichen Seite von ihren Vertikalen abweichen.

Außerdem ist

$$|\varphi_1^\infty| < |\varphi_2^\infty| \quad (\text{Fig. 5}).$$

β) Schar periodischer Bewegungen abhängig von u_2 .

Das rein imaginäre Wurzelpaar $\pm i\varrho_2$ hat zur Folge, daß eine einparametrische Schar periodischer Bewegungen existiert, weil $-\frac{\varrho_1}{i\varrho_2}$ imaginär, also keine ganze Zahl ist.

Wir wollen jetzt untersuchen, bei welchem Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten $\varphi_1'(0) = \lambda \psi_1'(0)$ und $\varphi_2'(0) = \lambda \psi_2'(0)$ periodische Bewegungen stattfinden.



Fig. 5.

Hier ist nach (29)

$$\psi'_1(0) = (a_2 - u_2) \varrho_2 + (a_2 - u_1) \varrho_1 \alpha_1,$$

$$\psi'_2(0) = -a_1 \varrho_2 - a_1 \varrho_1 \alpha_1.$$

Da aber α_1 mit λ zugleich gegen Null geht, so ist

$$\varphi'_1(0) = \lambda \psi'_1(0) = \lambda (a_2 - u_2) \varrho_2 + o(\lambda),$$

$$\varphi'_2(0) = \lambda \psi'_2(0) = -\lambda \alpha_1 \varrho_2 + o(\lambda).$$

Dann erhalten wir folgende Ungleichungen:

$$\frac{\varphi'_1}{\varphi'_2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda \psi'_1(0)}{\lambda \psi'_2(0)} = -\frac{a_2 - u_2}{a_1} = -\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2}}{a_1}$$

$$\begin{cases} < -1, \\ > -\frac{a_1 + a_2}{a_1}. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel nach der gleichen Seite aus der Vertikalen herausgehen. Außerdem ist

$$|\varphi'_1| > |\varphi'_2|, \quad |\varphi'_1| < \frac{a_1 + a_2}{a_1} |\varphi'_2|.$$

Die Lage ist also wie in Fig. 5, nur daß hier $|\varphi'_1| > |\varphi'_2|$.

2. Erstes Pendel nach oben.

Die Gleichung (30) lautet diesmal

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(a_1 - u_1) & a_2 m_2 \\ a_1 & a_2 + u \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$u_1 = -\frac{a_2 - a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2},$$

$$u_2 = -\frac{a_2 - a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 a_2},$$

also $u_1 > 0$, $u_2 < 0$. Die charakteristische Gleichung hat wieder eine negative

Wurzel $\varrho_1 = -\xi_1 = -\sqrt{\frac{g}{u_1}}$ und ein Paar rein imaginärer Wurzeln

$$\pm i \varrho_2 = \pm \sqrt{\frac{g}{u_2}}.$$

Außerdem ist

$$L_{1\mu} = a_2 + u_\mu, \quad L_{2\mu} = -a_1 \quad (\mu = 1, 2).$$

a) Schar asymptotischer Bewegungen abhängig von u_1 .

Die negative Wurzel ϱ_1 beweist, daß wir eine Schar von rein asymptotischen Bewegungen haben, welche von einer Konstanten abhängig ist.

In derselben Weise wie in 1., α) erhalten wir

$$\frac{\varphi_1^\infty}{\varphi_2^\infty} = -\frac{a_2 + u_1}{a_1} \begin{cases} > -\frac{a_1 + a_2}{2}, \\ < -1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel nach der gleichen Seite von ihrer Vertikalen abweichen; außerdem ist

$$\begin{aligned} |\varphi_1^\infty| &> |\varphi_2^\infty|, \\ |\varphi_1^\infty| &< \frac{a_1 + a_2}{a_1} |\varphi_2^\infty| \quad (\text{Fig. 6}). \end{aligned}$$

β) Schar periodischer Bewegungen abhängig von u_2 .

Das rein imaginäre Wurzelpaar $\pm i\varrho_2$ beweist, daß gewiß eine Schar periodischer Bewegungen existiert, welche von einem Parameter abhängt, weil $-\frac{\varrho_1}{i\varrho_2}$ imaginär, also nicht ganzzahlig ist.

In derselben Weise wie in 1., β) erhalten wir hier

$$\frac{\varphi_1^\pi}{\varphi_2^\pi} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda \varphi_1'(0)}{\lambda \varphi_2'(0)} = -\frac{a_2 + u_2}{a_1} \begin{cases} < 0, \\ > -1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß die beiden Pendel nach der gleichen Seite aus der Vertikalen herausgehen, d. h. die Winkel φ_1^π und φ_2^π sind entgegengesetzt und

$$|\varphi_1^\pi| < |\varphi_2^\pi|.$$

Die Figur ist hier dieselbe wie Fig. 6, nur daß $|\varphi_1^\pi| < |\varphi_2^\pi|$ ist.



Fig. 6.

(Eingegangen am 3. 7. 1938.)

Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität.

Von

H. Behnke und K. Stein in Münster (Westf.).

Die Möglichkeit der Kennzeichnung von Regularitätsbereichen durch die Eigenschaft der Regulärkonvexität, die der Ausgangspunkt mancher Untersuchungen über die Singularitäten analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen war, legte den Versuch nahe, die Meromorphiebereiche durch eine analoge Eigenschaft zu charakterisieren. So entstand der Begriff der Meromorphiekonvexität. Ein Bereich \mathfrak{B} heißt bekanntlich meromorph-konvex, wenn es zu jedem ganz im Innern von \mathfrak{B} gelegenen Teilbereich \mathfrak{B}_0 einen ebenfalls ganz im Innern von \mathfrak{B} gelegenen Teilbereich \mathfrak{B}'_0 gibt, so daß zu jedem außerhalb von \mathfrak{B}'_0 liegenden Punkt P aus \mathfrak{B} eine in \mathfrak{B} eindeutige meromorphe und in \mathfrak{B}_0 beschränkte Funktion f_P existiert, für die gilt:

$$|f_P(P)| > \text{Max } |f_P(\mathfrak{B}_0)|.$$

Es gelang bisher nur, die Meromorphiekonvexität als hinreichende Bedingung für Meromorphiebereiche nachzuweisen. Wir zeigen in dieser Arbeit, daß die Meromorphiekonvexität eines Bereiches im Raume endlich vieler komplexer Veränderlichen über die Regulärkonvexität nicht hinausführt: Jeder beschränkte, schlichte meromorph-konvexe Bereich im Raum der z_1, \dots, z_n ist Regularitätsbereich.

Das gelingt vor allem durch den Nachweis, daß jeder Bereich, der von innen durch Regularitätsbereiche approximiert werden kann, selbst ein Regularitätsbereich ist. (Der Bereich \mathfrak{B} ist approximierbar durch eine Folge von Bereichen \mathfrak{B}_n , oder die Folge der Bereiche \mathfrak{B}_n konvergiert gegen \mathfrak{B} , wenn jeder Punkt von \mathfrak{B} samt einer Umgebung in fast allen \mathfrak{B}_n und jeder Punkt außerhalb \mathfrak{B} samt einer Umgebung in höchstens endlich vielen \mathfrak{B}_n liegt.) Ein Beweis für diese Tatsache wird seit längerer Zeit gesucht¹⁾. Nun hat Herr K. Oka in seinen Arbeiten über das erste Cousinsche Problem eine neue Methode zum Nachweis der Entwickelbarkeit von Funktionen in gewissen Bereichen angegeben²⁾, die wir für den im folgenden geführten Beweis grundlegend benutzen

¹⁾ Vgl. H. Behnke und P. Thullen, Das Konvergenzproblem der Regularitäts-hüllen, Math. Annalen 108, S. 93.

²⁾ Kiyosi Oka, I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, (A) 6, Nr. 3 (1936). II. Domaines d'holomorphie, (A) 7, Nr. 2 (1937). Beides: Journal of Science of the Hiroshima University.

(siehe Hilfssatz 2). Wir sind so in der Lage, zu einer Folge von Regularitätsbereichen \mathfrak{B}_n , die gegen einen Grenzbereich \mathfrak{B} von innen konvergieren, eine zweite, gegen \mathfrak{B} von innen konvergierende Folge von Regularitätsbereichen \mathfrak{C}_n anzugeben, die alle konvex sind in bezug auf eine Klasse von in ganz \mathfrak{B} regulären Funktionen³⁾. Dann aber folgt aus einem früheren Resultat von Behnke und Thullen, daß \mathfrak{B} Regularitätsbereich ist.

Es ist daraufhin leicht, sich von der Voraussetzung, daß die \mathfrak{B}_n Teilbereiche von \mathfrak{B} sind, zu befreien und allgemein zu zeigen, daß der Grenzbereich einer konvergenten Folge von Regularitätsbereichen wieder ein Regularitätsbereich ist.

Dabei kann der Sonderfall, daß unendlich viele \mathfrak{B}_n den Bereich \mathfrak{B} enthalten, außer Betracht bleiben, denn in diesem Falle ist es seit der Aufstellung des Begriffes der Regularitätskonvexität evident, daß \mathfrak{B} Regularitätsbereich ist. Soweit der erste Abschnitt der vorliegenden Arbeit!⁴⁾

Im zweiten Paragraphen werden aus diesen Überlegungen die für die „Hüllenfunktion“ $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ sich ergebenden Konsequenzen gezogen. (Unter $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ verstehen wir wie üblich die einem Bereich \mathfrak{B} eindeutig zugeordnete Regularitätshülle.) Für $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ war bekannt: Besitzt \mathfrak{B} keine Nebenhülle $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$, so konvergieren die Hüllen jeder Folge von Bereichen, die \mathfrak{B} umfassen und \mathfrak{B} approximieren, gegen $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$. Beschränken wir uns auf Bereiche mit schlichten Hüllen, so können wir darüber hinaus folgendes beweisen: Besitzt der Bereich \mathfrak{B} keine Nebenhülle, so konvergieren die Hüllen jeder \mathfrak{B} approximierenden Folge von Bereichen \mathfrak{B}_n gegen $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$. Weist dagegen \mathfrak{B} eine Nebenhülle auf, so zeigen wir an einem Beispiel, daß die $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n)$ nicht zu konvergieren brauchen. Als Grenzbereiche von konvergierenden Teilfolgen der $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n)$ können Regularitätsbereiche auftreten, die zwischen $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$ liegen. Deren kann es mehrere geben. Die Hüllenfunktion $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ ist also dann und nur dann für den Bereich \mathfrak{A} „stetig“, wenn \mathfrak{B} keine Nebenhülle besitzt.

³⁾ Der grundlegende Begriff der Konvexität in bezug auf Mengen von Funktionen ist zuerst von H. Cartan in seiner Arbeit: *Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes*, Bull. Soc. Math. France 59 (1931), eingeführt worden. Im übrigen vergleiche man zu den hier und im folgenden auftretenden nicht neu definierten Begriffen H. Behnke und P. Thullen, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen* (Abgekürzt B.-Th. Bericht), Erg. d. Math. u. i. Grenzgeb. III, 3.

⁴⁾ Bei der ersten Korrektur sind die Sätze dieses Abschnittes von 2 auf N Verändliche verallgemeinert und dazu die Beweise umgestellt worden. Die Möglichkeit der Verallgemeinerung ergab sich in einer ausführlichen Diskussion mit Herrn Henri Cartan gelegentlich eines Vortragsbesuchs im Mai 1938 in Münster. Wir sind Herrn Cartan für das rege Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, sehr dankbar.

Unsere Überlegungen zeigen insbesondere, daß es zu der bei der Approximation eines Bereiches von außen auftretenden Erscheinung der Nebenhülle kein Analogon bei einer Approximation von innen gibt.

Im Abschnitt 3 zeigen wir, daß jeder meromorph-konvexe Bereich von innen durch Regularitätsbereiche approximiert werden kann. Auf Grund der Ergebnisse des Paragraphen 1 folgt, daß jeder meromorph-konvexe Bereich Regularitätsbereich ist. Hieraus ergibt sich auch, daß die Konvexität in bezug auf analytische Flächen mit der Regulärkonvexität äquivalent ist.

§ 1.

Bereiche, die sich von innen durch Regularitätsbereiche approximieren lassen.

Wir beweisen

Satz 1. *Ist der schlichte, beschränkte Bereich \mathfrak{B} approximierbar durch Regularitätsbereiche \mathfrak{B}_n mit $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1}$, so ist \mathfrak{B} Regularitätsbereich.*

Dabei bedeutet:

1. $\mathfrak{B} \subset \subset \mathfrak{C}$: \mathfrak{B} „ganz enthalten in“ \mathfrak{C} , daß die Häufungspunkte aller Folgen P_n aus \mathfrak{B} im Innern von \mathfrak{C} liegen.
2. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$: \mathfrak{B} ist Teilbereich von \mathfrak{C} .

Satz 1 beweisen wir zunächst unter speziellen Voraussetzungen.

Hilfssatz 1. *Ist unter den Voraussetzungen von Satz 1 für jedes n jede in \mathfrak{B}_n reguläre Funktion durch in \mathfrak{B}_{n+1} reguläre Funktionen gleichmäßig im Innern von \mathfrak{B}_n approximierbar, so ist \mathfrak{B} Regularitätsbereich**).*

Um zunächst zu zeigen, daß die \mathfrak{B}_n konvex sind in bezug auf die Klasse der in \mathfrak{B} regulären Funktionen, wählen wir irgendeinen ganz im Innern von \mathfrak{B}_n gelegenen Teilbereich \mathfrak{B}_n^* . Da \mathfrak{B}_n Regularitätsbereich ist, gibt es einen \mathfrak{B}_n^* umfassenden, aber noch ganz in \mathfrak{B}_n gelegenen Bereich \mathfrak{D}_n , so daß zu jedem P aus \mathfrak{B}_n aber außerhalb \mathfrak{D}_n eine Funktion f_n existiert, die in \mathfrak{B}_n regulär ist und für die gilt

$$|f_n(P)| > \text{Max } |f_n(\mathfrak{B}_n^*)|.$$

Es sei weiter \mathfrak{C}_n ein ganz im Innern von \mathfrak{B}_n gelegener Bereich, der \mathfrak{D}_n und außerdem den Punkt P umfaßt. Ferner sei $\delta > 0$ eine Zahl, für die noch gilt

$$(1) \quad |f_n(P)| > \text{Max } |f_n(\mathfrak{B}_n^*)| + \delta.$$

Wir wählen eine Folge positiver Zahlen ε_r mit

$$\sum_r \varepsilon_r < \frac{\delta}{2}.$$

**) Gleichmäßige Konvergenz im Innern eines Bereiches \mathfrak{D} bedeutet gleichmäßige Konvergenz in jedem ganz im Innern von \mathfrak{D} gelegenen, abgeschlossenen Teilbereich von \mathfrak{D} .

Nach Voraussetzung können wir jetzt in \mathfrak{E}_n die Funktion f_n durch in \mathfrak{B}_{n+1} reguläre Funktionen gleichmäßig approximieren. Es sei $f_{n,1}$ eine in \mathfrak{B}_{n+1} reguläre Funktion, für die gilt

$$|f_{n,1} - f_n| < \varepsilon_1 \text{ in } \mathfrak{E}_n.$$

Weiter gibt es nach Voraussetzung eine in \mathfrak{B}_{n+2} reguläre Funktion, so daß

$$|f_{n,2} - f_{n,1}| < \varepsilon_2 \text{ in } \mathfrak{B}_n.$$

Allgemein lassen sich Funktionen $f_{n,r}$ in \mathfrak{B}_{n+r-2} so wählen, daß gilt

$$|f_{n,r} - f_{n,r-1}| < \varepsilon_r \text{ in } \mathfrak{B}_{n+r-2} \quad (r \geq 2).$$

Die Folge $f_{n,r}$ konvergiert gleichmäßig im Innern von \mathfrak{B} gegen eine dort reguläre Funktion f . In \mathfrak{E}_n ist

$$f - f_n = (f_{n,1} - f_n) + (f_{n,2} - f_{n,1}) + \dots$$

Also gilt dort

$$|f - f_n| \leq |f_{n,1} - f_n| + |f_{n,2} - f_{n,1}| + \dots,$$

$$|f - f_n| < \sum \varepsilon_r < \frac{\delta}{2},$$

mithin

$$|f| - \frac{\delta}{2} < |f_n| < |f| + \frac{\delta}{2}.$$

In Verbindung mit (1) folgt nun

$$|f(P)| + \frac{\delta}{2} > \text{Max } |f(\mathfrak{B}_n^*)| - \frac{\delta}{2} + \delta,$$

also

$$(2) \quad |f(P)| > \text{Max } |f(\mathfrak{B}_n^*)|.$$

\mathfrak{B}_n^* war beliebig in \mathfrak{B}_n gewählt und P beliebig in \mathfrak{B}_n außerhalb \mathfrak{D}_n . Also sagt (2) aus, daß \mathfrak{B}_n konvex ist in bezug auf eine Klasse von in \mathfrak{B} regulären Funktionen.

Nun ist nach dem schon vorher zitierten Satz von Behnke und Thullen der Grenzbereich \mathfrak{B} ein Regularitätsbereich, wenn die \mathfrak{B}_n des Hilfssatzes 1 konvex sind in bezug auf die Klasse der in \mathfrak{B} regulären Funktionen^{4b)}. Damit folgt Hilfssatz 1 unmittelbar.

Wir zeigen nun in Hilfssatz 3, daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 unter der Voraussetzung von Satz 1 stets zutreffen. Zum Beweise von Hilfssatz 3 benötigen wir Hilfssatz 2.

^{4b)} Siehe ¹⁾, Satz 9, S. 303.

Hilfssatz 2. Es sei \mathfrak{B} ein abgeschlossener, schlichter, beschränkter Bereich $|f_j(z_1, \dots, z_N)| \leq 1$ ¹⁾. Die f_j seien in einem \mathfrak{B} ganz umfassenden Bereich \mathfrak{B}^* regulär. Dann läßt sich jede in \mathfrak{B} reguläre Funktion F durch eine Folge von in \mathfrak{B}^* regulären Funktionen gleichmäßig in \mathfrak{B} approximieren.

Beweis. Wir betrachten im Raume von $2(N+k)$ -Dimensionen das (abgeschlossene) analytische Flächenstück

$$\mathfrak{F}: w_j = f_j(z_1, \dots, z_N), \quad j = 1, \dots, k, \quad (z_i) \in \mathfrak{B}.$$

Nach einem Satz von K. Oka ist \mathfrak{F} durch $2(N+k)$ -dimensionale Polynom-bereiche \mathfrak{P}_ν , die \mathfrak{F} ganz umfassen, approximierbar (Oka II, Satz 1, S. 125). Faßt man F als Funktion der $(N+k)$ komplexen Veränderlichen (w_j, z_i) auf, so ist sie in einer gewissen Nachbarschaft von \mathfrak{F} regulär, also auch in fast allen \mathfrak{P}_ν , z. B. in \mathfrak{P}_{ν_0} . Nach Untersuchungen von A. Weil und Oka läßt sich nun jede in einem Polynombereiche reguläre Funktion in diesem Bereiche in eine gleichmäßig konvergente Polynomreihe entwickeln²⁾. Speziell sei in \mathfrak{P}_{ν_0} :

$$F(z_1, \dots, z_N) = \sum_{\mu} P_{\mu}(w_1, \dots, w_k, z_1, \dots, z_N),$$

dabei sind die P_{μ} Polynome. Setzt man in dieser Entwicklung

$$w_j = f_j(z_1, \dots, z_N),$$

so ist

$$F(z_1, \dots, z_N) = \sum_{\mu} P_{\mu}(f_1(z_1, \dots, z_N), \dots, f_k(z_1, \dots, z_N), z_1, \dots, z_N)$$

eine gesuchte Entwicklung von F . Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Zu den benutzten Sätzen von A. Weil und K. Oka sei ausdrücklich bemerkt, daß

1. in der klassischen Funktionentheorie alle Bereiche, in denen sich die Gesamtheit der dort regulären Funktionen nach Polynomen entwickeln läßt, stets einfach zusammenhängend sind,

2. daß dies in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen nicht mehr gilt.

Zu 1. Ist \mathfrak{B} mehrfach zusammenhängend, so gibt es in \mathfrak{B} eine geschlossene Kurve C , die einen nicht in \mathfrak{B} liegenden Punkt z_0 umfaßt. Wäre nun die in \mathfrak{B}

¹⁾ Die Punktmenge $|f_j(z_1, \dots, z_N)| < 1$ kann natürlich in mehrere getrennte offene Bereiche zerfallen. \mathfrak{B} sei einer dieser Bereiche nebst Rand. (In den Begriff des offenen Bereiches ist hier aufgenommen, daß er eine zusammenhängende Punktmenge bildet.) Dieser Rand besteht also lediglich aus Stücken der Hyperflächen $|f_j| = 1$.

²⁾ Siehe ¹⁾ sowie A. Weil, Sur les séries de polynomes de deux variables complexes, C. R. 194 (1932), S. 1304; L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Annalen 111 (1935), S. 178.

reguläre Funktion $\frac{1}{z-z_0}$ dort in eine Polynomreihe entwickelbar, so gälte gleiches für die in \mathfrak{B} mehrdeutige Funktion $\int \frac{dz}{z-z_0} = \log(z-z_0)$.

Zu 2. In dem Polynombereich

$$\mathfrak{B}: \{|wz-1| \leq \frac{1}{2}, |w^2z| \leq 2, |z| \leq 1\}$$

läßt sich nicht jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehen, z. B. nicht die Kurve

$$\{z = \frac{3}{4} \cdot e^{i\vartheta}, w = \frac{1}{z(\vartheta)}, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}.$$

Andererseits ist nach A. Weil, wie auch nach K. Oka, jede in \mathfrak{B} reguläre Funktion dort nach Polynomen entwickelbar.

Hilfssatz 3. *Ist der beschränkte Bereich \mathfrak{B} von innen durch eine Folge von Regularitätsbereichen \mathfrak{B}_n mit $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1}$ approximierbar, so gibt es eine besondere \mathfrak{B} von innen approximierende Folge \mathfrak{C}_n von Regularitätsbereichen mit $\mathfrak{C}_n \subset \mathfrak{C}_{n+1}$, so daß jede in \mathfrak{C}_n reguläre Funktion im Innern von \mathfrak{C}_n als Limes einer dort gleichmäßig konvergenten Folge von in \mathfrak{C}_{n+1} regulären Funktionen darstellbar ist.*

Wir führen zunächst abkürzende Bezeichnungen ein. Es sei $d_{\mu\nu}(P)$ der Abstand des auf dem Rande von \mathfrak{B}_μ gelegenen Punktes P vom Rande von \mathfrak{B}_ν . Wir setzen

$$M_{\mu\nu} = \text{Max } d_{\mu\nu}(P),$$

$$m_{\mu\nu} = \text{Min } d_{\mu\nu}(P),$$

dabei durchlaufe P sämtliche Randpunkte von \mathfrak{B}_μ . $M_{\mu\nu}$ heißt der Maximalabstand von \mathfrak{B}_μ in bezug auf \mathfrak{B}_ν , $m_{\mu\nu}$ der Minimalabstand von \mathfrak{B}_μ in bezug auf \mathfrak{B}_ν . Entsprechend sei M_μ der Maximalabstand von \mathfrak{B}_μ in bezug auf \mathfrak{B} und m_μ der Minimalabstand von \mathfrak{B}_μ in bezug auf \mathfrak{B} .

Konstruktion der Folge \mathfrak{C}_n . Wir wählen zunächst aus der Folge \mathfrak{B}_n eine Teilfolge \mathfrak{B}_{r_n} aus: Es sei

$$\mathfrak{B}_{r_1} = \mathfrak{B}_1.$$

Es werde ferner gewählt:

\mathfrak{B}_{r_2} , so daß $M_{r_2} < m_{r_1}$, (das ist wegen $\mathfrak{B} = \lim \mathfrak{B}_n$ stets erreichbar),

\mathfrak{B}_{r_3} , so daß $M_{r_3} < m_{r_1 r_2}$ und $M_{r_3} < m_{r_2}$,

.....

\mathfrak{B}_{r_n} , so daß $M_{r_{n-1} r_n} < m_{r_{n-2} r_n}$ und $M_{r_n} < m_{r_{n-1}}$.

Dann gilt

$$\mathfrak{B}_{r_{n-1}} \subset \mathfrak{B}_{r_n} \subset \mathfrak{B}_{r_{n+1}} \quad \text{und} \quad M_{r_n r_{n+1}} < m_{r_{n-1} r_{n+1}}.$$

Da die \mathfrak{B}_n als Regularitätsbereiche regulär-konvex sind, gibt es um jeden Punkt P auf dem Rande $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}_{r_n})$ von \mathfrak{B}_{r_n} eine Hyperkugel $\mathfrak{R}_{r_n}(P)$ und eine in $\mathfrak{B}_{r_{n+1}}$ reguläre Funktion $f_P^{(r_n+1)}$, so daß

$$|f_P^{(r_n+1)}(Q)| > 1 > \text{Max } |f_P^{(r_n+1)}(\mathfrak{B}_{r_{n-1}})|$$

für jeden Punkt Q aus $\mathfrak{R}_{r_n}(P)$. $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}_{r_n})$ ist eine abgeschlossene Punktmenge, daher gibt es endlich viele Punkte P_i , so daß die $\mathfrak{R}_{r_n}(P_i)$ ganz $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}_{r_n})$ überdecken. Es sei nun \mathfrak{C}_n der größte Bereich, der ganz in der Punktmenge $|f_{P_i}^{(r_n+1)}| < 1$ enthalten ist und $\mathfrak{B}_{r_{n-1}}$ umfaßt. Die \mathfrak{C}_n sind Regularitätsbereiche, ferner gilt $\mathfrak{B}_{r_{n-1}} \subset \mathfrak{C}_n \subset \mathfrak{B}_{r_n}$, also

$$\lim \mathfrak{C}_n = \mathfrak{B}.$$

Die \mathfrak{C}_n haben nun die in Hilfssatz 3 angegebene Eigenschaft. Sei nämlich $F^{(n)}$ eine in \mathfrak{C}_n reguläre Funktion. Dann ist zu zeigen, daß es zu jedem ganz im Innern von \mathfrak{C}_n gelegenen Bereich \mathfrak{D} und jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine in \mathfrak{C}_{n+1} reguläre Funktion $G^{(n+1)}$ gibt, so daß in \mathfrak{D} gilt

$$|F^{(n)} - G^{(n+1)}| < \varepsilon.$$

Wir können nun ein $\delta > 0$ so wählen, daß die Punktmenge $|f_{P_i}^{(r_n+1)}| < 1 - \delta$ einen Bereich $\mathfrak{C}_{n,\delta}$ enthält, der ganz im Innern von \mathfrak{C}_n liegt, \mathfrak{D} umfaßt und dessen Berandung nur von Stücken der Hyperflächen $|f_{P_i}^{(r_n+1)}| = 1 - \delta$ gebildet wird. Da die $f_{P_i}^{(r_n+1)}$ in \mathfrak{C}_{n+1} regulär sind, gibt es nach Hilfssatz 2 eine in \mathfrak{C}_{n+1} reguläre Funktion $G^{(n+1)}$, so daß

$$|F^{(n)} - G^{(n+1)}| < \varepsilon$$

in $\mathfrak{C}_{n,\delta}$ und damit in \mathfrak{D} gilt.

Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Aus Hilfssatz 1 und Hilfssatz 3 folgt aber Satz 1.

Anmerkung. Die Beschränktheit des Grenzbereiches \mathfrak{B} wurde zum Beweis des Satzes 1 nur im Hilfssatz 3 verwandt (Hilfssatz 1 gilt auch für nichtbeschränkte, endliche Bereiche). Ist \mathfrak{B} nicht beschränkt, aber endlich, und gilt für die \mathfrak{B}_n , daß ihre Maximaldistanzen M_n in bezug auf \mathfrak{B} gegen Null gehen, so läßt sich der Beweis des modifizierten Hilfssatzes 3 und damit des modifizierten Satzes 1 noch ebenso durchführen.

Wir können jetzt den Satz 1 leicht erweitern. Wir benötigen nicht mehr die Voraussetzung, daß die \mathfrak{B}_n ganz in \mathfrak{B} liegen. Auch wenn sie mit \mathfrak{B} teilweise den Rand gemeinsam haben oder gar über ihn hinausragen, gilt eine entsprechende Aussage.

⁷⁾ Siehe B.-Th. Bericht, Kap. 6, § 1, S. 72.

Satz 2. Die Folge \mathfrak{B}_n von Regularitätsbereichen konvergiere irgendwie gegen den beschränkten Bereich \mathfrak{B} . Dann ist \mathfrak{B} ein Regularitätsbereich.

Der Beweis ist nach Satz 1 erbracht, wenn eine Folge von Regularitätsbereichen \mathfrak{C}_n angegeben werden kann mit $\mathfrak{C}_n \subset \mathfrak{C}_{n+1}$ und $\lim \mathfrak{C}_n = \mathfrak{B}$. Die Existenz einer solchen Folge ergibt sich aus dem folgenden

Hilfssatz 4. Erfüllt der Bereich \mathfrak{B} die Voraussetzungen des Satzes 2, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ einen Regularitätsbereich \mathfrak{C} , der ganz im Innern von \mathfrak{B} liegt und dessen Maximalabstand in bezug auf \mathfrak{B} kleiner als δ ist.

Beweis. Wir wählen einen ganz im Innern von \mathfrak{B} gelegenen Bereich \mathfrak{D} , der alle Punkte von \mathfrak{B} umfaßt, deren Abstand vom Rande von \mathfrak{B} größer oder gleich δ ist. Der Minimalabstand von \mathfrak{D} in bezug auf \mathfrak{B} sei δ_1 ^{*)}. Aus den \mathfrak{B}_n wählen wir sodann einen Bereich \mathfrak{B}_{n_0} , dessen Maximalabstand in bezug auf \mathfrak{B} kleiner als $\frac{\delta_1}{4}$ ist. Es sei \mathfrak{M} die Menge der Punkte, die im Innern von \mathfrak{B}_{n_0} liegen und vom Rande von \mathfrak{B}_{n_0} den Abstand $\frac{\delta_1}{2}$ haben. \mathfrak{M} liegt ganz im Innern von \mathfrak{B} , aber ganz außerhalb von \mathfrak{D} . Weil nun \mathfrak{M} vom Rande des Regularitätsbereiches \mathfrak{B}_{n_0} einen kleineren Abstand als der Bereich \mathfrak{D} hat, gibt es zu jedem Punkt P von \mathfrak{M} eine in \mathfrak{B}_{n_0} reguläre Funktion f_P und eine Hyperkugel $\mathfrak{K}(P)$ um P , so daß für jeden Punkt Q aus $\mathfrak{K}(P)$ gilt:

$$|f_P(Q)| > 1 > \max |f(\mathfrak{D})| \text{ *)}.$$

Da \mathfrak{M} abgeschlossen ist, können wir endlich viele Punkte P_1, \dots, P_s auf \mathfrak{M} so finden, daß ihre $\mathfrak{K}(P_1), \dots, \mathfrak{K}(P_s)$ ganz \mathfrak{M} überdecken. Die Punktmannigfaltigkeit $|f_{P_i}| < 1$ enthält einen Regularitätsbereich \mathfrak{C} mit folgenden Eigenschaften:

1. \mathfrak{C} wird lediglich berandet von Stücken der Hyperflächen $|f_{P_i}| = 1$,
2. \mathfrak{C} umfaßt \mathfrak{D} ; der Maximalabstand von \mathfrak{C} in bezug auf \mathfrak{B} ist daher kleiner oder gleich δ ,
3. \mathfrak{C} hat keinen Punkt mit \mathfrak{M} gemeinsam; \mathfrak{C} liegt deshalb ganz im Innern von \mathfrak{B} und hat einen Minimalabstand in bezug auf \mathfrak{B} , der nicht kleiner ist als $\frac{\delta_1}{4}$.

\mathfrak{C} ist also ein gesuchter Bereich. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

In Verbindung mit Satz 1 folgt nun Satz 2.

*) Es braucht nicht $\delta_1 = \delta$ zu sein, denn die Gesamtheit der Punkte aus \mathfrak{B} , die vom Rande von \mathfrak{B} einen Abstand haben, der größer oder gleich δ ist, kann in mehrere Bereiche zerfallen. Der Bereich \mathfrak{D} enthält dann auch Punkte, deren Abstand vom Rande von \mathfrak{B} kleiner als δ ist.

*) Vgl. 7).

§ 2.

Eigenschaften der Zuordnung von Hüllen zu Bereichen.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen gestatten uns, die Kenntnis der „Hüllenfunktion“ $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ zu vervollständigen. Unter $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ verstehen wir wie üblich den Durchschnitt der einen Bereich \mathfrak{B} umfassenden Regularitätsbereiche. Wir sprechen im folgenden in unseren Aussagen nur von solchen Bereichen, die beschränkt und schlicht sind und ihrerseits schlichte Hüllen haben. Bei den Beweisen der folgenden Sätze ist darauf zu achten, daß keine Hilfsbereiche samt Hüllen herangezogen werden, weil wir bei diesen Bereichen natürlich nicht mehr die Schlichtheit der Hüllen voraussetzen dürfen. Wir haben bis heute noch kein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß die Hülle eines schlichten Bereiches wieder schlicht ist.

Wir beweisen

Satz 3. Die Bereiche \mathfrak{B}_n , $n = 1, 2, \dots$, seien im Bereich \mathfrak{B}_0 enthalten und mögen gegen \mathfrak{B}_0 konvergieren. \mathfrak{R}_n seien schlichte Regularitätsbereiche, für die

$$\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$$

zutreffen möge. Dann konvergieren auch die \mathfrak{R}_n , und es ist

$$\lim \mathfrak{R}_n = \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0).$$

Zum Beweise bilden wir den Bereich \mathfrak{B}^* , der durch folgende Eigenschaften definiert ist:

1. \mathfrak{B}^* enthält \mathfrak{B}_0 ,
2. jeder Punkt von \mathfrak{B}^* liegt in fast allen \mathfrak{R}_n ,
3. \mathfrak{B}^* ist der größte Bereich dieser Art.

Wir bezeichnen mit

\mathfrak{D}_1 den Durchschnitt aller \mathfrak{R}_n , $n = 1, 2, \dots$,

\mathfrak{D}_2 den Durchschnitt aller \mathfrak{R}_n , $n = 2, 3, \dots$,

usw.

Diese Bereiche \mathfrak{D}_k sind als Durchschnitte von Regularitätsbereichen wieder Regularitätsbereiche¹⁰⁾. Da \mathfrak{D}_k in \mathfrak{D}_{k+1} enthalten ist, so konvergieren die \mathfrak{D}_k , und es ist

$$\lim \mathfrak{D}_k = \mathfrak{B}^*.$$

Nach Satz 2 ist \mathfrak{B}^* also Regularitätsbereich. \mathfrak{B}^* umfaßt ferner \mathfrak{B}_0 , da jeder Punkt aus \mathfrak{B}^* in fast allen \mathfrak{B}_n liegt. Also ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ in \mathfrak{B}^* enthalten. Anderer-

¹⁰⁾ Siehe B.-Th. Bericht, S. 74. Wir denken uns einen festen Bezugspunkt in \mathfrak{B}_0 für die Durchschnittsbildungen gewählt.

seits gilt $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$, weil jeder Punkt von \mathfrak{B}^* in fast allen \mathfrak{R}_n und damit, wegen $\mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ für alle n , in $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ liegt. Also ist $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$. Dann ist aber auch

$$\lim \mathfrak{R}_n = \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0),$$

wie behauptet.

Aus Satz 3 folgt

Satz 3a. *Die Hüllenfunktion $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ ist „halbseitig stetig“, d. h.: Sind die Bereiche \mathfrak{B}_n Teilbereiche von \mathfrak{B}_0 und ist $\lim \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_0$, so gilt*

$$\lim \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n) = \mathfrak{H}(\lim \mathfrak{B}_n) = \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0).$$

Der Satz 3 ist auch samt dem hier wiedergegebenen Beweis gültig, wenn man keine Voraussetzungen über die Schlichtheit der $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n)$ macht. Deshalb haben wir auch ausdrücklich Satz 3 und Satz 3a getrennt, denn bei der angegebenen allgemeineren Auffassung des Satzes 3 ist dieser keineswegs aus Satz 3a unmittelbar zu folgern.

Ferner gilt

Satz 4. *Hat der Bereich \mathfrak{B}_0 keine Nebenhülle, so ist die Hüllenfunktion $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ für \mathfrak{B}_0 stetig, d. h. für jede Folge von Bereichen \mathfrak{B}_n mit $\lim \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_0$ gilt*

$$\lim \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n) = \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0).$$

Wir sprechen bekanntlich von einer Nebenhülle $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$ eines Bereiches \mathfrak{B} , wenn der Durchschnitt aller \mathfrak{B} ganz umfassenden Regularitätsbereiche von $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ verschieden ist. Ein Bereich mit Nebenhülle ist z. B. der Bereich $\{|w| < 1, |z| < |w|\}^{11)}$. Seine Nebenhülle ist der Dizylinder $\{|w| < 1, |z| < 1\}$.

Beweis. Sicher haben die $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n)$ die Eigenschaft, daß jeder Punkt P aus $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ in fast allen $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n)$ enthalten ist, denn die Bereiche \mathfrak{C}_n , die als Durchschnitte von $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n)$ definiert sind¹²⁾, konvergieren nach Satz 3 gegen $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$. Aber es kann auch keinen größeren Bereich als $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ mit dieser Eigenschaft geben. Denn zu $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ gibt es eine Folge von Regularitätsbereichen \mathfrak{R}_r , die den abgeschlossenen Regularitätsbereich $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ ganz umfassen und die gegen $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ konvergieren. Zu jedem \mathfrak{R}_r gibt es ein $n_0(r)$, so daß die $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n)$, $n > n_0$, ganz in \mathfrak{R}_r enthalten sind. Damit ist der Satz bewiesen.

In Satz 4 ist die Voraussetzung von grundlegender Bedeutung, daß \mathfrak{B}_0 keine Nebenhülle hat. Hat im Gegensatz dazu \mathfrak{B}_0 eine Nebenhülle, so braucht für eine gegen \mathfrak{B}_0 konvergierende Folge von Bereichen \mathfrak{B}_n ein Grenzbereich $\lim \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n)$ nicht zu existieren. Als Beispiel sei wieder erwähnt der Bereich $\mathfrak{B}_0: \{|w| < |z|, |z| < 1\}$. \mathfrak{B}_0 ist mit seiner Hülle identisch. Die Nebenhülle $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_0)$ ist $\{|w| < 1, |z| < 1\}$. Wir wählen als Bereiche \mathfrak{B}_n eine Folge,

¹¹⁾ Vgl. ¹⁾.

¹²⁾ Siehe ¹⁰⁾.

bei der \mathfrak{B}_n für gerades n ganz im Bereich \mathfrak{B}_0 liegt und für ungerades n den Bereich \mathfrak{B}_0 ganz umfaßt. Dann streben die $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_{2r})$ gegen \mathfrak{B}_0 und die $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_{2r+1})$ gegen den Dizylinder $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_0)$. Aber im allgemeinen Falle brauchen nicht $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_0)$ die einzigen Grenzbereiche der $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n)$ zu sein. Es kann zwischen $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_0)$ weitere Regularitätsbereiche geben, die als Grenzbereiche von Teilfolgen der $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n)$ aufzutreten vermögen. Als Beispiel sei erwähnt der Hartogssche Bereich

$$\mathfrak{B}_0: \{|w| < |z \cdot (z - \tfrac{1}{2})|, |z| < 1, |z - \tfrac{1}{2}| < 1\}.$$

Kritische Punkte dieses Bereichs sind $(0, 0)$ und $(0, \tfrac{1}{2})$. Die Nebenhülle $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_0)$ weist beide Punkte als innere Punkte auf. Aber es gibt \mathfrak{B}_0 umfassende Regularitätsbereiche, die nur je einen der kritischen Punkte als inneren Punkt aufweisen und in der Nebenhülle enthalten sind. Wir bekommen solche Bereiche, wenn wir bilden:

$$\mathfrak{C}_1: \{|w| < |z|, |z| < 1, |z - \tfrac{1}{2}| < 1\},$$

$$\mathfrak{C}_2: \{|w| < |z - \tfrac{1}{2}|, |z| < 1, |z - \tfrac{1}{2}| < 1\}.$$

Dann sind

$$\mathfrak{D}_1 = \text{Durchschnitt von } \mathfrak{C}_1 \text{ und } \mathfrak{N}(\mathfrak{B}_0)$$

und

$$\mathfrak{D}_2 = \text{Durchschnitt von } \mathfrak{C}_2 \text{ und } \mathfrak{N}(\mathfrak{B}_0)$$

solche Bereiche. Als Bereiche \mathfrak{B}_n wählen wir das eine Mal die Vereinigungsmengen $\mathfrak{B}_n^{(1)}$ von \mathfrak{B}_0 und den Dizylindern $\{|w| < \varepsilon_n, |z| < \varepsilon_n\}$, das andere Mal die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}_n^{(2)}$ von \mathfrak{B}_0 und den Dizylindern $\{|w| < \varepsilon_n, |z - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon_n\}$, $\lim \varepsilon_n = 0$. Nun ziehen wir wieder die bekannte Aussage heran: Ist \mathfrak{C} ein Teilbereich von \mathfrak{B}_0 , so ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{C})$ in $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ enthalten. Als \mathfrak{C} nehmen wir im ersten Falle die Vereinigungsmenge \mathfrak{C}_1 von $\{|w| < \tfrac{1}{4}|z|, |z| < \tfrac{1}{4}\}$ und $\{|w| < \varepsilon_n, |z| < \varepsilon_n\}$, im zweiten Falle die Vereinigungsmenge \mathfrak{C}_2 von $\{|w| < \tfrac{1}{4}|z - \tfrac{1}{2}|, |z - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{4}\}$ und $\{|w| < \varepsilon_n, |z - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon_n\}$. Dann ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_1)$ der Dizylinder $\{|w| < \tfrac{1}{4}, |z| < \tfrac{1}{4}\}$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_2)$ der Dizylinder $\{|w| < \tfrac{1}{4}, |z - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{4}\}$. Die $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n^{(1)})$ umfassen $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_1)$ und liegen von einem n ab sicher in \mathfrak{D}_1 ; sie können also keine Teilfolge aufweisen, die gegen $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ oder gegen $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_0)$ konvergiert. Entsprechendes gilt für die $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n^{(2)})$, überdies sind ihre Grenzbereiche verschieden von den Grenzbereichen der $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_n^{(1)})$.

§ 3.

Meromorph-konvexe Bereiche.

Aus den Sätzen des Paragraphen 1 lassen sich noch weitere allgemeine Folgerungen ziehen. Wir sind nun in der Lage, die Äquivalenz mehrerer Konvexitätsbegriffe im Raum von n komplexen Veränderlichen zu zeigen.

Es liegt nahe, bei der Übertragung des elementargeometrischen Begriffes der Konvexität in die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen¹³⁾ folgende Definition einzuführen:

Definition. Der Bereich \mathfrak{B} heißt *konvex in bezug auf analytische Flächen*, wenn es zu jedem ganz in \mathfrak{B} liegenden Bereich \mathfrak{B}_0 einen auch noch ganz in \mathfrak{B} liegenden Bereich \mathfrak{B}_0^* gibt, so daß durch jeden Punkt P aus \mathfrak{B} aber außerhalb \mathfrak{B}_0^* eine analytische Fläche \mathfrak{F} mit folgenden Eigenschaften läuft:

1. \mathfrak{F} besitzt eine Darstellung $g(w, z) = 0$, g in \mathfrak{B} meromorph,
2. \mathfrak{F} dringt nicht in \mathfrak{B}_0 ein.

Man sieht unmittelbar, daß die soeben definierte Konvexität mit der Meromorphiekonvexität äquivalent ist. Denn: Ist \mathfrak{B} meromorph-konvex, so gibt es zu jedem ganz im Innern von \mathfrak{B} gelegenen Bereich \mathfrak{B}_0 einen Bereich \mathfrak{B}_0^* mit der in der Definition angegebenen Eigenschaft. Und umgekehrt: Es sei \mathfrak{B} konvex in bezug auf analytische Flächen. Zu einem vorgegebenen Bereich \mathfrak{B}_0 , ($\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$), wählen wir einen seinerseits \mathfrak{B}_0 ganz enthaltenden und ganz im Innern von \mathfrak{B} gelegenen Bereich \mathfrak{B}_1 . Zu \mathfrak{B}_1 bilden wir wie in der vorstehenden Definition den Bereich \mathfrak{B}_1^* . Dann gibt es zu jedem Punkt P in \mathfrak{B} aber außerhalb von \mathfrak{B}_1^* eine in \mathfrak{B} meromorphe Funktion, die genau auf dem durch P laufenden und nicht in \mathfrak{B}_1 eindringenden Flächenstück \mathfrak{F} : $g(w, z) = 0$, verschwindet. Die Funktion $f = \frac{1}{g}$ ist in \mathfrak{B} meromorph, im Innern von \mathfrak{B}_1 regulär, und es gilt, wie für die Meromorphiekonvexität gefordert:

$$|f(P)| > \text{Max } |f(\mathfrak{B}_0)|.$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Konvexität in bezug auf analytische Flächen sogar mit der Regularitätskonvexität äquivalent ist, es also unter den Voraussetzungen der obigen Definition eine durch P gehende analytische Hyperfläche

$$|f(w, z)| = A, \quad f(w, z) \text{ in } \mathfrak{B} \text{ regulär,}$$

gibt, so daß \mathfrak{B}_0 in der Punktmenge $|f(w, z)| < A$ enthalten ist. Es gilt

Satz 5. Jeder meromorph-konvexe Bereich ist ein Regularitätsbereich.

Dazu beweisen wir den

Hilfssatz. Jeder meromorph-konvexe Bereich \mathfrak{B} läßt sich von innen durch Regularitätsbereiche approximieren.

Zum Beweis zeigen wir, daß es zu jedem ganz im Innern von \mathfrak{B} gelegenen Bereich \mathfrak{B}_0 einen Regularitätsbereich \mathfrak{R}_0 gibt, der \mathfrak{B}_0 umfaßt und in \mathfrak{B} enthalten ist. Nach der Definition der Meromorphiekonvexität gibt es zu \mathfrak{B}_0

¹³⁾ Vgl. hierzu H. Behnke und E. Peschl, Die Konvexität in der Elementargeometrie und in projektiven Räumen, Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhanges von Universität und Schule, Münster, Heft 5 (1934).

einen \mathfrak{B}_0 umfassenden Bereich \mathfrak{B}_0^* , so daß zu jedem in \mathfrak{B} und außerhalb von \mathfrak{B}_0^* gelegenen Punkt P eine in \mathfrak{B} meromorphe Funktion g_P existiert, so daß $|g_P(P)| > \text{Max } |g_P(\mathfrak{B}_0)|$. \mathfrak{B}_0^* habe den Minimalabstand ε in bezug auf \mathfrak{B} . Wir betrachten die abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} , deren Abstand vom Rande von \mathfrak{B} gleich $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Zu jedem Punkt P von \mathfrak{M} gibt es eine Hyperkugel $\mathfrak{R}(P)$ und eine in \mathfrak{B} meromorphe Funktion f_P , so daß für jeden Punkt Q aus $\mathfrak{R}(P)$ gilt:

$$|f_P(Q)| > 1 > \text{Max } |f_P(\mathfrak{B}_0)|.$$

Es gibt endlich viele Hyperkugeln $\mathfrak{R}(P_1), \dots, \mathfrak{R}(P_s)$, die ganz \mathfrak{M} überdecken. Die Punktmenge

$$|f_{P_i}| < 1, \quad i = 1, \dots, s,$$

enthält dann sicher einen Regularitätsbereich, der \mathfrak{B}_0 umfaßt, ganz in \mathfrak{B} enthalten ist und dessen Berandung lediglich von Stücken der Hyperflächen $|f_{P_i}| = 1$ gebildet wird.

Aus diesem Hilfssatz und Satz 2 folgt nun Satz 5 unmittelbar und damit, daß jeder Bereich, der konvex ist in bezug auf analytische Flächen, ein Regularitätsbereich ist.

(Eingegangen am 30. 3. 1938.)

Neue Methoden in der Strukturtheorie der kommutativ-assoziativen Algebren*).

Von

Günter Pickert in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	217
I. Allgemeine Grundlagen.	
§ 1. Reduktion des Problems; rein-inseparable Körpererweiterungen.	218
§ 2. Allgemeines über nilpotente Algebren.	223
§ 3. Aufbau der Algebra aus Radikal und Radikalrestklassenkörper	230
II. Die Algebren mit $r \leq 3$.	
§ 4. Einteilung in Typenklassen; der Fall $r = 2$	239
§ 5. Übersicht über die nilpotenten Algebren vom Index 3	244
§ 6. Handhabung der Methode in den Fällen $\delta' = \frac{\delta(\delta+1)}{2}$, 1, $\frac{\delta(\delta+1)}{2} - 1$	253
§ 7. Die Algebren vom Defekt 2 und Index 3	258
III. Die Algebren vom Defekt 1.	
§ 8. Einteilung in Typenklassen	265
§ 9. Der Fall $\lambda = 1$	268
§ 10. Restklassenringe von Funktionenkörpern	272
§ 11. Zusammenhang mit der Theorie der diskret bewerteten perfekten Körper	275
Literaturverzeichnis	279

Einleitung.

Seit der Aufstellung der Wedderburnschen Struktursätze (1908) gewinnt die Theorie der nichtkommutativen gegenüber der der kommutativen Algebren mehr und mehr an Interesse und Umfang. In den folgenden 20 Jahren sind es eigentlich nur drei Ergebnisse, die auch im kommutativen Falle nicht trivial werden: einmal die für die Theorie der nilpotenten Algebren wesentliche

*) D 7.

Arbeit von Hazlett (1916), zum anderen zwei auf Dickson zurückgehende Theoreme über Algebren mit Radikal, von denen das erste (Dickson [1], 1923, S. 91) die dem ersten Wedderburnschen Struktursatz entsprechende additive Zerlegung liefert, das zweite (Dickson [2], 1927) eine Aussage über den Aufbau der Algebra aus Radikal und Radikalrestklassenkörper macht, aber erst bei Deuring (1935, I, § 11) von der bei Dickson stillschweigend gemachten Voraussetzung $p = 0$ befreit wird. Die in den nächsten Jahren hauptsächlich durch Artin und Noether (siehe hierüber das Referat von Deuring) einsetzende Behandlung des Algebrenproblems vom Idealbegriff her liefert für die Theorie der kommutativen Algebren keine sachlich neuen Ergebnisse, sondern lediglich eine Verbesserung und Vereinfachung von Terminologie und Beweismethodik. Wenn wir von den von allzu speziellen Voraussetzungen ausgehenden Arbeiten (z. B. Ghent: A note on nilpotent algebras in four units. Bull. Amer. Math. Soc. 1934) absehen, sind es in den letzten Jahren nur die Veröffentlichungen von Scorza [2], [3], [4] (1934–1936), die einen Beitrag zu unserem Problem liefern. Doch handelt es sich hierbei auch nur um die Behandlung einzelner Typen, wodurch keine allgemeinen Gesichtspunkte gegeben werden.

Die vorliegende Arbeit versucht nun, auf den angeführten Ergebnissen aufbauend, Methoden zu entwickeln, durch die die Struktur größerer Klassen von kommutativ-assoziativen Algebren mit Haupteinheit vollständig aufgeklärt werden kann.

Die in Kapitel I zusammengetragenen Untersuchungsgrundlagen sind dabei — besonders in den §§ 1 und 2 — in größerem Umfange dargestellt, als dies für die in den beiden anderen Kapiteln durchgeführten Untersuchungen zweier großen Algebrenklassen nötig gewesen wäre: Späteren Untersuchungen mögen die hier nicht voll ausgewerteten Ergebnisse von Nutzen sein.

I. Allgemeine Grundlagen.

§ 1.

Reduktion des Problems; rein-inseparable Körpererweiterungen.

Das Problem lautet: Es sind die möglichen Typen kommutativ-assoziativer Algebren mit Haupteinheit über einen beliebigen Körper¹⁾ K anzugeben. Eine erste Reduktion ergibt sich aus idealtheoretischen Sätzen (Krull, Nr. 8 und 9; van der Waerden [2], §§ 85, 86) oder aber auch aus einem Theorem bei Dickson ([1], S. 91) in der folgenden Formulierung:

¹⁾ In die Körperdefinition wollen wir für unsere Zwecke die Kommutativität mit aufnehmen.

Satz 1. *Eine kommutativ-assoziative Algebra mit Haupteinheit läßt sich als direkte Summe eindeutig bestimmter primärer Algebren darstellen.*

Wir können uns daher auf diese primären Algebren beschränken, die ja dadurch ausgezeichnet sind, daß der Restklassenring nach dem Radikal ein Körper ist. Es sei nun \mathfrak{A} eine solche primäre Algebra, \mathfrak{w} ihr Radikal. Elemente von \mathfrak{A} wollen wir mit lateinischen, ihre Restklassen mod \mathfrak{w} durch die entsprechenden deutschen Buchstaben bezeichnen. Den zu K isomorphen Körper, der aus den durch die Elemente von K bestimmten Restklassen besteht, nennen wir \mathfrak{K} . Dann gilt:

Satz 2. *Für die Restklassen des größten in $\mathfrak{A}/\mathfrak{w}$ enthaltenen separablen Erweiterungskörpers \mathfrak{K}' von \mathfrak{K} gibt es in \mathfrak{A} ein eindeutig bestimmtes relationstreu-repräsentantensystem K' , welches Erweiterungskörper von K ist.*

Zum Beweis beachten wir, daß die in den Restklassen von \mathfrak{K}' liegenden Elemente von \mathfrak{A} eine Unteralgebra $\mathfrak{A}^* \leq \mathfrak{A}$ über K bilden. Da nun $\mathfrak{A}^*/\mathfrak{w} = \mathfrak{K}'$ separabel über \mathfrak{K} ist, gibt es einen Erweiterungskörper K' von K mit $\mathfrak{A}^* = K' + \mathfrak{w}$ und $K' \cong \mathfrak{K}'$ (Deuring, a. a. O., I, § 11). Damit ist die Existenz eines relationstreuen Repräsentantensystems bewiesen. Sei nun K'' ein weiteres, welches wieder Oberkörper von K ist, so folgt aus $K'' \cong \mathfrak{K}'$ in Verbindung mit $K' \cong \mathfrak{K}'$ ein Isomorphismus $K' \cong K''$ bez. K , der dem Element $a' \in K'$ ein Element $a'' = a' + w$ ($w \in \mathfrak{w}$) aus K'' zuordnet. Es sei $f(x)$ das irreduzible Polynom über K mit $f(a') = 0$. Aus Isomorphiegründen folgt $f(a'') = 0$. Andererseits ergibt sich

$$\begin{aligned} f(a'') &= f(a') + w f'(a') + \text{Glieder mit höheren Potenzen von } w \\ &= f(a') + w \cdot A \quad \text{mit} \quad A \equiv f'(a') \bmod \mathfrak{w}, \end{aligned}$$

also $w \cdot A = 0$. Da zufolge der Separabilität von K'/K $f'(a') \neq 0$ gilt, liegt A nicht im Radikal und ist daher kein Nullteiler. Es ergibt sich also $w = 0$, d. h. $a' = a'' : K'$ und K'' sind identisch, w. z. b. w.

Es ist nun \mathfrak{A} auch Algebra über K' , und es liegt die Frage nahe, ob es nicht genügt, bei vorgegebenem Typus von $\mathfrak{A}/\mathfrak{w}$ die Algebren über K' zu betrachten. Nennen wir eine Algebra \mathfrak{A}^*/K' zu \mathfrak{A}/K' konjugiert über K , wenn durch Anwendung eines Automorphismus von K'/K auf eine Multiplikationstafel von \mathfrak{A}/K' eine Multiplikationstafel von \mathfrak{A}^*/K' entsteht, so folgt ohne weiteres aus der eindeutigen Bestimmtheit von K' innerhalb \mathfrak{A} der

Satz 3. *Man erhält alle primären Algebrentypen \mathfrak{A} über gegebenem K , wenn man zu jedem separablen Erweiterungstypus K'/K alle primären Algebrentypen \mathfrak{A}/K' bestimmt, für die der Radikalrestklassenkörper rein-inseparabel über K' ist. Dabei liefern zwei Typen \mathfrak{A}/K' dann und nur dann denselben Typus \mathfrak{A}/K , wenn sie über K konjugiert sind.*

Danach sind wir berechtigt, uns auf den Fall zu beschränken, wo $\mathfrak{A}/\mathfrak{w}$ rein-inseparabel über \mathfrak{K} ist. Es handelt sich für uns nun darum, eine für die späteren Untersuchungen brauchbare Theorie der rein-inseparablen Erweiterungen eines beliebigen Körpers K der Charakteristik p zu entwickeln. Eine wichtige Invariante ist dabei der *Inseparabilitätsrang* λ der Erweiterung; darunter wollen wir die Minimalzahl von Elementen verstehen, die man zu K adjungieren muß, um die Erweiterung zu erzeugen. Es interessiert uns ferner die konstruktive Erzeugung einer solchen Darstellung durch genau λ adjungierte Elemente. Eine erste Antwort darauf gibt der

Satz 4. *Jede rein-inseparable Erweiterung L/K vom Inseparabilitätsrang λ läßt eine Darstellung*

$$L = K(a_1, \dots, a_\lambda)$$

mit den Eigenschaften

- I. $a_i^{q_i} = \alpha_i \in K(a_1^{q_i}, \dots, a_{i-1}^{q_i}), \quad (q_i = p^{e_i}),$
- II. $x^{q_i} - \alpha_i$ irreduzibel in $K(a_1, \dots, a_{i-1})[x],$
- III. $e_1 \geq \dots \geq e_\lambda > 0.$

zu. Die hierbei auftretenden Exponenten e_i sind invariant durch den Erweiterungstypus L/K bestimmt.

Zum Beweis zeigen wir zunächst, daß in einer solchen ausgezeichneten Darstellung, wie wir sie in Zukunft nennen wollen, immer e_i der Exponent von $L/K(a_1, \dots, a_{i-1})^2$ ist; denn zufolge I und III liegt die q_i -te Potenz jedes Elementes von L in $K(a_1, \dots, a_{i-1})$, und nach II liegt keine Potenz von a_i mit kleinerem Exponenten in $K(a_1, \dots, a_{i-1})$. Diese eben bewiesene Tatsache legt uns zum Zwecke des Existenzbeweises folgende Konstruktion nahe: Es sei L in der Form $K(a_1, \dots, a_\lambda)$ vorgegeben. Wir können dann die a so numerieren, daß a_i bzw. $K(a_1, \dots, a_{i-1})$ keinen kleineren Exponenten besitzt als die $a_{i+1}, \dots, a_\lambda$, so daß also dieser Exponent e_i von a_i bez. $K(a_1, \dots, a_{i-1})$ auch Exponent von $L/K(a_1, \dots, a_{i-1})$ ist. Es gilt nun $e_1 \geq \dots \geq e_\lambda$, und da aus $e_\lambda = 0$ $a_\lambda \in K(a_1, \dots, a_{\lambda-1})$, d. h. $L = K(a_1, \dots, a_{\lambda-1})$ folgte, was der Definition von λ widerspricht, ist die Eigenschaft III für unsere Darstellung bewiesen. Auch Eigenschaft II ist nach Definition von e_i erfüllt. Es ist also nur noch die Gültigkeit von I nachzuweisen. Diesen Nachweis liefern wir, indem wir für $1 \leq k \leq i-1$ aus

$$a_i^{q_i} \in K(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}^{q_{k+1}}, \dots, a_{i-1}^{q_{i-1}})$$

die Beziehung

$$a_i^{q_i} \in K(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k^{q_k}, \dots, a_{i-1}^{q_{i-1}})$$

²⁾ Zur Definition dieses Begriffes: van der Waerden [1], § 32.

herleiten. Zur Abkürzung setzen wir $h = i - k - 1$, $\frac{q_{k+l}}{q_i} = q^{(h)}$ ($l = 0, \dots, h$) und $K(a_1, \dots, a_{k-1}) = \bar{K}$. Offenbar gibt es eine Darstellung

$$a_i^{q_i} = \sum_{\substack{0 \leq l < q_k \\ 0 \leq m_r < q^{(r)}}} A_{l, m_1, \dots, m_h} a_k^l a_{k+1}^{q_i m_1} \dots a_{k+h}^{q_i m_h}, \quad A \in \bar{K},$$

und daraus folgt:

$$a_i^{q_i k} = \sum_{0 \leq e < q_i} F_e^q a_i^{eq}, \quad F_e = \sum_{0 \leq m_r < q^{(r)}} A_{e+m_0 q_i, m_1, \dots, m_h} a_k^{q_i m_0} \dots a_{k+h}^{q_i m_h}.$$

Da sowohl $a_i^{q_i k}$ wie F_e^q in \bar{K} liegen, ist $F_e = 0$ für $e > 0$. Unsere zu beweisende Behauptung ist nun gleichwertig mit dem Verschwinden sämtlicher $A_{e+m_0 q_i, m_1, \dots, m_h}$ für $e > 0$. Wären im Gegenteil für ein $e > 0$ nicht alle A gleich Null, so gäbe es ein nichtnegatives größtes s so, daß ein nichtverschwindendes A mit $m_s > 0$ vorkommt. Aus $F_e = 0$ würde dann folgen, daß $a_{k+s}^{q_i}$ über $\bar{K}(a_k^{q_i}, \dots, a_{k+s-1}^{q_i}) = \bar{K}$ einen Grad $< q^{(s)}$ hat. Da $a_{k+s}^{q_i}$ über \bar{K} rein-inseparabel ist, gäbe es also eine p -Potenz $\bar{q} < q^{(s)}$ mit $(a_{k+s}^{q_i})^{\bar{q}} \in \bar{K}$, was wegen $q_i \bar{q} < q_{k+s}$ der Bedeutung von q_{k+s} widerspricht. Damit ist jetzt auch die Existenz einer ausgezeichneten Darstellung bewiesen. Die Invarianz der e_i werden wir im nächsten Paragraphen (Satz 6) mit Hilfe von Begriffsbildungen aus der Theorie der nilpotenten Algebren zeigen.

Ist eine beliebige endliche algebraische Erweiterung L/K gegeben und K' der größte separable in L enthaltene Oberkörper von K , so wollen wir unter dem *Inseparabilitätsrang* und den *Exponenten* von L/K die eben definierten Invarianten λ und e_i von L/K' verstehen. Exponenten und Inseparabilitätsrang einer primären Algebra definieren wir dann als diese Begriffe für den Radikalrestklassenkörper.

Interessant und, wie wir sehen werden, für die Konstruktion der rein-inseparablen Erweiterungen notwendig ist nun noch die Betrachtung des Zusammenhanges unserer ausgezeichneten Darstellung mit dem von Teichmüller ([1], § 3) näher untersuchten Begriff der p -Unabhängigkeit. Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz. *Ist a in K von den Elementen der Menge M p -unabhängig, so ist in $K(a^{p^{-e}})$ auch $a^{p^{-e}}$ von M p -unabhängig, und zwei Elemente von M sind dann und nur dann in $K(a^{p^{-e}})$ p -abhängig, wenn sie es schon in K sind.*

Es genügt, den Satz für $e = 1$ zu beweisen, da er für allgemeines e daraus durch wiederholte Anwendung entsteht. Es sei also $L = K(a^{p^{-1}})$. Wäre nun $a^{p^{-1}}$ in L von M p -abhängig, so folgte:

$$a^{p^{-1}} \in L^p(M) = K^p(a, M) < K;$$

d. h. a wäre in K schon abhängig von der Nullmenge. Mit b, c aus M folgt trivialerweise aus $c \in K^p(b)$ die Beziehung $c \in L^p(b)$, und aus $c \in L^p(b) = K^p(a, b)$ ergibt sich, da a von b und c p -unabhängig ist, die p -Abhängigkeit des Elementes c von b in K , womit alle Behauptungen bewiesen sind.

Den gesuchten Zusammenhang stellt nun im wesentlichen der folgende Satz her:

Satz 5. *In Satz 4 kann die Forderung II ersetzt werden durch II': α_i ist in $K(a_1^{q_i}, \dots, a_{i-1}^{q_i})$ von den $a_1^{q_i}, \dots, a_{i-1}^{q_i}$ p -unabhängig.*

Aus II folgt II'; denn sei II' nicht richtig, also $\alpha_i \in K^p(a_1^{q_i}, \dots, a_{i-1}^{q_i})$, so folgt wegen p/q_i daraus $\alpha_i^{p^{-1}} \in K(a_1, \dots, a_{i-1})$. Das bedeutet aber gerade die Reduzibilität von $x^{q_i} - \alpha_i$ in $K(a_1, \dots, a_{i-1})[x]$. Umgekehrt folgt aus II' nach unserem Hilfssatz, daß α_i in $K(a_1, \dots, a_{i-1})$ von den a_1, \dots, a_{i-1} p -unabhängig ist, also nicht in $K^p(a_1, \dots, a_{i-1})$ und erst recht nicht in $K^p(a_1^{p_i}, \dots, a_{i-1}^{p_i})$ liegt. $\alpha_i^{p^{-1}}$ liegt also nicht in $K(a_1, \dots, a_{i-1})$: $x^{q_i} - \alpha_i$ ist irreduzibel, w. z. b. w.

Wir haben eben schon eine wichtige Folgerung aus II' abgeleitet: α_i ist in $K(a_1, \dots, a_{i-1})$ p -unabhängig von den a_1, \dots, a_{i-1} . Durch vollständige Induktion zeigen wir damit: In $K(a_1, \dots, a_i)$ sind die a_1, \dots, a_i p -unabhängig. Denn für $i = 1$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Gilt sie für $i - 1$, so sind also in $K(a_1, \dots, a_{i-1})$ die a_1, \dots, a_{i-1} , α_i p -unabhängig. Nach unserem Hilfssatz folgt daraus die zu beweisende Behauptung für i . Damit haben wir gezeigt, daß in L die a_1, \dots, a_1 p -unabhängig sind, daß also L einen Unvollkommenheitsgrad³⁾ $\geq \lambda$ hat. Nun ergibt sich leicht aus unserem Hilfssatz, daß der Unvollkommenheitsgrad eines Körpers bei endlicher rein-inseparabler Erweiterung unverändert bleibt. Es hat also auch K einen Unvollkommenheitsgrad $\geq \lambda$. Das führt uns zur Formulierung von

Satz 6. *Notwendig und hinreichend dafür, daß es über dem Körper K vom Unvollkommenheitsgrad λ eine rein-inseparable Erweiterung mit den Exponenten e_1, \dots, e_λ gibt, ist die Bedingung $\lambda \leq \Lambda$.*

Die Notwendigkeit der Bedingung haben wir bereits eingesehen. Daß die Bedingung hinreicht, zeigen wir, indem wir eine Konstruktionsanweisung geben, die nach dem bisher Festgestellten alle Erweiterungen mit den vorgegebenen Exponenten e_1, \dots, e_λ liefert: Zuerst wird α_1 als Element ausgewählt, das nicht in K^p liegt. Sind die $\alpha_1, \dots, \alpha_{\lambda-1}$ ($1 \leq \lambda$) bestimmt, so bestimmen wir α_λ so: $K(a_1^{q_1}, \dots, a_{\lambda-1}^{q_{\lambda-1}})$ hat als Erweiterung von K den Unvollkommenheitsgrad $\Lambda \geq \lambda$. Daher gibt es darin ein von den $a_1^{q_1}, \dots, a_{\lambda-1}^{q_{\lambda-1}}$

³⁾ Zu diesem Begriff siehe Teichmüller [1], § 3.

p -unabhängiges Element α_i . Daß diese Konstruktionsanweisung wirklich das Behauptete leistet, ist auf Grund des Gesagten klar.

Zu einer vorgegebenen rein-inseparablen Erweiterung gibt es nun im allgemeinen mehrere ausgezeichnete Darstellungen im Sinne von Satz 4. Bei vielen Untersuchungen in den folgenden Paragraphen wird es nicht möglich sein, die Ergebnisse invariant gegenüber dieser Willkürlichkeit in der Auswahl der ausgezeichneten Darstellungen zu formulieren. Es ist daher interessant festzustellen, daß diese Willkür an eine andere Stelle zurückverlegt werden kann: Wir nehmen den Körper K in irgendeiner beliebigen aber ein für allemal beibehaltenen Weise als wohlgeordnet an. In einer gegebenen Erweiterung L/K mit den Exponenten e_1, \dots, e_i erzeugen wir eine Wohlordnung, indem wir die Elemente von L wie ihre ihnen eineindeutig zugeordneten, in K liegenden q_i -ten Potenzen anordnen. Wählen wir dann sukzessive a_i ($i = 1, \dots, \lambda$) als das erste Element aus, welches bez. $K(a_1, \dots, a_{i-1})$ den Exponenten e_i hat, so überzeugt man sich leicht, daß $L = K(a_1, \dots, a_\lambda)$ gilt. Die so gewonnene, bei Vorgabe einer Wohlordnung von K eindeutig bestimmte ausgezeichnete Darstellung von L/K nennen wir *Normaldarstellung*. Ein Nachteil dieser Normaldarstellung liegt darin, daß es nicht möglich ist, in einfacher Weise eine Konstruktionsvorschrift für die Normaldarstellungen sämtlicher endlichen rein-inseparablen Erweiterungen von K anzugeben, wie das für die ausgezeichneten Darstellungen ja im Beweis von Satz 6 geschehen ist.

§ 2.

Allgemeines über nilpotente Algebren.

Wir führen in einer beliebigen Algebra die Potenzierung eines Moduls A rekursiv durch die Formel

$$(2.1) \quad A^1 = A, \quad A^m = \sum_{i=1}^{m-1} A^i A^{m-i}$$

ein. Ist die Algebra assoziativ, so geht (2.1) in die bekannte Form $A^m = A^{m-1}A$ über, während im allgemeinen nur

$$(2.2) \quad A^{m-1}A \leq A^m$$

gilt. Eine Algebra \mathfrak{A} , für die statt (2.2) die schärfere Relation

$$(2.3) \quad \mathfrak{A}^{m-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^m$$

gilt, wollen wir *halbassoziativ* nennen. Speziell ist also jede assoziative Algebra halbassoziativ.

Eine Algebra \mathfrak{w} (von der wir vorläufig weder Kommutativität noch Assoziativität voraussetzen) über den beliebigen Grundkörper K heißt nach

Wedderburn (a. a. O., S. 111) *nilpotent vom Index* r , wenn $w^{r-1} > w^r = 0$ gilt. Sei n_i der Rang von $w^i \bmod w^{i+1}$ ($i = 1, \dots, r-1$). Dann wollen wir das $(r-1)$ -tupel (n_1, \dots, n_{r-1}) als *Geschlecht*⁴⁾ der Algebra einführen.

Mit $n = \sum_{i=1}^{r-1} n_i$ gilt nach Frobenius (a. a. O., S. 640) die Abschätzung

$$(2.4) \quad r \leq n + 1.$$

Wir setzen aus formalen Gründen noch $n_0 = 0$ und verstehen unter (k) für ein ganzes k der Reihe $1, \dots, n$ diejenige Zahl i , für die

$$n_0 + \dots + n_{i-1} < k \leq n_0 + \dots + n_i$$

gilt. Man sieht sofort die Existenz einer Basis w_1, \dots, w_n für w ein, die so beschaffen ist, daß die w_k mit $(k) \geq i$ eine Basis für w^i bilden. Nach Hazlett, die (a. a. O., § 3) die Existenz einer solchen Basis mit Hilfe eines Theorems von Wedderburn beweist, bezeichnen wir eine solche Basisdarstellung als *kanonische Form* von w . Wir behaupten nun den

Satz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß das System a_{ik}^l ($i, k, l = 1, \dots, n$) von Elementen aus einem Körper K die Multiplikationstafel der kanonischen Form einer beliebigen bzw. halbassoziativen nilpotenten Algebra über K vom Geschlecht (n_1, \dots, n_{r-1}) mit $n = \sum_{i=1}^{r-1} n_i$ darstellt, sind die Bedingungen*

$$\text{I. } a_{ik}^l = 0 \quad \text{für} \quad (i) + (k) > (l),$$

II. *Die mit (i, k) als Zeilen- und l als Spaltenindex gebildete Matrix*

$$A_m = (a_{ik}^l)_{(l)=m, (i)+(k)=m}$$

bzw. ihre Untermatrix

$$A'_m = (a_{ik}^l)_{(l)=m; (i)=m-1, (k)=1}$$

hat den Rang n_m ($m = 1, \dots, r-1$).

Bedingung I muß trivialerweise bei kanonischer Darstellung erfüllt sein. Die Notwendigkeit von II ergibt sich unter Beachtung von (2.1) bzw. (2.3) aus der Tatsache, daß in der kanonischen Form die w_i mit $(i) \geq m$ eine Basis von w^m bilden. Seien nun die Bedingungen I, II erfüllt. Wir betrachten die durch $w_i w_k = \sum_{l=1}^n a_{ik}^l w_l$ definierte Algebra $w = Kw_1 + \dots + Kw_n$. Offenbar stellt wegen I der durch die w_i mit $(i) \geq m$ erzeugte Modul eine Unter algebra w_m von w dar, für die $w^m \leq w_m$ gilt. Aus Bedingung II schließen wir, daß mod w_{m+1} jedes Element von w_m in $\sum_{i=1}^{m-1} w_i w_{m-i}$ liegt,

⁴⁾ Hazlett (a. a. O., § 6) bezeichnet $(r; n_1, \dots, n_{r-1})$ als *génus*.

und mit der aus I folgenden Beziehung $\sum_{i=1}^{m-1} w_i w_{m-i} \leq w_m$ erhalten wir daraus:

$$(2.5) \quad w_m = \sum_{i=1}^{m-1} w_i w_{m-i} + w_{m+1}.$$

Wir beweisen nun durch vollständige Induktion die Formel $w_m = w^m + w_{m+1}$. Für $m = 1$ ist sie trivialerweise richtig. Sie sei bis $m - 1$ bewiesen. Nach (2.5) ist dann

$$w_m = \sum_{i=1}^{m-1} (w^i + w_{i+1}) (w^{m-i} + w_{m-i+1}) + w_{m+1},$$

und wegen $w^i \leq w_i$ und $w_i w_{m-i+1} \leq w_{m+1}$ folgt daraus

$$w_m = \sum_{i=1}^{m-1} w^i w^{m-i} + w_{m+1} = w^m + w_{m+1}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Durch sukzessive Anwendung dieser Formel erhalten wir schließlich wegen $w_r = 0$ als Ergebnis $w_m = w^m$, womit gezeigt ist, daß w nilpotent vom Geschlecht (n_1, \dots, n_{r-1}) ist. Setzen wir voraus, daß auch A'_m den Rang n_m hat, so erhalten wir auf dieselbe Art wie (2.5) noch die Beziehung $w_m = w_{m-1} w + w_{m+1}$, also $w^m = w^{m-1} w + w^{m+1}$, und daraus durch sukzessive Anwendung wegen $w^r = 0$ schließlich $w^m = w^{m-1} w$, womit wir bewiesen haben, daß in diesem Falle w halbassoziativ ist.

Ehe wir zu spezielleren Typen nilpotenter Algebren übergehen, führen wir noch eine neue Bezeichnung ein: Die Rangzahl n_1 nennen wir den *Defekt*⁵⁾ von w und bezeichnen sie mit δ .

Gibt es für die Algebra w eine spezielle kanonische Form mit $a'_{ik} = 0$ für $(i) + (k) = (l)$, so soll w *Diagonalalgebra* heißen, und wir wollen unter einer kanonischen Form von w stets eine der eben beschriebenen speziellen Art verstehen. Man sieht leicht ein, daß unsere spezielle kanonische Form dasselbe ist, was Hazlett (a. a. O., § 8) „special“ canonical form nennt. Die von uns gewählte Bezeichnung „Diagonalalgebra“ wird verständlich durch den einem Theorem von Hazlett (a. a. O., § 8) zu entnehmenden

Hilfssatz. Zwei kanonische Formen einer Diagonalalgebra gehen stets durch eine Basistransformation mit einer der Bedingung

$$a'_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad (i) \neq (k)$$

genügenden Matrix auseinander hervor.

Wir bemerken noch, daß die Algebren mit $r \leq 3$ assoziative Diagonalalgebren sind, weil nämlich in der kanonischen Form trivialerweise $a'_{ik} = 0$ für $(i) + (k) \neq (l)$ ist, und das Produkt von drei Elementen stets verschwindet. Die Diagonalalgebren sind deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil es bei

⁵⁾ Bei Scorza [2] findet sich die Bezeichnung „scarto“.

ihnen leicht gelingt, das Strukturproblem auf bekannte algebraische Probleme zurückzuführen. So gilt nach Hazlett (a. a. O., § 16) der

Satz 2. Für die Diagonalalgebren mit der Multiplikationstafel $a_{i_k}^i$ und dem Geschlecht (n_1, \dots, n_{r-1}) wird ein vollständiges Isomorphieinvariantensystem gegeben durch die Invarianten der linearen Tensorscharen

$$\lambda_1 T'_{i_1, \dots, i_m} + \dots + \lambda_{n_m} T^{(n_m)}_{i_1, \dots, i_m} \quad (m = 2, \dots, r-1),$$

wo

$$T^{(k)}_{i_1, \dots, i_m} = \sum_{k_1, \dots, k_{m-2}} a_{i_1 i_2}^{k_1} a_{k_1 i_3}^{k_2} \dots a_{k_{m-2} i_m}^{k_{m-1}}$$

$(i_1, \dots, i_m = 1, \dots, \delta)$ ein in bezug auf die Transformation der w_1, \dots, w_δ m -fach kovarianter Tensor ist.

Da die Formulierung unseres Satzes etwas von der bei Hazlett abweicht, wollen wir den Beweis kurz skizzieren. Nach unserem oben erwähnten Satzesatz können wir uns beim Aufsuchen von Invarianten auf die Gruppe derjenigen Basistransformationen beschränken, die die w_i mit $(l) = m$ nur unter sich transformieren. Wir bilden den Ausdruck

$$(2.6) \quad \prod_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\delta} x_i^{(k)} w_i = \sum_{k=1}^{n_m} W_k \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\delta} T^{(k)}_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m}^{(m)},$$

worin zur Abkürzung die w_i mit $(l) = m$ durch W_k ($k = 1, \dots, n_m$) bezeichnet worden sind. Dieser Ausdruck ist nun auf Grund seiner Bedeutung isomorphieinvariant, sobald die $x_i^{(k)}$ kontragredient zu den w_1, \dots, w_δ transformiert werden. Das aber ergibt gerade die Invarianz der in Satz 2 aufgestellten Tensorscharen. Umgekehrt ergibt sich aus der Gleichheit der Tensorscharen zweier Algebren die Gleichheit der entsprechenden Ausdrücke (2.6). Da nun aber die Multiplikationstafel einer Algebra in kanonischer Form völlig durch die Angabe des Produktes von m allgemeinen Elementen des Moduls $Kw_1 + \dots + Kw_\delta$ ($m = 2, \dots, r-1$) bestimmt ist, ist damit auch die Isomorphie der vorgelegten Algebren gezeigt, w. z. b. w.

Hazlett bildet (a. a. O., § 11) statt der Ausdrücke (2.6) die m -te Potenz des allgemeinen Elementes des Moduls $Kw_1 + \dots + Kw_\delta$ und kommt so auf eine Form m -ten Grades (the fundamental m -ic). Da sie stillschweigend den Grundkörper als Körper der Charakteristik 0 annimmt, kommt sie mit diesen Formen aus, da man ja — sobald nur die Charakteristik $> m$ oder $= 0$ ist — ein Produkt von m Elementen bis auf einen Zahlenfaktor stets als algebraische Summe m -ter Potenzen von algebraischen Summen der m Elemente darstellen kann. Da wir aber hier keine Einschränkung bez. des Grundkörpers machen wollen, können wir diesen Weg (der im allgemeinen abgesehen von $p = 0$ nur für $p \geq r$ gangbar ist) nicht gehen und sehen dann in dem Begriff des Tensors (als Verallgemeinerung des Matrixbegriffes) das naturgemäße Beschreibungsmittel.

Bei den kommutativ-assoziativen Algebren können wir die kanonische Form noch weitgehend spezialisieren:

Satz 3. *Zu einer kommutativ-assoziativen nilpotenten Algebra gibt es eine ausgezeichnete kanonische Form, in der sämtliche Basiselemente Potenzprodukte der w_1, \dots, w_s sind. Genauer: die w_i mit $(i) = m$ sind Potenzprodukte m -ten Grades.*

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach m . Für $m = 1$ ist die Behauptung trivial. Die Basis sei nun bereits so gewählt, daß die Behauptung für die w_i mit $(i) < m$ richtig ist. Speziell sind also die w_i mit $(i) = m - 1$, die wir für den Augenblick mit $W_1, \dots, W_{n_{m-1}}$ bezeichnen, Potenzprodukte $(m - 1)$ -ten Grades. Die Elemente von w^{m-1} sind nun mod w^m von den W_i linear abhängig, und da die Elemente von w mod w^2 linear von den w_1, \dots, w_s abhängen, hängen die Elemente von w^m mod w^{m+1} linear von den $W_i w_k$ ($i = 1, \dots, n_{m-1}$; $k = 1, \dots, s$) ab, die nun Potenzprodukte m -ten Grades sind. Wir brauchen unter diesen also nur n_m linear unabhängige auszuwählen und als Basiselemente w_i mit $(i) = m$ einzusetzen, um die behauptete Spezialisierung auch für $(i) = m$ durchgeführt zu haben, w. z. b. w.

Da die Anzahl der Potenzprodukte i -ten Grades gleich der Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von δ Elementen zur i -ten Klasse ist, erhalten wir aus dieser spezialisierten Basisdarstellung die von Scorza [2] gefundene Ungleichung

$$(2.7) \quad n_i \leq \binom{\delta + i - 1}{\delta - 1}$$

für kommutativ-assoziative Algebren. Diese Ungleichung liefert bei vorgegebenem Defekt δ wirklich die günstigste Abschätzung für n_i : Es existiert nämlich die von Scorza [3] untersuchte „Algebra von maximalem Rang“ mit $n_i = \binom{\delta + i - 1}{\delta - 1}$.

Die Betrachtungen von Satz 3 führen uns nun zu einer neuen Art der Beschreibung bei den kommutativ-assoziativen Algebren. Offenbar existieren zwischen den Potenzprodukten m -ten Grades der w_1, \dots, w_s genau $\bar{n}_m = \binom{\delta + m - 1}{\delta - 1} - n_m$ ($m = 2, \dots, r - 1$) linear unabhängige Relationen, die sich als homogene Gleichungen m -ten Grades in den w_i schreiben lassen:

$$f'_m(w_1, \dots, w_s) = 0, \dots, f_m^{(n_m)}(w_1, \dots, w_s) = 0.$$

Umgekehrt ist durch Angabe der auf den linken Seiten dieser Gleichungen stehenden Formen m -ten Grades die Multiplikationstafel der Algebra eindeutig bestimmt. Diese Formen bezeichnen wir als **Fundamentalfornen m -ten Grades** der Algebra. Es gilt der

Satz 4. Für die kommutativ-assoziativen Diagonalalgebren bilden die Invarianten der aus den Fundamentalformen m -ten Grades gebildeten linearen Scharen

$$\lambda_1 f'_m + \dots + \lambda_{\bar{n}_m} f_m^{(\bar{n}_m)} \quad (m = 2, \dots, r-1)$$

ein vollständiges Isomorphieinvariantensystem.

Der Beweis ist auf Grund der Definition der Fundamentalformen und des obenerwähnten Hilfssatzes über Diagonalalgebren selbstverständlich. Als interessante Anwendung von Satz 2 und 4 beachten wir noch, daß sich in den Fällen $p = 0$ und $p \geq r$ (p die Charakteristik des Grundkörpers) das Strukturproblem sowohl der Algebren vom Geschlecht $(\delta, n_2, \dots, n_{r-1})$ wie der vom Geschlecht $(\delta, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_{r-1})$, welches wir als das zum Geschlecht $(\delta, n_2, \dots, n_{r-1})$ komplementäre bezeichnen wollen, auf ein und dasselbe algebraische Problem zurückführen läßt, nämlich auf die Bestimmung der Invarianten von $r-2$ linearen Scharen $\lambda_1 f'_m + \dots + \lambda_{n_m} f_m^{(n_m)}$ ($m = 2, \dots, r-1$), wo die $f_m^{(k)}$ Formen m -ten Grades in δ Veränderlichen sind. Für die Algebren vom Geschlecht $(\delta, n_2, \dots, n_{r-1})$ sind dabei die Koeffizientensysteme der $f_m^{(k)}$ die Tensoren m -ter Stufe von Satz 2 (die ja in den Fällen $p = 0$ und $p \geq r$ durch Formen m -ten Grades ersetzt werden können), für die Algebren vom Geschlecht $(\delta, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_{r-1})$ dagegen stellen $f_m^{(k)}$ nach Satz 4 die Fundamentalformen m -ten Grades dar.

Neben dem Index r betrachten wir noch den Elementindex \bar{r} , der dadurch definiert ist, daß für jedes $w \in \mathfrak{w}$ $w^{\bar{r}} = 0$ gilt, es aber ein $w_0 \in \mathfrak{w}$ mit $w_0^{\bar{r}-1} \neq 0$ gibt. Frobenius (a. a. O., S. 640) bemerkte bereits, daß für die Algebren über Zahlkörpern immer $r = \bar{r}$ ist. Wir beweisen hier allgemein den

Satz 5. In einer kommutativ-assoziativen Algebra vom Index r über einen Körper K von Charakteristik 0 oder Primzahlcharakteristik $p \geq r$ ist immer der Elementindex $\bar{r} = r$.

Angenommen, es sei $\bar{r} < r$. Dann ist $(\sum_{i=1}^n x_i w_i)^{r-1} = 0$ für alle x_i aus K .

Wir erhalten also, wenn wir

$$\frac{(r-1)!}{i_1! \dots i_n!} w_1^{i_1} \dots w_n^{i_n} = \sum_{k=1}^n w_k A_{i_1, \dots, i_n}^{(k)}$$

setzen: Die Formen $(r-1)$ -ten Grades

$$\sum_{i_1 + \dots + i_n = r-1} A_{i_1, \dots, i_n}^{(k)} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \quad (k = 1, \dots, n)$$

verschwinden in K identisch. Nach Voraussetzung hat nun K mindestens r Elemente, weshalb wir $A_{i_1, \dots, i_n}^{(k)} = 0$ erhalten. Da in den Polynomkoeffizienten $\frac{(r-1)!}{i_1! \dots i_n!}$ nur Primzahlen $< r$ aufgehen, sind diese nicht

durch die Charakteristik p teilbar; es folgt also $w_1^{i_1} \dots w_n^{i_n} = 0$ für $i_1 + \dots + i_n = r - 1$, was aber der Definition von r widerspricht.

Für $r \geq 3$ führen wir noch den *reduzierten Defekt* δ_0 ein, und zwar als Rang von $w \bmod (n: w^{r-2})$, wo n das Nullideal bedeutet. Wegen $w : n: w^{r-2} \cong w^2$ ist $0 < \delta_0 \leq \delta$. Um den Anschluß unserer Bezeichnungsweise an idealtheoretische Festsetzungen zu gewinnen, betrachten wir den Fall, wo w Radikal — also Primideal — einer primären Algebra \mathfrak{A} ist. Dann ist $n: w^{r-2}$ das Glied l_{r-2} in der bei Gröbner (a. a. O., S. 200) betrachteten Kompositionsreihe l_0, \dots, l_r und δ_0 nach der dortigen Terminologie die Länge der $(r - 2)$ -ten Stufe. Besondere Wichtigkeit kommt dem reduzierten Defekt für $r = 3$ zu, da dann ja $n: w^{r-2} = n: w$ genau die Elemente enthält, die die Algebra w annullieren.

Zum Schluß des Paragraphen betrachten wir noch eine Anwendung unserer Begriffsbildungen auf folgendes Problem: Gegeben eine rein-inseparable Erweiterung L eines Körpers K der Charakteristik p . K wird zu einem Zerfällungskörper M von L/K erweitert, d. h. in $M[x]$ zerfällt jedes irreduzible Polynom aus $K[x]$, das in L eine Nullstelle besitzt, vollständig in Linearfaktoren, was wegen der Normalität von L/K dasselbe bedeutet wie die Forderung: M/K ist dem Typus nach Erweiterungskörper von L . Dadurch entsteht aus L/K eine Algebra L_M über M , nach deren Struktur nun gefragt wird. Diese Frage beantwortet

Satz 6. *Ist M Zerfällungskörper der rein-inseparablen Erweiterung L/K der Charakteristik p mit den Exponenten e_1, \dots, e_k , so ist L_M/M eine primäre Algebra, deren Radikalrestklassenkörper mit M zusammenfällt. Zwischen dem Geschlecht $(\delta, n_2, \dots, n_{r-1})$ ihres Radikals und den Exponenten e_1, \dots, e_k besteht ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang. Insbesondere ist $\delta = \lambda$,*

$$r = \sum_{i=1}^k (p^{e_i} - 1) + 1 \text{ und der Elementindex } \bar{r} = p^{e_1}.$$

Zum Beweis betrachten wir eine nach § 1, Satz 4 vorhandene ausgezeichnete Darstellung $L = K(a_1, \dots, a_k)$. In M existiert nun nach Voraussetzung die q_1 -te Wurzel β_i aus dem in K liegenden Element $a_i^{q_1}$. Da die $a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k}$ ($0 \leq i_k < q_k$) eine Basis für L_M/M bilden, gilt dasselbe auch für die mit den $w_i = a_i - \beta_i$ gebildeten Produkte $w_1^{i_1} \dots w_k^{i_k}$ ($0 \leq i_k < q_k$).

Wegen $w_i^{q_i} = 0$ bilden die w -Produkte mit $\sum_{k=1}^k i_k \geq 1$ eine Basis für das Radikal w von L_M . Der Rang von L_M/w ist daher $= 1$, woraus $L_M/w = M$ folgt; L_M ist also primär. Da $w_1^{q_1-1}$ als Basiselement von Null verschieden ist, folgt wie behauptet $\bar{r} = q_1$. Aus $a_i^{q_i} \in K(a_1^{q_1}, \dots, a_{i-1}^{q_{i-1}})$ ergeben sich nun Relationen $w_i^{q_i} = F_i(w_1^{q_1}, \dots, w_{i-1}^{q_{i-1}})$, wo $F_i(x_1, \dots, x_{i-1})$ ein Polynom aus $M[x_1, \dots, x_{i-1}]$ ist, welches in x_k höchstens den Grad $\frac{q_k}{q_i} - 1$ besitzt,

Ist nämlich $w = Kw_1 + \dots + Kw_n$ eine beliebige kommutativ-assoziative nilpotente Algebra, so ist $\mathfrak{A} = K + Kw_1 + \dots + Kw_n$ eine primäre Algebra mit \mathfrak{R} als Radikalrestklassenkörper (also $\lambda = 0$) und w als Radikal. Sei nun \mathfrak{A}' eine andere primäre Algebra über K mit $\lambda = 0$ und dem Radikal $w' \cong w$. Da aus $\lambda = 0$ $\mathfrak{A}'/w' = \mathfrak{R}$, d. h. Rang des Radikalrestklassenkörpers $= 1$, folgt, bildet $1, w'_1, \dots, w'_n$, wo w'_i das dem w_i durch den Isomorphismus $w' \cong w$ zugeordnete Element ist, eine Basis für \mathfrak{A}'/K , und durch $1 \longleftrightarrow 1, w'_i \longleftrightarrow w_i$ wird ein Isomorphismus $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{A}$ hergestellt, w. z. b. w.

Für den Fall $\lambda = 0$, durch den speziell alle Algebren über vollkommenen Körpern erfaßt werden, ist also unser Strukturproblem zurückgeführt auf das Strukturproblem der nilpotenten Algebren. Für $\lambda > 0$ liegt die Sache nicht so einfach: Wir wissen (Deuring, a. a. O., I, § 11), daß es im allgemeinen in \mathfrak{A} kein relationstreues Repräsentantensystem für \mathfrak{A}/w gibt, welches Oberkörper von K ist. Man kann nun aber, indem man die Elemente einer Basis von \mathfrak{A}/w über \mathfrak{R} irgendwie repräsentiert, stets additionstreue Repräsentantensysteme angeben, die dazu noch die Eigenschaft haben, daß die Restklassen der Elemente von K durch eben diese Elemente selbst repräsentiert werden. Unter „Repräsentantensystem“ wollen wir in der Folge stets nur ein System mit diesen Eigenschaften verstehen, was uns speziell auch dazu berechtigt, der Einfachheit halber die Elemente von \mathfrak{R} mit den entsprechenden Elementen von K zu identifizieren. Die Willkürlichkeit in der Wahl der Repräsentanten einer Basis von \mathfrak{A}/w über K benutzen wir nun dazu, die Verletzung der Multiplikationstreue auf ein Mindestmaß zu beschränken. Es sei

$$(3.1) \quad \mathfrak{A}/w = K(a_1, \dots, a_i)$$

eine ausgezeichnete Darstellung (§ 1, Satz 4). Wir bestimmen a_i irgendwie als Repräsentanten von α_i und nehmen dann $a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$ als Repräsentanten des Elementes $\alpha_1^{i_1} \dots \alpha_n^{i_n}$ ($0 \leq i_k < q_k$) der durch diese Produkte gebildeten Basis von \mathfrak{A}/w . Ein solches Repräsentantensystem, das also nur noch von der Wahl der a_i abhängt, wollen wir *normal* nennen. Diese Eigenschaft hängt aber, wie man sich leicht klarmacht, durchaus von der Wahl der ausgezeichneten Darstellung (3.1) ab. Wir wollen daher, um die folgenden Untersuchungen von der in der Wahl dieser Darstellung liegenden Willkür unabhängig durchführen zu können, unter R ein nicht notwendig normales Repräsentantensystem verstehen. Das für ein beliebiges Element a von \mathfrak{A} eindeutig bestimmte, zu $a \bmod w$ kongruente Element von R bezeichnen wir im folgenden mit $R(a)$. Es sei nun n_i der Rang von w^i/w^{i+1} ($i = 1, \dots, r-1$), r der Index von w , der auf Grund der Indexdefinition für beliebige Algebren (Wedderburn, a. a. O., S. 87) auch Index von \mathfrak{A} ist, und $n = \sum_{i=1}^{r-1} n_i$ also der

Rang von w , während N den Rang von \mathfrak{A}/w bezeichne. Wir setzen nun $\frac{n_i}{N} = m_i$, $m = \frac{n}{N} = \sum m_i$ und definieren das Symbol (k) wie in § 2, nur daß hier an Stelle der n, n_i die m, m_i treten. Dann behaupten wir

Satz 2. Die m_i sind ganz, und es gibt in w m Elemente w_1, \dots, w_m , so daß

1. jedes Element von w auf eine und nur eine Weise in der Form $\sum a_i w_i$ ($a_i \in R$) dargestellt werden kann,
2. in der Darstellung $w_i w_k = \sum a_{ik}^i w_i$ ($a_{ik}^i \in R$) die a_{ik}^i mit $(i) + (k) > (l)$ verschwinden.

Da $R \bmod w$ ein Erweiterungskörper vom Grade N über K ist, kann wegen $R \cdot w^i = w^i$ der K -Modul w^i/w^{i+1} als R -Modul vom Range r_i aufgefaßt werden. Da w^i/w^{i+1} über K den Rang n_i hat, ist $n_i = r_i N$, also $r_i = m_i$, womit die Ganzheit der m_i nachgewiesen ist. Eine Basis des R -Moduls w^i/w^{i+1} können wir dann durch w_k mit $(k) = i$ bezeichnen. Wir behaupten, daß das so entstandene System w_1, \dots, w_m die Eigenschaften 1. und 2. besitzt. Da sich jedes Element von $w^i \bmod w^{i+1}$ als Linearkombination der w_k mit $(k) = i$ mit Koeffizienten aus R darstellt, zeigt man durch Induktion nach $r - i$ leicht, daß sich ein Element von w^i stets als Linearkombination der w_k mit $(k) \geq i$ darstellen läßt. Es gibt daher speziell für jedes Element von w eine Darstellung $\sum a_k w_k$ ($a_k \in R$). Daß es nur eine solche Darstellung gibt, sehen wir so: Sei im Gegenteil $\sum a_k w_k = 0$ und a_{k_0} mit $(k_0) = i$ das erste nicht verschwindende a_k , so folgt $\sum_{(k)=i} a_k w_k \equiv 0 \bmod w^{i+1}$, was wegen $a_{k_0} \neq 0$ ein Widerspruch gegen die Konstruktionsvorschrift der w_k ist. Damit ist die Eigenschaft 1. als erfüllt nachgewiesen. Um 2. zu beweisen, bedenken wir, daß w_i in $w^{(i)}$, w_k in $w^{(k)}$, also $w_i w_k$ in $w^{(i)+(k)}$ liegt. Nach dem bisher Bewiesenen wird also $w_i w_k$ als Linearkombination nur der w_l mit $(l) \geq (i) + (k)$ dargestellt, woraus sofort die Eigenschaft 2. folgt, w. z. b. w.

Ein den Bedingungen 1., 2. genügendes m -tupel w_1, \dots, w_m wollen wir R -Basis nennen. Man sieht leicht ein, daß die beim Beweis von Satz 2 angewandte Konstruktionsvorschrift wirklich alle R -Basen liefert. w_1, \dots, w_m ist also dann und nur dann R -Basis, wenn die w_k mit $(k) = i$ eine Basis von $w^i \bmod w^{i+1}$ bez. R bilden. Auf Grund dieser Bemerkung beweisen wir den

Hilfssatz. Notwendig und hinreichend dafür, daß die $\bar{w}_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} w_k$ ($i = 1, \dots, m$), wo w_1, \dots, w_m R -Basis ist und die a_{ik} in R liegen, wieder eine R -Basis bilden, sind die Bedingungen:

- I. $|a_{ik}| \neq 0 \bmod w$,
- II. $a_{ik} = 0$ für $(i) > (k)$.

Denn die w_i mit $(i) = h$ bilden dann und nur dann mod w^{h+1} eine Basis von w^h bez. R , wenn sie alle in w^h liegen, also $a_{ik} = 0$ für $(k) < h$ ist, und — nach den bekannten Gesetzen der linearen Abhängigkeit —

$$\Delta_h = |a_{ik}|_{(i)=(k)=h} \neq 0 \bmod w$$

ist. Da nun aber $|a_{ik}| = \Delta_1 \dots \Delta_{r-1}$ gilt, ist damit alles bewiesen.

Ist nun eine bestimmte R -Basis mit der Multiplikationstafel a_{ik}^i vorgegeben und ist a_{ik}^i die Restklasse von a_{ik}^i , so wird durch $W_i W_k = \sum a_{ik}^i W_i$ eine Algebra \mathfrak{B} über \mathfrak{A}/w mit der Basis W_1, \dots, W_m definiert. Die so entstehenden Algebren bezeichnen wir als zu \mathfrak{A} zugeordnet. Es gilt der

Satz 3. *Die zugeordneten Algebren sind kommutativ-halbassoziativ und nilpotent vom Geschlecht (m_1, \dots, m_{r-1}) .*

Die Kommutativität ist trivial. Um den Rest des Satzes zu beweisen, gehen wir so vor: Da die Elemente von w^h als Produkte von Elementen aus w^{h-1} mit Elementen aus w darstellbar sind, lassen sich die w_i mit $(i) = h \bmod w^{h+1}$ als Linearkombinationen der Produkte der w_i $((i) = h-1)$ mit den w_1, \dots, w_{m_1} darstellen. Deshalb hat die Matrix $(a_{ik}^i)_{(i)=h-1, (k)=1; (l)=h}$ den Rang m_h . Dasselbe gilt daher auch für die Matrix

$$A_m = (a_{ik}^i)_{(i)=h-1, (k)=1; (l)=h}$$

Nach § 2, Satz 1 ist also \mathfrak{B} halbassoziativ und nilpotent vom Geschlecht (m_1, \dots, m_{r-1}) , w. z. b. w.

Den nach diesem Satz durch \mathfrak{A} allein bestimmten Defekt $\delta = m_1$ der zugeordneten Algebren bezeichnen wir als *Defekt von \mathfrak{A}* und können den bisher nicht definierten Fall $\delta = 0$ sinngemäß dahin deuten, daß \mathfrak{A} kein Radikal besitzt. Für die Strukturtheorie von \mathfrak{A} haben nun die zugeordneten Algebren nur dann wesentliche Bedeutung, wenn ihr Typus durch \mathfrak{A} allein schon eindeutig bestimmt ist. Auskunft darüber gibt der

Satz 4. *Der Typus von $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^3$ ist durch \mathfrak{A} eindeutig bestimmt, während dies für $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^4$ im allgemeinen nicht der Fall ist.*

Beim Beweis beachten wir, daß im allgemeinen \mathfrak{B} bei vorgegebenem \mathfrak{A} noch von zwei Faktoren abhängt: von R und der R -Basis. Wir zeigen zunächst die Invarianz des Typus von $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^3$ bei der Ersetzung von R durch ein anderes Repräsentantensystem R' , wobei wir die R -Basis w_1, \dots, w_m als R' -Basis beibehalten wollen. Zunächst ist hierzu zu zeigen, daß die w_1, \dots, w_m auch wirklich eine R' -Basis bilden: Da R mit R' mod w übereinstimmt, bilden die w_k mit $(k) = i$ auch bez. R' eine Basis von $w^i \bmod w^{i+1}$, womit nach einer auf Seite 232 gemachten Bemerkung die Behauptung als richtig erkannt ist. Durch R' und w_1, \dots, w_m als R' -Basis werde nun eine Algebra \mathfrak{B}' mit der Multiplikationstafel b_{ik}^i erzeugt. Aus $w_i w_k = \sum_{(l) \leq h} b_{ik}^l w_l$ für $(i) + (k) = h$ folgt nun $w_i w_k \equiv \sum_{(l)=h} R(b_{ik}^l) w_l \bmod w^{h+1}$, also $a_{ik}^h = R(b_{ik}^h)$

und damit $a'_{ik} = b'_{ik}$ für $(i) + (k) = (l)$. Da es für die Struktur von $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^3$ und $\mathfrak{B}'/\mathfrak{B}'^3$ aber nur auf die a'_{ik} bzw. b'_{ik} mit $(i) = 1, (k) = 1, (l) = 2$ ankommt, folgt $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^3 \cong \mathfrak{B}'/\mathfrak{B}'^3$, w. z. b. w. Wir lassen jetzt das Repräsentantensystem R ungeändert und nehmen statt w_1, \dots, w_m mit der Multiplikationstafel a'_{ik} eine andere R -Basis $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m$ mit der Multiplikationstafel \bar{a}'_{ik} , durch die die Algebra $\bar{\mathfrak{B}}$ mit der Multiplikationstafel \bar{a}'_{ik} erzeugt werde. Hängen nun die beiden R -Basen durch die Formel $\bar{w}_i = \sum c_{ik} w_k$ zusammen, so erhalten wir mit

$$A'_{ik} = \sum_r \bar{a}'_{ik} c_{r,l} - \sum_{s,t} c_{is} c_{kt} a'_{st}$$

die Beziehung $\sum_l A'_{ik} w_l = 0$. Nun ist nach unserem Hilfssatz aber $c_{ik} = 0$ für $(i) > (k)$, und wegen $\bar{a}'_{ik} = a'_{ik} = 0$ für $(i) + (k) > (l)$ folgt daraus $A'_{ik} = 0$ für $(l) = 1$. Aus $\sum_{(l) \geq 2} A'_{ik} w_l = 0$ erhalten wir nun $R(A'_{ik}) = 0$ und daraus $A'_{ik} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}}$ für $(l) = 2$, also für $(i) = (k) = 1$ (den einzigen für $(l) = 2$ nichttrivialen Fall):

$$(3.2) \quad \sum_{(r)=2} \bar{a}'_{ik} c_{r,l} = \sum_{(s)=(t)=1} c_{is} c_{kt} a'_{st},$$

wo die c_{ik} wieder die Restklassen der c_{ik} bezeichnen. Da nun nach unserem Hilfssatz $|c_{ik}| \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}}$, also speziell $A_1 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}}$ und $A_2 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}}$ ist, haben wir $|a_{ik}|_{(i) \leq 2, (k) \leq 2} \not\equiv 0$, weswegen (3.2) gerade die zu beweisende Isomorphie von $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^3$ und $\mathfrak{B}'/\mathfrak{B}'^3$ ausdrückt.

Wir zeigen jetzt an einem Gegenbeispiel, daß $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^4$ im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist. \mathfrak{A} sei die durch $1, a, w_1, w_2$ mit den definierenden Relationen $a^2 = \alpha + w_1$ ($\alpha \in K$), $w_1^2 = w_1 w_2 = w_2^2$, $w_1^4 = w_2^4 = 0$ erzeugte kommutativ-assoziative Algebra über einem Körper K der Charakteristik 2, in dem α kein Quadrat ist. Man rechnet leicht nach, daß \mathfrak{A} primär ist mit $K(\sqrt{\alpha})$ als Radikalrestklassenkörper und $(2, 1, 1)$ als Geschlecht der zugeordneten Algebren. Für den Radikalrestklassenkörper nehmen wir die ausgezeichnete Darstellung

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{w} = K(a), \quad a^2 - \alpha = 0$$

und bestimmen, indem wir a als Repräsentanten von a angeben, ein normales Repräsentantensystem R . Offenbar bilden dann die $w_1, w_2, w_1^2 (= w_2)$, $w_1^3 (= w_4)$ eine R -Basis und das daraus entstehende \mathfrak{B} besitzt die Multiplikationstafel:

$$W_1^2 = W_1 W_2 = W_2^2 = W_3, \quad W_1 W_3 = W_2 W_3 = W_4^6).$$

⁶⁾ Wie im folgenden bei derartigen Multiplikationstafeln sollen stets hier die nicht aufgeführten Produkte verschwinden.

Nach unserem Hilfssatz bildet auch $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4$ mit $\bar{w}_1 = aw_1, \bar{w}_2 = w_2, \bar{w}_3 = w_3, \bar{w}_4 = w_4$ eine R -Basis; diese führt zu einem $\bar{\mathfrak{B}}$ mit der Multiplikationstafel:

$$\bar{W}_1^2 = \alpha \bar{W}_3 + \bar{W}_4, \quad \bar{W}_1 \bar{W}_2 = \alpha \bar{W}_3, \quad \bar{W}_2^2 = \bar{W}_3, \quad \bar{W}_1 \bar{W}_3 = \alpha \bar{W}_4, \quad \bar{W}_2 \bar{W}_3 = \bar{W}_4.$$

Diese Tafel können wir durch keine Transformation

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= a_{11} W_1 + a_{12} W_2 + \dots \\ \bar{W}_2 &= a_{21} W_1 + a_{22} W_2 + \dots \\ W_3 &= \dots \quad \quad \quad a' W_3 + a'' \bar{W}_4 \end{aligned}$$

der Basiselemente von \mathfrak{B} erreichen, denn aus

$$\bar{W}_1^2 = (a_{11}^2 + a_{12}^2) (a' \bar{W}_3 + a'' \bar{W}_4), \quad \bar{W}_2^2 = (a_{21}^2 + a_{22}^2) (a' \bar{W}_3 + a'' \bar{W}_4)$$

ergeben sich die nichtauflösbaren Bedingungsgleichungen

$$a' : a'' = \alpha : 1, \quad a' : a'' = 1 : 0.$$

Also ist \mathfrak{B} nicht isomorph zu $\bar{\mathfrak{B}}$, womit wegen $\mathfrak{B}^4 = \bar{\mathfrak{B}}^4 = 0$ das Gegenbeispiel geliefert ist.

Für die Algebren mit $r \leq 3$ ist also der Typus von \mathfrak{B} eine Invariante. Nach einer Bemerkung von § 2 ist \mathfrak{B} in diesen Fällen trivialerweise assoziativ. Für $r \geq 4$ ist \mathfrak{B} , wie wir gesehen haben, im allgemeinen keine Invariante mehr, selbst nicht in dem Spezialfalle $\delta = 1$. Betrachten wir nämlich einmal die durch $1, a, w$ mit den definierenden Relationen $a^2 = \alpha + w$ ($\alpha \in K$), $w^6 = 0$ erzeugte kommutativ-assoziative Algebra \mathfrak{A} über einem Körper K der Charakteristik 2, in dem α kein Quadrat ist. Man zeigt leicht, daß \mathfrak{A} primär, $(1, 1, 1, 1, 1)$ das Geschlecht der zugeordneten Algebren und $\mathfrak{A}/w = K(a)$, $a^2 - \alpha = 0$ eine ausgezeichnete Darstellung des Radikalrestklassenkörpers ist. Bez. des durch a als Repräsentanten von a bestimmten normalen Repräsentantensystems R ist dann w, w^2, w^3, w^4, w^5 eine R -Basis; die dadurch erzeugte Algebra \mathfrak{B}_0 ist also assoziativ. Nach unserem Hilfssatz ist nun aber auch w_1, \dots, w_5 mit $w_1 = aw, w_i = w^i$ ($i = 2, \dots, 5$) eine R -Basis, und für die hierdurch erzeugte Algebra \mathfrak{B} mit der Basis W_1, \dots, W_5 gilt unter anderem $W_1^2 W_2 = \alpha W_4 + W_5, W_1(W_1 W_2) = \alpha W_4$, d. h. \mathfrak{B} ist nicht assoziativ und daher auch nicht zu \mathfrak{B}_0 isomorph.

Dieses Gegenbeispiel weist uns aber auch den Weg, wie wir im Falle $\delta = 1$ zu einem Analogon des im Falle $r \leq 3$ invariant bestimmten Typus von \mathfrak{B} kommen: Wir beweisen ohne Mühe, daß, wenn w ein beliebiges nicht in w^3 liegendes Element von w ist, w, \dots, w^{r-1} für jedes Repräsentantensystem R eine R -Basis darstellt. Es existiert also eine eindeutig bestimmte ausgezeichnete zugeordnete Algebra \mathfrak{B}_0 , nämlich die *Potenzalgebra*⁷⁾ vom

⁷⁾ Bei Scorza [1], S. 322 findet sich die Bezeichnung „algebra potentiale“.

Index r . Dieses \mathfrak{B}_0 im Falle $\delta = 1$ und gleicherweise das allgemeine \mathfrak{B} im Falle $r \leq 3$ wollen wir nun zur konstruktiven Erfassung der Typen von \mathfrak{A} mit vorgegebenem Radikalrestklassenkörper benutzen. Zu diesem Zwecke gehen wir (vorläufig ohne die Einschränkung $r \leq 3$ oder $\delta = 1$) so vor: In der ausgezeichneten Darstellung (3.1) wollen wir nach § 1, Satz 4

$$a_i^{q_i} = \alpha_i(a_i^{q_i}, \dots, a_{i-1}^{q_{i-1}})$$

setzen, also α_i als Polynom mit Koeffizienten aus K auffassen, und zur Abkürzung dafür $\alpha_i(a_i^{q_i})$ schreiben. R sei dann das normale Repräsentantensystem mit a_i als Repräsentant von a_i und w_1, \dots, w_m eine R -Basis, die die zugeordnete Algebra \mathfrak{B} erzeugen möge. Nach Definition von a_i gilt dann mit $f_i(a_i) = a_i^{q_i} - \alpha_i(a_i^{q_i})$:

$$(3.3) \quad f_i(a_i) = \sum_k f_{ik}(a) w_k,$$

wo die $f_{ik}(a)$ Polynome in den a_1, \dots, a_i mit Koeffizienten aus K bedeuten. Aus \mathfrak{B} , dessen Multiplikationstafel durch

$$a_{ik}^l = d_{ik}^l(a)$$

gegeben sei, und dem $f(a)$ -System (so wollen wir das System der durch die Polynommatrix (f_{ik}) bestimmten Ausdrücke (3.3) nennen) konstruieren wir uns nun eine Algebra, die wir mit $(f(a), \mathfrak{B})$ bezeichnen, auf folgende Art:

Die Elemente $a_1^{i_1} \dots a_i^{i_i}$ und $a_1^{i_1} \dots a_i^{i_i} w_k$ ($0 \leq i_1 < q_1; \dots, i_i < q_i; k = 1, \dots, m$) bilden eine Basis von $(f(a), \mathfrak{B})$ über K ; ihre Multiplikationstafel ergibt sich durch Anwendung von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz aus den Beziehungen

$$a_i^{q_i} = \alpha_i(a_i^{q_i}) + \sum_k f_{ik}(a) w_k, \quad w_i w_k = \sum_l d_{ik}^l(a) w_l.$$

Man erkennt sofort, daß bei Identifizierung gleichbezeichneter Elemente $\mathfrak{A} = (f(a), \mathfrak{B})$ gilt. Die Bildung $(f(a), \mathfrak{B})$ läßt sich nun natürlich genau so für jedes formal gegebene $f(a)$ -System und jede in kanonischer Form vorgegebene nilpotente Algebra \mathfrak{B} über gegebenem $K(a_1, \dots, a_i)$ ausführen. Sie ist nach Konstruktion kommutativ, und, wenn sie noch dazu assoziativ ist, erkennt man sofort, daß sie primär mit dem Radikalrestklassenkörper $K(a_1, \dots, a_i)$ ist und \mathfrak{B} als zugeordnete Algebra besitzt. Für die Fälle, auf die wir uns weiter oben beschränkt hatten, läßt sich nun die Assoziativität nachweisen:

Satz 5. *Ist \mathfrak{B} als Potenzalgebra gegeben ($\delta = 1$) oder vom Index $r \leq 3$, so ist für jedes $f(a)$ -System die Algebra $(f(a), \mathfrak{B})$ assoziativ.*

Man erkennt ganz allgemein, daß der durch die $a_1^{i_1} \dots a_i^{i_i} w_k$ aufgespannte Modul eine nilpotente invariante Unteralgebra \mathfrak{w} von $(f(a), \mathfrak{B})$ ist, die denselben Index wie \mathfrak{B} besitzt. Wegen $(f(a), \mathfrak{B})/\mathfrak{w} \cong K(a_1, \dots, a_i)$ ist \mathfrak{B} sogar die maximale nilpotente Unteralgebra, also das Radikal von

$(f(a), \mathfrak{B})$. Nach § 2, Satz 1 (siehe den Beweisgang!) bilden die $a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k} w_k$ mit $(k) \geq h$ eine Basis für w^h . Im folgenden bezeichnen wir mit A, B, C drei Basiselemente von $(f(a), \mathfrak{B})$. Hat nun \mathfrak{B} den Index $r \leq 3$, so wird, falls alle drei Basiselemente A, B, C in w liegen, die Assoziativitätsbeziehung

$$(3.4) \quad (A B) C = A (B C)$$

trivial. Liegen nur zwei in w , so gilt (3.4) ebenfalls, weil ja $(f(a), \mathfrak{B}) \bmod w$ assoziativ ist. Ferner zeigt man leicht, daß, wenn A ein nicht in w liegendes Basiselement und X ein beliebiges Element von $(f(a), \mathfrak{B})$ bedeutet, die Beziehung

$$(3.5) \quad A (X w_i) = (A X) w_i$$

gilt. Liegt von den obengenannten Basiselementen nur eins, etwa C , in w , so kann $C = C' w_i$ geschrieben werden, wo C' ein nicht in w liegendes Basiselement ist, und nach (3.5) folgt:

$$A (B C) = A (B C' w_i) = (A (B C')) w_i,$$

d. h. aber, die Gültigkeit von (3.4) wird auf den Fall zurückgeführt, wo alle drei Basiselemente von der Form $a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k}$ sind. In diesem Falle aber ist die Gültigkeit von (3.4) offenbar erwiesen, wenn wir nur die Formel

$$(3.6) \quad (a_i^i a_i^k) a^l = a_i^i (a_i^k a^l) \quad \text{für} \quad 2q, \leq i + k + l < 3q,$$

(für $i + k + l < 2q$, ist die trivialerweise erfüllt!) bewiesen haben. Genau dasselbe gilt nun aber auch für $\delta = 1$, wo \mathfrak{B} als Potenzalgebra vorgegeben ist; denn die Fälle, wo zwei oder drei Basiselemente aus (3.4) in w liegen, reduzieren sich wegen der einfachen Multiplikationsvorschrift $w_i w_k = w_{i+k}$ auf den Fall, wo alle drei von der Form $a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k}$ sind. Ebenfalls wegen $w_i w_k = w_{i+k}$ gilt auch hier die Relation (3.5). Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir durch vollständige Induktion nach h , daß in beiden betrachteten Fällen $(f(a), \mathfrak{B}) \bmod w^h$ assoziativ ist. Für $h = 1$ ist unsere Behauptung richtig. Sie sei für h bereits bewiesen. Nach dem oben Bemerkten genügt es nun, die Gültigkeit von (3.6) in $(f(a), \mathfrak{B})/w^{h+1}$ nachzuweisen. Dabei lassen wir der Einfachheit halber den Index r an a und q fort. Wir haben $(a^i a^k) a^l = (a^q a^{i+k-q}) a^l$, und wenn wir $a^q - \alpha = \sum A_j w_j$ setzen, gilt

$$(a^i a^k) a^l = \alpha a^{i+k-q} a^l + \sum_j a^l (a^{i+k-q} (A_j w_j))$$

und nach (3.5):

$$(a^i a^k) a^l = \alpha a^q a^{i+k+l-2q} + \sum_j (a^l (a^{i+k-q} A_j)) w_j.$$

Nach Voraussetzung ist nun aber

$$a^l (a^{i+k-q} A_j) \equiv a^{i+k+l-q} A_j \bmod w^h$$

und daher

$$(a^i a^k) a^l \equiv \alpha a^q a^{i+k+l-2q} + \sum_j (a^{i+k+l-q} A_j) w_j \pmod{w^{h+1}}.$$

Da dieser Ausdruck nun bei einer Vertauschung von i mit l unverändert bleibt, ist unsere Behauptung auch für $h+1$ bewiesen. Wegen $w^r = 0$ ist damit die behauptete Assoziativität gezeigt.

Im allgemeinen hängt nun allerdings der Typus von $(f(a), \mathfrak{B})$ noch wesentlich von der Wahl der Basis W_1, \dots, W_m von \mathfrak{B} ab, d. h. der Typus von $(f(a), \mathfrak{B})$ wird bei Ersetzung von \mathfrak{B} durch eine isomorphe Algebra nicht unverändert bleiben. Im Falle $\delta = 1$ haben wir uns aber von vornherein auf Potenzalgebren \mathfrak{B}_0 , die also mit einer Basis W_1, \dots, W^{r-1} vorliegen, beschränkt, so daß $(f(a), \mathfrak{B}_0)$ invariant bestimmt ist. Für unseren anderen Fall nun gilt der

Satz 6. Für $r \leq 3$ folgt aus $\mathfrak{B} \cong \overline{\mathfrak{B}}$ für jedes System $f(a)$ die Existenz eines Systems $f(\bar{a})$ mit $(f(a), \mathfrak{B}) \cong (f(\bar{a}), \overline{\mathfrak{B}})$.

Das System $f(a)$ sei durch (3.3) gegeben. \mathfrak{B} habe die Multiplikationstafel $d_{ik}^l(a)$, $\overline{\mathfrak{B}}$ die Tafel $\bar{d}_{ik}^l(a)$. Die Beziehung $\mathfrak{B} \cong \overline{\mathfrak{B}}$ ist dann bekanntlich mit der Existenz einer regulären Matrix $(g_{ik}(a))_{i,k=1,\dots,m}$ identisch, für die

$$(3.7) \quad \begin{aligned} g_{ik}(a) &= 0 \quad \text{für} \quad (i) = 2, \quad (k) = 1; \\ \sum_{(r)=2} d_{ik}^l(a) g_{ri}(a) &= \sum_{(s)=(l)=1} g_{is}(a) g_{kt}(a) \bar{d}_{st}^l(a) \\ &\text{für} \quad (i) = (k) = 1, \quad (l) = 2 \end{aligned}$$

gilt. Für unser zu konstruierendes $f(\bar{a})$ -System fordern wir nun die Gültigkeit von

$$f_i(\bar{a}_i) = \sum_{k,l=1}^m f_{ik}(\bar{a}) g_{kl}(\bar{a}) \bar{w}_l,$$

wo $\bar{w}_i \bar{w}_k = \sum \bar{d}_{ik}^l(\bar{a}) \bar{w}_l$ gelten soll, und erkennen leicht, daß sich durch diese Forderung $f(\bar{a})$ eindeutig in der zu (3.3) analogen Form $f_i(\bar{a}_i) = \sum f_{ik}(\bar{a}) \bar{w}_k$ bestimmen läßt. Setzen wir nun $\sum g_{ik}(\bar{a}) \bar{w}_k = \bar{\bar{w}}_i$, so folgt aus (3.7) $\bar{w}_i \bar{\bar{w}}_k = 0$ für $(i) + (k) > 2$, während sich für $(i) = (k) = 1$ gleichfalls nach (3.7) die Beziehung

$$\begin{aligned} \bar{\bar{w}}_i \bar{w}_k &= \sum_{(s)=(l)=1, (t)=2} g_{is}(\bar{a}) g_{kt}(\bar{a}) \bar{d}_{st}^l(\bar{a}) \bar{w}_t \\ &= \sum_{(r)=(l)=2} d_{ik}^l(\bar{a}) g_{rl}(\bar{a}) \bar{\bar{w}}_l = \sum_{(l)=2} \bar{d}_{ik}^l(\bar{a}) \bar{\bar{w}}_l \end{aligned}$$

ergibt. Unter Beachtung von $f_i(\bar{a}_i) = \sum f_{ik}(\bar{a}) \bar{\bar{w}}_i$ folgt aus diesen Formeln, daß durch $\bar{a}_i \longleftrightarrow a_i, \bar{w}_i \longleftrightarrow w_i$ ein Isomorphismus $(f(\bar{a}), \overline{\mathfrak{B}}) \cong (f(a), \mathfrak{B})$ hergestellt wird, w. z. b. w.

Wir können also die Bildung $(f(a), \mathfrak{B})$ isomorphieinvariant machen, indem wir festsetzen:

Wird \mathfrak{B} durch ein isomorphes $\overline{\mathfrak{B}}$ ersetzt, so soll $f(a)$ durch das im Beweis von Satz 6 verwandte $f(\bar{a})$ ersetzt werden.

In dem Ausdruck $(f(a), \mathfrak{B})$ können wir dann für \mathfrak{B} einfach den Typus von \mathfrak{B} einsetzen, den wir der Einfachheit halber wieder mit \mathfrak{B} bezeichnen wollen. Unser System $f(a)$ ist natürlich durch seine f_{ik} erst nach Vorgabe einer bestimmten Basis von \mathfrak{B} , also einer bestimmten Realisationsmöglichkeit des Typus \mathfrak{B} , festgelegt. Unter Beachtung der eben für $r \leq 3$ gemachten Festsetzung und der Sätze 4 und 5 läßt sich nun unser Strukturproblem der primären Algebren mit vorgegebenem Radikalrestklassenkörper für $r \leq 3$ oder $\delta = 1$ so aussprechen:

Es sind die für die Gültigkeit von $(f(\bar{a}), \mathfrak{B}) \cong (f(a), \mathfrak{B})$ notwendigen und hinreichenden Beziehungen zwischen den Systemen $f(\bar{a})$ und $f(a)$ festzustellen.

Mit der Untersuchung des so reduzierten Strukturproblems werden wir uns nun, getrennt nach den Fällen $r \leq 3$ und $\delta = 1$, in den beiden anderen Kapiteln zu beschäftigen haben. Dabei wollen wir, um die Bezeichnung zu vereinfachen, bei der Untersuchung des Isomorphismus $(f(\bar{a}), \mathfrak{B}) \cong (f(a), \mathfrak{B})$ die durch diesen einander zugeordneten Elemente der beiden Algebren gleichsetzen, den Isomorphismus also als Gleichheit schreiben. Das ist möglich, weil die beiden Algebren über K abstrakt definiert sind. Wir beweisen noch den für die folgenden Untersuchungen nützlichen

Satz 7. Aus $(f(\bar{a}), \mathfrak{B}) = (f(a), \mathfrak{B})$ folgt $\bar{a}_i \equiv a_i \pmod{w}$.

Zum Beweis beachten wir, daß, wenn \bar{a}_i und $a_i \pmod{w}$ in der Restklasse \bar{a}_i bzw. a_i liegen, durch $\bar{a}_i \longleftrightarrow a_i$ ein Automorphismus des Radikalrestklassenkörpers bez. K definiert wird. Da nun der Radikalrestklassenkörper rein-inseparabel über K genommen wurde, ist der Automorphismus der dentische, also $\bar{a}_i = a_i$, $\bar{a}_i \equiv a_i \pmod{w}$, w. z. b. w.

II. Die Algebren mit $r \leq 3$.

§ 4.

Einteilung in Typenklassen; der Fall $r = 2$.

\mathfrak{B} habe das Geschlecht (δ, δ') , wobei $\delta' = 0$ den Fall $r = 2$ bedeuten soll. Für die w_i mit $(i) = 2$ schreiben wir $w'_1, \dots, w'_{\delta'}$, und die Algebren $(f(a), \mathfrak{B})$, $(f(\bar{a}), \mathfrak{B})$ seien durch

$$(4.1) \quad \begin{cases} f_i(a_i) = \sum_{k=1}^{\delta} f_{ik}(a) w_k + \sum_{k=1}^{\delta'} g_{ik}(a) w'_k \\ f_i(\bar{a}_i) = \sum_{k=1}^{\delta} \bar{f}_{ik}(\bar{a}) \bar{w}_k + \sum_{k=1}^{\delta'} \bar{g}_{ik}(\bar{a}) \bar{w}'_k \end{cases}$$

^{a)} w bezeichnet wie immer das Radikal der identifizierten Algebren.

gegeben, worin die Produkte

$$w_i w_k = \sum_{l=1}^{\delta'} d_{ik}^l(a) w_l', \quad \bar{w}_i \bar{w}_k = \sum_{l=1}^{\delta'} \bar{d}_{ik}^l(\bar{a}) \bar{w}_l'$$

dadurch bestimmt sind, daß $W_1, \dots, W_{\delta'}, W_1', \dots, W_{\delta'}'$ und $\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_{\delta'}, \bar{W}_1', \dots, \bar{W}_{\delta'}'$ zwei Basen von \mathfrak{B} mit den bzw. Multiplikationstafeln

$$(4.2) \quad \begin{cases} W_i W_k = \sum d_{ik}^l W_l' \\ \bar{W}_i \bar{W}_k = \sum \bar{d}_{ik}^l \bar{W}_l' \end{cases}$$

darstellen, worin wie im folgenden stets $f(a)$ durch f ersetzt ist. Der Isomorphismus $(f(a), \mathfrak{B}) = (f(\bar{a}), \mathfrak{B})$ wird nun nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen durch Beziehungen der Form

$$(4.3) \quad \bar{a}_i \equiv a_i + \sum V_{ik}(a) w_k \pmod{w^2}$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} \bar{w}_i = \sum X_{ik}(a) w_k + \sum Y_{ik}(a) w_k', & |X_{ik}| \neq 0 \\ \bar{w}_i' = & \sum Z_{ik}(a) w_k', & |Z_{ik}| \neq 0 \end{cases}$$

bestimmt. Durch die Transformation $\bar{W}_i = \sum X_{ik} W_k$, $\bar{W}_i' = \sum Z_{ik} W_k'$ werden dabei die Gleichungen (4.2) ineinander übergeführt. Aus (4.3) erhalten wir nun, wenn wir noch $\eta_i = \delta_{i, q_i}$ ($i = 1, \dots, \lambda$) setzen⁹⁾, die Beziehung

$$\bar{a}_i^{q_i} = a_i^{q_i} + \eta_i \sum_{l,k} V_{kl}(a)^2 d_{il}^k(a) w_k'$$

und hieraus wegen

$$f_i(a_i) = a_i^{q_i} - \alpha_i(a_1^{q_i}, \dots, a_{i-1}^{q_i}),$$

wenn wir die Ableitung von $\alpha_i(x_1, \dots, x_{i-1})$ nach x_h mit $\alpha_{ih}(x)$ bezeichnen:

$$(4.5) \quad f_i(\bar{a}_i) = f_i(a_i) + \eta_i \sum_k U_{ik}(a) w_k',$$

worin

$$(4.5') \quad U_{ik} = \sum_l V_{il}^2 d_{il}^k - \sum_{h,l} \alpha_{ih} V_{hl}^2 d_{il}^k$$

gesetzt ist. Wir behaupten nun den

Satz 1. *Der Rang ϱ der Matrix $(f_{ik})_{i=1, \dots, \lambda; k=1, \dots, \delta}$ ist eine Isomorphieinvariante. Besitzt die Untermatrix $(f_{ik})_{i=i_1, \dots, i_{\varrho}; k=1, \dots, \delta}$ den Rang ϱ , so gibt es eine durch*

$$(4.6) \quad f_{ik} = \delta_{ik}; \quad f_{ik} = 0 \quad \text{für } k > \varrho$$

ausgezeichnete Normalform.

Aus (4.5) ergibt sich nämlich speziell $f_i(\bar{a}_i) \equiv f_i(a_i) \pmod{w^2}$, und wenn wir hierin die Ausdrücke (4.1) unter Benutzung von (4.4) und unter Beachtung

⁹⁾ δ_{ik} sei wie üblich durch $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$ erklärt.

der aus (4.3) folgenden Beziehung $\bar{f}_{ik}(\bar{a}) \equiv \bar{f}_{ik}(a) \bmod \mathfrak{w}$ einsetzen, erhalten wir

$$\sum_k \bar{f}_{ik}(a) X_{ik}(a) w_k \equiv \sum_k f_{ik}(a) w_k \bmod \mathfrak{w}^3.$$

Daraus folgt nun bekanntlich $\sum_i \bar{f}_{ik} X_{ik} = f_{ik}$, und diese Beziehung können wir unter Benutzung der Vektoren $F_i = (f_{i1}, \dots, f_{i\delta})$, $\bar{F}_i = (\bar{f}_{i1}, \dots, \bar{f}_{i\delta})$ und der regulären Matrix $X = (X_{ki})$ so schreiben:

$$(4.7) \quad F_i = X \bar{F}_i \quad (i = 1, \dots, \lambda).$$

Der Rang des Vektorensystems F_1, \dots, F_λ , der ja mit dem Rang ϱ der Matrix (f_{ik}) übereinstimmt, ist also eine Invariante. Hat nun die Matrix $(f_{ik})_{i=1, \dots, \lambda; k=1, \dots, \delta}$ ebenfalls den Rang ϱ , so bedeutet das für die Vektoren: Die F_{i_h} sind linear unabhängig. Durch passende Wahl der regulären Matrix X lassen sie sich also in die Vektoren $E_h = (0, \dots, 0, h, 1, 0, \dots, 0)$ überführen, womit $f_{i_h k} = \delta_{hk}$ erreicht ist. Da aber alle F_i von den E_h linear abhängen, folgt $f_{ik} = 0$ für $k > \varrho$, womit unser Satz völlig bewiesen ist.

Eine zweite Invariante erhalten wir so: Wir ordnen die möglichen Kombinationen (i_1, \dots, i_ϱ) der Zahlen $1, \dots, \lambda$ lexikographisch an, so daß also $(1, \dots, \varrho)$ am Anfang der Reihe steht. Die h -te Kombination sei die erste, für die die Matrix $(f_{ik})_{i=i_1, \dots, i_\varrho; k=1, \dots, \delta}$ den Rang ϱ hat, also die Vektoren $F_{i_1}, \dots, F_{i_\varrho}$ linear unabhängig sind. Wegen (4.7) ist dieses h isomorphieinvariant. Alle Typen mit gleichem h und $\varrho > 0$ fassen wir in der h -ten Typenklasse s -ter Stufe zusammen, wo

$$s = \text{Min}(\lambda, \delta) - \varrho + 1$$

von 1 bis $\text{Min}(\lambda, \delta)$ läuft. Die Typen mit $\varrho = 0$, die ja durch $f_{ik} = 0$ ausgezeichnet sind, bezeichnen wir als Typen letzter Stufe. Die Typen der h -ten Typenklasse s -ter Stufe wollen wir, unter (i_1, \dots, i_ϱ) die h -te Kombination verstanden, immer in der nach Satz 1 vorhandenen Form (4.6) annehmen. Offenbar sind dann die durch diese beiden Bedingungen noch nicht als 0 oder 1 festgelegten f_{ik} Invarianten. Durch Einführung der Normierung (4.6) sind nun die zulässigen Matrizen X nach (4.7) durch die Bedingungen

$$(4.8) \quad X_{ik} = \delta_{ik} \quad \text{für} \quad i \leq \varrho$$

eingeschränkt. Es genügt daher zur Lösung unseres Strukturproblems nicht, die Invarianten von \mathfrak{B} bez. beliebiger Basistransformationen zu kennen: Wir werden auch (siehe §§ 6, 7) die Aufgabe der Invariantenbestimmung bez. der durch (4.8) eingeschränkten Gruppe von Basistransformationen für \mathfrak{B} behandeln müssen. Die so zu berechnenden Invarianten seien im folgenden kurz als die \mathfrak{B} -Invarianten der betreffenden Stufe bezeichnet. Setzen wir

überall $\delta' = 0$, so erhalten wir aus den bisher gewonnenen Ergebnissen sofort den

Satz 2. *Im Falle $r = 2$ bilden für die h -te Typenklasse s -ter Stufe die f_{ik} ($i \neq i_1, \dots, i_p$; $k \leq \varrho$) ein vollständiges Invariantensystem; die letzte Stufe enthält nur den durch $f_{ik} = 0$ charakterisierten Nulltypus.*

Dadurch sind also die Algebren vom Index 2 erschöpfend behandelt.

Bei der folgenden Untersuchung des Falles $r = 3$ beachten wir, daß man sich auf die Betrachtung der ersten Typenklasse jeder Stufe beschränken kann, da die Behandlung der übrigen dieser gegenüber nichts wesentlich Neues liefert. Es soll im folgenden immer $f_{ik}(x)$ die Ableitung von $f_{ik}(x_1, \dots, x_\lambda)$ nach x_i bedeuten. Dann gilt wegen (4.3):

$$f_{ik}(\bar{a}) \equiv f_{ik}(a) + \sum_{h, l} f_{ikl}(a) V_{lh}(a) w_h \bmod w^2,$$

und da nicht nur $\sum_l f_{il}(a) X_{lk}(a) \equiv f_{ik}(a) \bmod w$, sondern sogar zufolge (4.6) und (4.8) $\sum_l f_{il}(a) X_{lk}(a) = f_{ik}(a)$ gilt, erhalten wir aus (4.5) wegen $\bar{g}_{ik}(\bar{a}) \equiv \bar{g}_{ik}(a) \bmod w$ als restliche Isomorphiebedingung:

$$\begin{aligned} \sum_{k, l} f_{ik}(a) Y_{kl}(a) w'_l + \sum_{k, l, h, j, r} f_{ikl}(a) V_{lh}(a) X_{kj}(a) d_{hj}^r(a) w'_r \\ + \sum_{k, l} \bar{g}_{ik}(a) Z_{kl}(a) w'_l = \sum_k (g_{ik}(a) + \eta_i U_{ik}(a)) w'_k, \end{aligned}$$

also, indem wir die Glieder mit w'_k zusammenfassen und zu Elementen des Radikalrestklassenkörpers übergehen:

$$(4.9) \quad \sum_l f_{il} Y_{lk} + \sum_{l, h, j, r} f_{ilh} V_{lj} X_{kj} d_{hj}^r + \sum_l \bar{g}_{il} Z_{lk} = g_{ik} + \eta_i U_{ik}.$$

Da wir uns auf die erste Typenklasse beschränkt hatten, folgt aus (4.6) $f_{ikl} = 0$ für $i \leq \varrho$, und (4.9) geht daher für $i \leq \varrho$ über in

$$Y_{ik} + \sum_l \bar{g}_{il} Z_{lk} = g_{ik} + \eta_i U_{ik},$$

woraus wir entnehmen, daß durch passende Wahl der Y_{ik} bei beliebigem Z_{ik} immer auf

$$(4.10) \quad g_{ik} = 0 \quad \text{für } i \leq \varrho$$

normiert werden kann. Nach dieser Normierung ergibt sich für die Y_{ik} die einschränkende Bedingung:

$$(4.11) \quad Y_{ik} = \eta_i U_{ik} \quad \text{für } i \leq \varrho.$$

Wegen (4.6) und (4.11) nimmt (4.9) in den noch übrig bleibenden Fällen $i > \varrho$ die Gestalt

$$(4.12) \quad \sum_{h, l, j} f_{ilh} V_{lj} d_{jh}^k + \sum_l \bar{g}_{il} Z_{lk} = g_{ik} + \eta_i U_{ik} - \sum_l \eta_l f_{il} U_{lk}$$

an. Außer den f_{ik} mit $i > \varrho$ und $k \leq \varrho$ und den nach einer weiter oben gemachten Bemerkung zu berechnenden \mathfrak{B} -Invarianten werden, wie sich aus

den bisherigen Entwicklungen ergibt, alle Isomorphieinvarianten unserer durch (4. 6) und (4. 10) normierten Algebra durch die Invarianten der Transformationsbeziehungen (4. 12) dargestellt. Es gilt also speziell der

Satz 3. *Im Falle $\lambda \leq \delta$ bilden die \mathfrak{W} -Invarianten ein vollständiges Invariantensystem für die Typen der einzigen Typenklasse erster Stufe.*

Wir können nun ohne besondere Schwierigkeiten jede Algebra trotz der Einschränkungen (4. 8) stets auf eine ausgezeichnete kanonische Form bringen, in der w'_i ($i = 1, \dots, \delta'$) das erste der von den w_1, \dots, w'_{i-1} linear unabhängigen Produkte der Reihe

$$w_1^2, w_1 w_2, \dots, w_1 w_\delta, w_2^2, w_2 w_3, \dots, w_2 w_\delta, \dots, w_\delta^2$$

ist. Für das Folgende sei diese Normierung als bereits durchgeführt vorausgesetzt. Es folgt dann offenbar aus $X_{ik} = \delta_{ik}$ stets auch $Z_{ik} = \delta_{ik}$. Im Falle $\rho = \delta$ geht also, wenn wir der Einfachheit halber noch $q_\lambda > 2$ annehmen, (4. 12) über in

$$(4. 13) \quad \sum_{h, i, j} f_{i, h, l} V_{ij} d_{jh}^k + \bar{g}_{ik} = g_{ik} \quad (i = \delta + 1, \dots, \lambda; k = 1, \dots, \delta').$$

Um nun diese Gleichungen — und überhaupt Transformationsbeziehungen dieser Art — zwecks Aufstellungen von Invarianten auswerten zu können, beweisen wir den

Hilfssatz. *Es gibt eine Matrixfunktion F , durch die jeder Matrix $A = (a_{ik}^i)_{i=1, \dots, n; k=1, \dots, m}$ eine Matrix $(F_k^i(A))_{i,k=1, \dots, n}$ so zugeordnet wird, daß die*

$$\sum_{k=1}^n F_k^i(A) x_k \quad (i = 1, \dots, n)$$

ein vollständiges Invariantensystem für die durch

$$\bar{x}_i - x_i = \sum_{k=1}^m a_k^i u_k \quad (i = 1, \dots, n)$$

erzeugte Klasseneinteilung der Vektoren (x_1, \dots, x_n) bilden.

Wir konstruieren uns $F(A)$ so: Es gibt eine der Gleichung $AXA = A$ genügende Matrix von m -Zeilen und n Spalten; denn für $A \neq 0$ kann man immer drei reguläre quadratische Matrizen S_n, T_m, \bar{A} mit $S_n A T_m = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ finden, so daß also $X = T_m \begin{pmatrix} \bar{A}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S_n$ die Gleichung befriedigt. Wir wählen irgendeine Lösung $X = G(A)$ aus und setzen $F(A) = E - AG(A)$ mit E als Einheitsmatrix. Mit $\bar{x}_i = x_i + \sum a_k^i u_k$ folgt daraus sofort $\sum F_k^i \bar{x}_k = \sum F_k^i x_k$ und umgekehrt hieraus mit $u_i = \sum (F_k^i (\bar{x}_i - x_i))$ die Beziehung $\bar{x}_i - x_i = \sum a_k^i u_k$, w. z. b. w.

Im folgenden werde unter $F(A)$ immer eine auf diese Art herzustellende Matrixfunktion verstanden. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zu

Satz 4. Für die erste Typenklasse erster Stufe wird im Falle $\delta < \lambda$, $q_1 > 2$ ein vollständiges Invariantensystem gebildet durch

$$1. f_{ik} (i = \delta + 1, \dots, \lambda; k = 1, \dots, \delta),$$

$$2. d_{ik}^l (i, k = 1, \dots, \delta; l = 1, \dots, \delta'),$$

$$3. \sum_{l=\delta+1, j=1}^{l=\lambda, j=\delta'} F_{ij}^{lk}(A) g_{lj} \quad (i = \delta + 1, \dots, \lambda; k = 1, \dots, \delta'),$$

$$\text{worin } A = (a_{ij}^{lk}) \text{ mit } a_{ij}^{lk} = \sum_{h=1}^{\delta} f_{ihl} d_{jh}^k \quad (i = \delta + 1, \dots, \lambda; k = 1, \dots, \delta'; \\ l = 1, \dots, \lambda; j = 1, \dots, \delta) \text{ ist.}$$

Denn außer den unter 1. verzeichneten Invarianten gehören zum vollständigen System noch die \mathfrak{B} -Invarianten und die sich aus (4. 12) ergebenden. Da nun $\varrho = \delta$ ist, werden zufolge der oben eingeführten Normierung von \mathfrak{B} die \mathfrak{B} -Invarianten gerade durch die d_{ik}^l dargestellt, und (4. 12) geht in (4. 13) über, woraus sich nach unserem Hilfssatz aber genau die unter 3. aufgezählten Ausdrücke als Invarianten ergeben, w. z. b. w.

Als Ergänzung zu Satz 3 formulieren wir noch

Satz 5. Im Falle $\lambda = \delta$ bilden die d_{ik}^l ein vollständiges Invariantensystem für die Typen der einzigen Typenklasse erster Stufe.

Aus diesem auf Grund der vorangegangenen Entwicklungen leicht einzusehenden Satze ergibt sich die Sonderstellung des Falles $\lambda = \delta$: Das Strukturproblem für die Typen der ersten Stufe ist hier explizit gelöst, was, wie wir in den nächsten Paragraphen sehen werden, durchaus nicht immer möglich ist.

§ 5.

Übersicht über die nilpotenten Algebren vom Index 3.

Wie im vorigen Paragraphen bezeichnen wir die w_i mit $(i) = 2$ durch $w'_1, \dots, w'_{\delta'}$. Nach einer Bemerkung auf S. 225 unten sind nun die nilpotenten Algebren vom Index 3 Diagonalalgebren. Auf sie finden daher die Sätze 2 und 4 von § 2 Anwendung: Die lineare Schar der Tensoren $T_{ik}^{l0} = a_{ik}^l$ ($l = 1, \dots, \delta'$) bildet ebenso wie die Schar der quadratischen Fundamentalformen f_i ($i = 1, \dots, \frac{\delta(\delta+1)}{2} - \delta'$) ein vollständiges Invariantensystem. Nun ist aber ein zweifach kovarianter Tensor nichts anderes als eine nach der Gleichung

$$(5. 1) \quad XAX' = \bar{A}$$

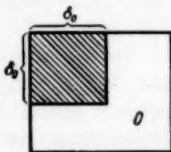
zu transformierende Matrix, wo X die Transformationsmatrix der w_1, \dots, w_{δ} bedeutet. Wir wollen daher statt von Tensoren von den *Fundamentalmatrizen* $(a_{ik}^l)_{k=1, \dots, \delta}$ ($l = 1, \dots, \delta'$) reden. Es gilt nun in Spezialisierung der Betrachtungen auf S. 228 der

Satz 1. Im Falle $p \neq 2$ werden die Typen eines Geschlechts *eindeutig* auf die Typen des komplementären Geschlechts abgebildet, indem die Fundamentalmatrizen des einen als Koeffizientensysteme der quadratischen Fundamentalformen des anderen angesehen werden.

Daß die Abbildung der Typen *eindeutig* ist, erkennt man daraus, daß in jeder Richtung isomorphe Algebren auf isomorphe abgebildet werden: Denn während sich eine Fundamentalmatrix nach (5.1) transformiert, transformiert sich die symmetrisch gemachte Koeffizientenmatrix A einer quadratischen Fundamentalform nach $X' \bar{A} X = A$, und es kommt in beiden Fällen nur auf die lineare Schar an. Daß aber durch die Abbildung wirklich alle Typen des einen auf alle Typen des komplementären Geschlechts abgebildet werden, ergibt sich daraus, daß die nach § 2, Satz 1 für die Fundamentalmatrizen notwendige und hinreichende Bedingung identisch ist mit der Bedingung, daß die Formen $\sum_{i,k=1}^{\delta'} a_{ik}^l x_i x_k$ ($l = 1, \dots, \delta'$) quadratische Fundamentalformen einer Algebra des komplementären Geschlechts sind; denn dann und nur dann, wenn die Matrix $(a_{ik}^l)_{i,k=1,\dots,\delta'; l=1,\dots,\delta'}$ den Rang δ' hat, lassen sich aus den Gleichungen $\sum a_{ik}^l w_i w_k = 0$ ($l = 1, \dots, \delta'$) δ' der Größen $w_i w_k$ als Linearkombinationen der übrigen berechnen.

Wir können uns also im Falle $p \neq 2$ auf die Behandlung des Strukturproblems für $\delta' \leq \frac{\delta'(\delta+1)}{4}$ beschränken, wobei wir dann zweckmäßigerweise die Methode der Fundamentalmatrizen benutzen werden. Nur im Falle $p = 2$ müssen wir auch die Fälle $\delta' > \frac{\delta(\delta+1)}{4}$ gesondert behandeln, wobei natürlich die Methode der Fundamentalformen angewandt wird.

Da nach Definition (S. 229) der reduzierte Defekt δ_0 gerade der um den Rang des annullierenden Ideals $n : w$ verminderte Rang von w ist, erkennen wir δ_0 zugleich als kleinste Zahl, für die das allgemeine Element der Fundamentalmatrizenchar auf die Form



gebracht werden kann.

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung des Falles $\delta' = 1$ zu. Für $p \neq 2$ können wir nach (5.1) und da es ja nur auf die Schar ankommt, also ein von Null verschiedener skalarer Faktor noch willkürlich ist, die Fundamentalmatrix auf die Diagonalgestalt

$$A = (1, a_2, \dots, a_{\delta_0}, 0, \dots, 0)$$

bringen. Das Problem ist jetzt zu untersuchen, wann zwei solche Matrizen A, \bar{A} durch eine Beziehung

$$(5.2) \quad c\bar{A} = XAX', \quad |X| \neq 0, \quad c \neq 0$$

zusammenhängen. Für quadratisch-abgeschlossenen Grundkörper ist bekanntlich δ_0 die einzige Invariante dieser Transformationsbedingung, und für die reell-abgeschlossenen Körper tritt nur noch die mit dem Trägheitsindex t ($=$ Anzahl der negativen unter den a_2, \dots, a_{δ_0}) gebildete Invariante $t(\delta_0 - t)$ hinzu. Im Falle des rationalen Zahlkörpers hat Hasse ([1], § 4) unser Problem unter dem Namen „Multiplikative Äquivalenz der Komplexe“ mit Hilfe der Henselschen Methode der p -adischen Zahlen gelöst, speziell dabei auch für die p -adischen perfekten Hüllen des rationalen Zahlkörpers und (implizit) für die endlichen Primkörper von ungerader Charakteristik. Ferner kann man aus anderen Ergebnissen von Hasse [2] ein vollständiges Invariantensystem der Transformationsbeziehung (5.2) für alle algebraischen Zahlkörper, deren p -adische Hüllen sowie sämtliche endlichen Körper von ungerader Charakteristik herleiten. Damit sind aber auch die Fälle erschöpft, in denen der augenblickliche Stand der Theorie der quadratischen Formen eine explizite Lösung des Problems ohne Einschränkung für δ_0 gestattet. Für $\delta_0 \leq 2$ wird das Strukturproblem gelöst durch

Satz 2. *Zwei Matrizen $(1, a, 0, \dots, 0)$ und $(1, \bar{a}, 0, \dots, 0)$ definieren dann und nur dann isomorphe Algebren, wenn $a \equiv \bar{a} \pmod{3}$ ist¹⁰⁾.*

Daß $a \equiv \bar{a}$ für das Bestehen einer Gleichung (5.2) hinreicht, ist trivial. Im Falle $a = 0$, also $\delta_0 = 1$, ist offenbar $\bar{a} = 0$ notwendig. Für $a \neq 0$ ist (5.2) gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} x_{11}^2 + a x_{12}^2 &= c \\ x_{11} x_{21} + a x_{12} x_{21} &= 0 \\ x_{21}^2 + a x_{22}^2 &= c \bar{a} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{array} \right| \neq 0,$$

woraus wir $x_{22}^2 a = a_{11}^2 \bar{a}$ und im Ausnahmefall $x_{11} = x_{22} = 0$ die Beziehung $x_{12}^2 a \bar{a} = x_{21}^2$ erhalten. In beiden Fällen ergibt sich $a \equiv \bar{a} \pmod{3}$, w. z. b. w.

Im Ausnahmefall $p = 2$ läßt sich im allgemeinen A durch eine Transformation (5.2) nicht auf Diagonalgestalt bringen. Es müssen daher andere Normalformen entwickelt werden. Folgt aus $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ stets $x_i = 0$, so wollen wir sagen: Die symmetrische Matrix $A = (a_{ik})$ stellt die Null nicht dar. Unter Beachtung dieser Festsetzung nun gilt der von der sonst bei quadratischen Formen üblichen Einschränkungen $p \neq 2$ freie

Hilfssatz. *Stellt eine symmetrische Matrix A die Null nicht dar, so gibt es eine reguläre Matrix X , in der die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen verschwinden, so daß XAX' Diagonalmatrix ist.*

¹⁰⁾ Wie in der Zahlentheorie üblich, soll auch hier das Zeichen \equiv bedeuten: gleich bis auf ein nicht verschwindendes Quadrat als Faktor.

Wir beweisen ihn durch vollständige Induktion nach der Zeilenanzahl n von A . Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Sie sei für $n = 1$ richtig. Sei (a_1, \dots, a_n) die erste Zeile von A , so muß $a_1 \neq 0$ sein, da sonst A die Null darstellen würde. Mit $x_{ik} = \delta_{ik}$ für $k > 1$, $x_{11} = 1$, $x_{i1} = -\frac{a_i}{a_1}$ für $i > 1$ bilden wir nun die reguläre Matrix $X_n = (x_{ik})$ und haben $X_n A X_n' = (a_1) \dot{+} \bar{A}^{11}$, wo \bar{A} eine $(n-1)$ -reihige symmetrische Matrix ist, die ebenfalls die Null nicht darstellt. Es gibt also nach Induktionsvoraussetzung eine reguläre Matrix \bar{X} , in der die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen verschwinden, so daß $\bar{X} \bar{A} \bar{X}'$ Diagonalmatrix ist. Wir erkennen sofort, daß $X = ((1) \dot{+} \bar{X}) X_n$ dasselbe für A leistet und ebenfalls oberhalb der Hauptdiagonalen nur verschwindende Elemente besitzt, w. z. b. w.

Wir beschränken uns zunächst auf die Feststellung von Invarianzen bez. (5.1). Es gilt der

Satz 3. Im Falle $p = 2$ läßt sich jede symmetrische Matrix A durch eine Transformation der Form (5.1) auf eine Normalform

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} r+s \\ \hline \end{array} \left\{ \begin{array}{cc} A_0 & \\ & E_s \end{array} \right. & & \\ \hline & \begin{array}{cc} & \beta \end{array} & \left. \begin{array}{c} \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{c} zt \\ \\ \end{array} \\ \hline & \begin{array}{cc} & \\ E_s & \end{array} & \left. \begin{array}{c} \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{c} s \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ 0 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

bringen, wo $A_0 = (a_1, \dots, a_{r+s})$ eine die Null nicht darstellende Diagonalmatrix und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \dots \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_t$ ist. Ein vollständiges Invariantensystem wird gegeben durch

I. r, s, t ,

II. die Invarianten der Form $\sum_{i=1}^{r+s} a_i x_i^2$,

III. die Invarianten der Matrix (a_1, \dots, a_r) .

Wir machen uns zuerst einmal klar, daß, wenn es die behauptete Normalform gibt, die aufgezählten Größen wirklich invariant gegenüber (5.1) sind. Für r, s, t sehen wir das am einfachsten, indem wir A — was ja, da wir o. B. d. A. $A \neq 0$ voraussetzen können, immer möglich ist — als Fundamentalmatrix einer Algebra w vom Geschlecht $(\delta, 1)$ deuten, wenn δ die Zeilenzahl von A ist. Dann erkennt man nämlich sofort, daß — unter q das Ideal der Elemente von w , deren Quadrat verschwindet, verstanden — $r + s$ der Rang von w/q .

¹¹⁾ Wir benutzen bei Matrizen das Zeichen $\dot{+}$ für die direkte Summation in dem bei Mac Duffee (a. a. O., S. 81) erklärten Sinne.

$2t$ der Rang von $q/\mathfrak{D} (n:q, q)$ und s der Rang von $\mathfrak{D} (n:q, q)/n:w$ ist. Die Invarianz von $\sum_{i=1}^{r+s} a_i x_i^2 = \sum_{i,k=1}^d a_{ik} x_i x_k$ ($A = (a_{ik})$) ist trivial, und die Invarianz der Größen III folgt daraus, daß eine zwei Normalformen ineinander überführende Matrix X die Zerlegung $X = X_r + \bar{X}$ besitzt, wo \bar{X} , r -reihig ist. Wir zeigen nun, daß die behauptete Normalform existiert. Wir fassen wieder A als Fundamentalmatrix einer Algebra w auf und wählen die w_1, \dots, w_j so, daß jedes Ideal der Kette

$$\underbrace{w \supseteq q}_{n} \supseteq \underbrace{\mathfrak{D} (n:q, q)}_m \supseteq \underbrace{n:w}_s$$

mod w^2 einen hinteren Abschnitt dieser Reihe zur Basis hat. A hat dann die Form

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & D & C & 0 \\ D' & B & 0 & 0 \\ C' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wo A_0 eine (n, n) -reihige, die Null nicht darstellende Matrix, B (m, m) -reihig regulär mit verschwindenden Diagonalelementen und C (n, s) -reihig vom Range s ist. Es ist also $n - s = r \geq 0$, und da B wegen $p = 2$ als schiefsymmetrisch angesehen werden kann, gibt es eine ganze Zahl t mit $m = 2t$. Ist $D \neq 0$, so erkennt man sofort, daß sich wegen $|B| \neq 0$ zu den Basiselementen von w mod q immer Elemente von q so hinzufügen lassen, daß $D = 0$ wird. Da C den Rang s hat, gibt es eine (n, n) -reihige reguläre Matrix X_0 mit $X_0 C = \begin{pmatrix} 0 \\ E_s \end{pmatrix}$, und da B schiefsymmetrisch ist, eine (m, m) -

reihige reguläre Matrix Y mit $Y B Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (MacDuffee, a. a. O., S. 52). Durch $X = X_0 + Y + E_{j-n-m}$ gewinnen daher B und C die für die Normalform vorgeschriebene Gestalt. Da es nun nach unserem Hilfssatz eine (n, n) -reihige reguläre Matrix X_0 mit oberhalb der Diagonale verschwindenden Elementen so gibt, daß $X_0 A_0 X_0'$ Diagonalmatrix ist, und man zufolge der speziellen Gestalt von X_0 eine (s, s) -reihige reguläre Matrix Z so finden kann, daß die Transformation von A mit $X = X_0 + E_m + Z + E_{j-n-m-i}$ die gewonnene Normalform für C nicht zerstört, ist der Existenzbeweis für die Normalform erbracht. Seien nun zwei Matrizen A, \bar{A} in der Normalform mit $A_0 = (a_1, \dots, a_r, a'_1, \dots, a'_s)$, $\bar{A}_0 = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r, \bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_s)$ und übereinstimmenden Invarianten vorgegeben. Aus der Gleichheit der Invarianten II folgt die Existenz von vier Matrizen $(x_{ik}), (y_{ik}), (z_{ik}), (\bar{z}_{ik})$ mit

$$(5.3_1) \quad \bar{a}_i = \sum x_{ik}^2 a_k + \sum \bar{z}_{ik}^2 a'_k,$$

$$(5.3_2) \quad \bar{a}'_i = \sum z_{ik}^2 a_k + \sum y_{ik}^2 a'_k$$

und aus dem Übereinstimmen der Invarianten III folgt die Existenz einer regulären (r, r) -reihigen Matrix X_r mit $X_r A_r X_r' = \bar{A}_r$, wenn wir $(a_1, \dots, a_r) = A_r$ und entsprechend $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r) = \bar{A}_r$ setzen. Durch Vergleich mit (5. 3₁) ergibt sich daraus, da ja A_0 die Null nicht darstellt, $(x_{ik}) = X_r$ und $\bar{z}_{ik} = 0$. Es ist also auch $(y_{ik}) = X_s$ regulär. Setzen wir noch $(a'_1, \dots, a'_s) = A_s$, $(\bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_s) = \bar{A}_s$ und $(z_{ik}) = Z$, so folgt aus (5. 3₂), daß in der symmetrischen Matrix $X_s A_s X_s' + Z A_s Z' - \bar{A}_s = R$ die Diagonalelemente verschwinden und es daher eine (s, s) -reihige Matrix U_s mit $U_s X_s' + X_s U_s' = R$ gibt. Setzen wir noch $X_r A_r Z' X_s'^{-1} = U$, so rechnet man leicht nach, daß mit

$$X = \begin{pmatrix} X_r & 0 & 0 & U & 0 \\ Z & X_s & 0 & U_s & 0 \\ 0 & 0 & E_{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_s'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_s \end{pmatrix} \quad A = \delta - r - 2(s+t)$$

die Beziehung $XA X' = \bar{A}$ gilt, w. z. b. w.

Zusätzlich bemerken wir noch, daß, wie leicht einzusehen, nur im Falle $t = 0$ A auf Diagonalform gebracht werden kann. Unser Algebrenproblem wird nun gelöst durch

Satz 4. Im Falle $p = 2$ sind zwei Algebren vom Geschlecht $(\delta, 1)$, deren Fundamentalmatrizen in der Normalform durch $A_0 = (a_1, \dots, a_{r+s})$, t bzw. $\bar{A}_0 = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{\bar{r}+\bar{s}})$, \bar{t} gegeben sind, dann und nur dann isomorph, wenn

1. $r = \bar{r}$, $s = \bar{s}$, $t = \bar{t}$ gilt,

2. es ein $c \neq 0$ so gibt, daß sowohl die Formen $c \cdot \sum_{i=1}^{\bar{r}+\bar{s}} \bar{a}_i \bar{x}_i^2$ und $\sum_{i=1}^{r+s} a_i x_i^2$ wie die Matrizen (und zwar im Sinne von (5. 1)) $(c\bar{a}_1, \dots, c\bar{a}_{\bar{r}})$ und (a_1, \dots, a_r) äquivalent sind.

Der Beweis ergibt sich sofort aus Satz 3. Man erkennt ferner leicht die Gültigkeit der Beziehung

$$r + 2(s+t) = \delta_0$$

und die Tatsache, daß der Elementarindex \bar{r} dann und nur dann < 3 ist, wenn $r = s = 0$ gilt.

Wir sind jetzt in der Lage, für $\delta = 2$ alle Typen aufzuzeigen. Um aus jedem Typus eine Normalform herausgreifen zu können, betrachten wir im Grundkörper die durch $\alpha = \frac{1}{2} \bar{a}$ erzeugte Einteilung in Quadratklassen und repräsentieren jede Klasse durch eins ihrer Elemente. Die aus den von Null verschiedenen Quadraten bestehende Hauptklasse soll dabei durch 1 repräsentiert werden, und in Analogie zur Zahlentheorie wollen wir ein solches, im folgenden dauernd beibehaltenes Repräsentantensystem als *System der quadratfreien Kerne* bezeichnen. Nach Satz 2 werden nun im Falle $p \neq 2$

alle untereinander nicht isomorphen Normalformen des Geschlechts (2, 1) durch

$$A. \quad w_1^2 = w_1', \quad w_1 w_2 = 0, \quad w_2^2 = a w_1'$$

dargestellt, wenn a alle quadratfreien Kerne durchläuft. Für $p = 2$ erhalten wir wegen $r + 2(s + t) \leq 2$ die Normalformen der Typen mit $\bar{r} = 3$ zu

1. $r = 1, \quad s = 0, \quad t = 0: \quad w_1^2 = w_1', \quad w_1 w_2 = 0, \quad w_2^2 = 0;$
2. $r = 0, \quad s = 1, \quad t = 0: \quad w_1^2 = w_1', \quad w_1 w_2 = w_1', \quad w_2^2 = 0;$
3. $r = 2, \quad s = 0, \quad t = 0: \quad w_1^2 = w_1', \quad w_1 w_2 = 0, \quad w_2^2 = a w_1',$

wo a die quadratfreien Kerne mit Ausnahme der Werte 0 und 1 durchläuft. Für $a = 0$ geht 3. in 1. über, und für $a = 1$ erhalten wir nach einer Transformation die Form 2. Für $\bar{r} = 3$ gibt es also keine Ausnahmetypen. Anders dagegen für $\bar{r} = 2$: aus $r = s = 0$ folgt $t = 1$, also

$$B. \quad w_1^2 = 0, \quad w_1 w_2 = w_1', \quad w_2^2 = 0.$$

Diese Ergebnisse lassen eine interessante Nachprüfung durch den von Scorza [4] behandelten allgemeineren Fall „Rang=Index“ zu. Scorza hat dabei aber die Möglichkeit des Falles $p = 2$ nicht in Betracht gezogen, so daß bei ihm der Ausnahmetyp B unter den nichtkommutativen Systemen als das „schiefsymmetrische Ausnahmesystem“ erscheint. Um für $p \neq 2$ die Normalformen des Geschlechts (2, 2) zu erhalten, brauchen wir nach Satz 1 nur die Fundamentalmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ von Typ A als Koeffizientensystem der quadratischen Fundamentalf orm zu nehmen: $w_1^2 + a w_2^2 = 0$. Vertauschen wir noch w_1 mit w_2 und ersetzen a durch $-a$, so haben wir:

$$C. \quad w_1^2 = w_1', \quad w_1 w_2 = w_2', \quad w_2^2 = a w_1',$$

wo a die quadratfreien Kerne durchläuft. Um auch für $p = 2$ die Normalformen aufstellen zu können, beachten wir, daß eine binäre quadratische Form bei $p = 2$ durch Transformation der Variablen und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten immer auf eine der beiden Formen $a x^2 - y^2$, $a x^2 + x y - y^2$ gebracht werden kann. Der erste Ausdruck liefert uns dieselbe Normalform wie C , nur durchläuft jetzt a ein Repräsentantensystem der durch

$$(5.4) \quad \bar{a} = \frac{A^2 a + B^2}{C^2 a + D^2}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0$$

erzeugten Klasseneinteilung (der Repräsentant der aus allen Quadraten bestehenden Hauptklasse sei 0). Die restlichen Typen betrachten wir, um formale Schwierigkeiten zu umgehen, nur für den Fall eines quadratisch-

separabel-abgeschlossenen Grundkörpers¹²⁾. Dann läßt sich nämlich $ax^2 + xy - y^2$ in $xy - y^2$ transformieren, und wir erhalten:

$$D. \quad w_1^2 = w_1', \quad w_1 w_2 = w_2', \quad w_2^2 = w_2'.$$

Da das Geschlecht (2, 3) nur den bekannten Typ „maximalen Ranges“ enthält, haben wir damit alle nilpotenten Algebren vom Defekt 2 und Index 3 dargestellt.

Gehen wir nun zur Betrachtung des Falles $\delta' = 2$ für $\delta > 2$ über. Die Isomorphie zweier Algebren mit den Fundamentalmatrizen A, B bzw. \bar{A}, \bar{B} drückt sich dann in Gleichungen der Form

$$(5.5) \quad \begin{aligned} aA + bB &= X' \bar{A} X \\ cA + dB &= X' \bar{B} X \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad |X| \neq 0$$

aus. Wir benötigen also für das Folgende eine Invariantentheorie der Paare symmetrischer Matrizen. Eine solche ist aber explizit nur für algebraisch-abgeschlossene Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik und für Paare A, B , bei denen B denselben Rang wie die mit den Unbestimmten u, v gebildete Matrix $uA + vB$ hat, entwickelt (Dickson [3], S. 109f.). Wir wollen daher auch bei unserem Problem den Grundkörper als algebraisch-abgeschlossenen mit $p \neq 2$ annehmen, und — was nach (5.5) stets möglich ist — das Fundamentalmatrizenpaar so normiert denken, daß B den Rang von $uA + vB$ hat. Unter Benutzung der Elementarteiler $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$ ¹³⁾ und der Minimalgradzahlen (Dickson [3], S. 127) eines Matrizenpaares formulieren wir dann den

Satz 5. *Zwei durch ihre Fundamentalmatrizen A, B bzw. \bar{A}, \bar{B} definierten Algebren vom Geschlecht $(\delta, 2)$ über einem algebraisch-abgeschlossenen Grundkörper K mit von 2 verschiedener Charakteristik sind dann und nur dann isomorph, wenn die Elementarteilerexponenten und Minimalgradzahlen der Paare A, B und \bar{A}, \bar{B} übereinstimmen und die Elementarteilerwurzeln λ_i und $\bar{\lambda}_i$ durch eine projektive Transformation*

$$(5.6) \quad \bar{\lambda}_i = \frac{a\lambda_i + b}{c\lambda_i + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

zusammenhängen.

Zusatz. *Hat das Paar A, B nicht mehr als drei verschiedene Elementarteilerwurzeln, so bilden die Elementarteilerexponenten zusammen mit den Minimalgradzahlen ein vollständiges Isomorphieinvariantensystem.*

¹²⁾ Das ist offenbar damit gleichwertig, daß im Grundkörper zu jedem a eine Wurzel von $z^2 + z + a = 0$ existiert.

¹³⁾ Wobei λ_i als Elementarteilerwurzel, e_i als Elementarteilerexponent bezeichnet werden soll.

Die Invarianz der Minimalgradzahlen ergibt sich daraus, daß sie allein durch die Schar $uA + vB$ definiert sind. Um das Verhalten der Elementarteiler festzustellen, beachten wir, daß in (5.5) c und d so beschaffen sein müssen, daß für jede Elementarteilerwurzel λ_i von A, B

$$(5.7) \quad c\lambda_i + d \neq 0$$

gilt; denn sonst hätte — wie sich mit Hilfe der bei Dickson ([3], S. 131) aufgestellten Normalformen sofort ergibt — \bar{B} einen kleineren Rang als B , während doch $u\bar{A} + v\bar{B}$ nach (5.5) denselben Rang wie $uA + vB$ hat. Man erkennt ferner, daß die als Quotienten von größten gemeinsamen Teilern von Unterdeterminanten der in $K[u, v]$ gebildeten Matrix $uA + vB$ eingeführten invarianten Faktoren (Dickson [3], S. 88 und 102) in der Form $J(u, v) = \prod_i (u\lambda_i + v)^{g_i}$ zerfallen, wo die $(\lambda_i - \lambda)^{g_i}$ gerade die Elementarteiler von A, B sind. Die invarianten Faktoren von \bar{A}, \bar{B} bestimmen sich nun auf dieselbe Weise aus der Matrix

$$(aA + bB)u + (cA + dB)v = (au + cv)A + (bu + dv)B$$

zu $\bar{J}(u, v) = \prod_i (u\bar{\lambda}_i + v)^{\bar{g}_i}$, wo die $(\bar{\lambda}_i - \lambda)^{\bar{g}_i}$ die Elementarteiler von \bar{A}, \bar{B} sind. Mit einem konstanten Faktor $C \neq 0$ ist also

$$\bar{J}(u, v) = C \cdot J(au + cv, bu + dv),$$

und daraus folgt wegen (5.7) $g_i = \bar{g}_i$ und die Gleichung (5.6), w. z. b. w. Stimmen umgekehrt die Paare A, B und \bar{A}, \bar{B} in Elementarteilerexponenten und Minimalgradzahlen überein und gilt eine Beziehung (5.6), so stimmen nach dem eben Bewiesenen die Paare \bar{A}, \bar{B} und $aA + bB, cA + dB$ in Elementarteilern und Minimalgradzahlen überein, woraus sich (Dickson [3], S. 131) die Existenz einer regulären Matrix X ergibt, mit der die Beziehung (5.5) gilt, w. z. b. w. Die Richtigkeit des Zusatzes folgt daraus, daß einmal die Tatsache „ A, B besitzt höchstens drei verschiedene Elementarteilerwurzeln“ isomorphieinvariant ist, und zum anderen bekanntlich jedes Tripel von verschiedenen Elementen durch eine passende projektive Transformation in ein beliebig vorgegebenes anderes Tripel verschiedener Elemente übergeführt werden kann.

Das Problem unseres Satzes ist schon bei Hazlett (a. a. O., § 18) behandelt, doch umfaßt das dort gewonnene Ergebnis — obwohl Hazlett diese Tatsache nicht erwähnt — nicht den Fall $|uA + vB| = 0$, in dem im allgemeinen die bei Hazlett gar nicht in Betracht gezogenen Minimalgradzahlen durchaus wesentliche Invarianten sind.

Die schon zum Beweis von Satz 5 notwendige Voraussetzung der algebraischen Abgeschlossenheit des Grundkörpers läßt eine Untersuchung der Fälle $\delta' > 2$ für allgemeines δ als wenig aussichtsreich erscheinen. Da ein

algebraisch-abgeschlossener Körper über jeden Unterkörper, über dem er endlich ist, separabel sein muß, reichen aber schon unsere für $\delta' = 2$ gewonnenen Ergebnisse nicht mehr zu der gemäß § 4 vorzunehmenden Untersuchung der Algebren mit $\lambda > 0$ hin, für die wir ja die Strukturtheorie der nilpotenten Algebren über dem Radikalrestklassenkörper benötigen. Wir müssen uns daher im folgenden auf die Behandlung der Fälle $\delta' = \frac{\delta(\delta+1)}{2}$, $1, \frac{\delta(\delta+1)}{2} - 1$ beschränken.

§ 6.

Handhabung der Methode in den Fällen

$$\delta' = \frac{\delta(\delta+1)}{2}, \quad 1, \quad \frac{\delta(\delta+1)}{2} - 1.$$

Wegen der verhältnismäßig komplizierten Bauart des Ausdruckes (4. 5) beschränken wir uns auf den Fall $q_2 > 2$ (d. h. $e_2 > 1$, wenn $p = 2$), für den also $\eta_i = 0$ ($i = 1, \dots, \lambda$) gilt. In den folgenden Sätzen erwähnen wir diese Voraussetzung gar nicht mehr besonders.

Für $\delta' = \frac{\delta(\delta+1)}{2}$ nehmen wir \mathfrak{B} in ausgezeichnete kanonische Darstellung an, d. h. die w'_l ($l = 1, \dots, \delta'$) werden durch die $w_i w_k$ ($i \leq k$; $i, k = 1, \dots, \delta$) gebildet. Es gibt also keine \mathfrak{B} -Invarianten. Ersetzen wir in den Gleichungen von § 4 überall den von 1 bis δ' laufenden Index durch ein Indexpaar (ik) mit $i \leq k$ ($i, k = 1, \dots, \delta$), so erhalten wir ohne Mühe

$$d_{ih}^{(ik)} = 1 \text{ für } l = i, \quad h = k \text{ und } l = k, \quad h = i; \quad d_{ih}^{(ik)} = 0 \text{ sonst};$$

$$Z_{(ik)(lh)} = X_{il} X_{kh} + X_{ih} X_{kl} \text{ für } l < h, \quad Z_{(ik)(il)} = X_{il} X_{kl}.$$

Aus (4. 12) wird daher (wieder mit $i > \varrho$):

$$\left. \begin{aligned} \sum_k (f_{isk} V_{kt} + f_{itk} V_{ks}) + \sum_{(uv)} \bar{g}_{i(uv)} (X_{us} X_{vt} + X_{ut} X_{vs}) &= g_{i(st)} \\ \text{für } s < t, \end{aligned} \right\} \quad (6. 1)$$

$$\sum_k f_{isk} V_{ks} + \sum_{(uv)} \bar{g}_{i(uv)} X_{us} X_{vs} = g_{i(ss)}.$$

Die Strukturtheorie der ersten Typenklasse erster Stufe (und damit der ersten Stufe überhaupt) ergibt sich nun in aller Vollständigkeit aus den Sätzen 3 bis 5 von § 4. Für $\varrho = 0$ nehmen die Gleichungen (6. 1) die Gestalt an:

$$\sum_{(uv)} \bar{g}_{i(uv)} (X_{us} X_{vt} + X_{ut} X_{vs}) = g_{i(st)} \text{ für } s < t,$$

$$\sum_{(uv)} \bar{g}_{i(uv)} X_{us} X_{vs} = g_{i(ss)},$$

woraus sich die Beziehungen

$$\sum_{i \leq v} \bar{g}_{i(uv)} \bar{x}_u \bar{x}_v = \sum_{i \leq t} g_{i(uv)} x_u x_v \quad (i = 1, \dots, \delta)$$

$$\bar{x}_i = \sum_k X_{ik} x_k \quad (i = 1, \dots, \delta)$$

ergeben. Es gilt also der

Satz 1. Im Falle $\delta' = \frac{\delta(\delta+1)}{2}$ bilden die Simultaninvarianten der quadratischen Formen $\sum_{i \leq k} g_{l(i k)} x_i x_k$ ($l = 1, \dots, \lambda$) ein vollständiges Invariantensystem für die Typen der letzten Stufe.

Das Problem der Äquivalenz von λ quadratischen Formen in δ Variablen ist für allgemeines λ und δ nicht explizit gelöst. Für Spezialfälle, z. B. $\delta = 1$, dagegen läßt sich die Lösung ohne weiteres hinschreiben. Lassen wir für $\delta = 1$ überall den von 1 bis δ laufenden, also überflüssig gewordenen Index fort, so gilt der

Satz 2. Die h -te Typenklasse erster Stufe der Algebren vom Defekt 1 wird durch das aus den

1. f_i mit $i > h$,
2. g_i mit $i < h$,
3. $\sum_{k=h+1}^{\lambda} F_k^i(A) g_k$ ($i = h+1, \dots, \lambda$)
mit $A = (f_{ik})_{i=h+1, \dots, \lambda; k=1, \dots, \lambda}$

gebildete vollständige Invariantensystem beschrieben. Für die h -te durch $g_i = 0$ für $i < h$, $g_h \neq 0$ definierte Typenklasse letzter Stufe bilden

1. der quadratfreie Kern von g_h ,
2. die $\frac{g_i}{g_h}$ mit $i > h$

ein vollständiges Invariantensystem, und außer diesen λ Typenklassen gibt es in der letzten Stufe nur noch den durch $g_i = 0$ ($i = 1, \dots, \lambda$) gekennzeichneten Nulltypus.

Die Behauptung des Satzes ergibt sich für die erste Typenklasse erster Stufe sofort aus Satz 4 von § 4, und für die übrigen Typenklassen gewinnen wir sie, indem wir beachten, daß die genaue Übertragung der zu Satz 4 führenden Entwicklungen auf die h -te Typenklasse neben den f_i ($i \neq h$) als einzige Invarianten die $\sum_{k \neq h}^{\lambda} F_k^i(B) g_k$ ($i = 1, \dots, h-1, h+1, \dots, \lambda$) liefert, wo $B = (f_{ik})_{i=1, \dots, h-1, h+1, \dots, \lambda; k=1, \dots, \lambda}$ ist: Da $f_i = 0$ für $i < h$ gilt, verschwinden in B die ersten $h-1$ Zeilen, weshalb wegen $F(B) = E - BG(B)$ (siehe S. 243) in $F_k^i(B)$ die ersten $h-1$ Zeilen gerade die $h-1$ ersten Einheitsvektoren sind, woraus man sofort die Behauptung erkennt. Die für die letzte Stufe ausgesprochene Behauptung folgt direkt aus Satz 1.

Für spätere Anwendungen leiten wir noch eine Folgerung aus (6.1) her: Im Falle $\delta \leq \lambda$ gehen diese Gleichungen für die zweite Typenklasse ($\varrho = \delta - 1$) über in

$$(6.2) \quad \begin{cases} \bar{g}_{i(s)} + X_s \bar{g}_{i(s\delta)} + X_s \bar{g}_{i(t\delta)} + 2 X_s X_t \bar{g}_{i(s\delta)} \\ \quad + \sum_k (f_{isk} V_{ks} + f_{itk} V_{ks}) = g_{i(s)} \text{ für } s < t < \delta, \\ \bar{g}_{i(s)} + X_s \bar{g}_{i(s\delta)} + X_s^2 \bar{g}_{i(\delta\delta)} + \sum_k f_{isk} V_{ks} = g_{i(s)} \text{ für } s < \delta, \\ X_\delta \bar{g}_{i(s\delta)} + 2 X_\delta X_s \bar{g}_{i(s\delta)} + \sum_k f_{isk} V_{ks} = g_{i(s\delta)} \text{ für } s < \delta, \\ X_i \bar{g}_{i(\delta\delta)} = g_{i(\delta\delta)}, \quad X_\delta \neq 0 \quad (i = \delta, \dots, \lambda). \end{cases}$$

Man braucht nur $X_{\delta i} = X_i$ zu setzen, um unter Beachtung von (4.8) und der aus (4.6) folgenden Beziehung $f_{i\delta} = 0$ die Identität sofort einzusehen.

In den Fällen $\delta' = 1$ und $\delta' = \frac{\delta(\delta+1)}{2} - 1$ bilden im Gegensatz zu dem bisher behandelten Fall die \mathfrak{B} -Invarianten einen durchaus wesentlichen Teil des aufzustellenden Invariantensystems. Für jedes Wertsystem der \mathfrak{B} -Invarianten nun wählen wir eine Normalform von \mathfrak{B} — und zwar eine ausgezeichnete kanonische Form von der auf S. 243 oben beschriebenen Eigenschaft — aus und normieren auf diese. Dadurch ist das Problem der Bestimmung der \mathfrak{B} -Invarianten zurückgeführt auf die Aufgabe, diese Normalformen aufzustellen. Bei $\delta' = 1$ ist, — wir setzen $d_{ik}^1 = d_{ik}$ — in der s -ten Stufe ($s = \text{Min}(\lambda, \delta) - \varrho + 1$) die Matrix $(d_{ik})_{i,k=1,\dots,\varrho}$ invariant bis auf einen von Null verschiedenen skalaren Faktor. Da nun das erste nicht verschwindende der lexikographisch geordneten d_{ik} auf 1 normiert ist, haben wir den Teil

$$D_\varrho = (d_{ik})_{i,k=1,\dots,\varrho}$$

der aufzustellenden Normalform bereits bestimmt. In einem Sonderfall können wir auch über den übrigen Teil der Normalform eine verhältnismäßig erschöpfende Aussage machen:

Satz 3. Ist D_ϱ regulär, so werden die Normalformen der Multiplikationstafel von \mathfrak{B} durch $\bar{D}_\varrho \dot{+} A$ angegeben, wo A ein Repräsentantensystem der durch (5.1) erzeugten Klasseneinteilung der $(\delta - \varrho)$ -reihigen Matrizen durchläuft.

Denn mit $D = \begin{pmatrix} D_\varrho & C \\ C & \bar{D} \end{pmatrix}$ und $X = \begin{pmatrix} E_\varrho & -D_\varrho^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix}$ erhalten wir $\bar{D} = D_\varrho \dot{+} B$, und aus $\begin{pmatrix} E_\varrho & 0 \\ Z & Y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\varrho & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\varrho & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} D_\varrho & 0 \\ 0 & \bar{B} \end{pmatrix}$ folgt $c = 1$, $Z = 0$ und $YBY' = \bar{B}$, womit alles bewiesen ist.

Ist $|D_\varrho| = 0$, so läßt sich keine allgemeine Aussage mehr machen. Wir beschränken uns daher darauf, für $\delta = 2$ und $\varrho = 1$ ein vollständiges Normalformensystem anzugeben. Die Aufstellung gelingt leicht unter Anwendung

von Satz 3, und auch der Ausnahmefall $|D_1| = 0$ bietet, da ja dann $d_{11} = 0$ ist, keine besondere Schwierigkeiten. Für $p \neq 2$ erhalten wir so:

$$\text{I.} \quad w_1^2 = w'_1, \quad w_1 w_2 = 0, \quad w_2^2 = a w'_1,$$

wobei a alle quadratfreien Kerne durchläuft,

$$\text{II.} \quad w_1^2 = 0, \quad w_1 w_2 = w'_1, \quad w_2^2 = 0,$$

$$\text{III.} \quad w_1^2 = 0, \quad w_1 w_2 = 0, \quad w_2^2 = w'_1,$$

während bei $p = 2$ noch die Ausnahmeform

$$\text{IV.} \quad w_1^2 = 0, \quad w_1 w_2 = w'_1, \quad w_2^2 = w'_1$$

hinzutritt.

Zufolge der Normierung der Multiplikationstafel gilt nun mit $Z_{11} = Z \neq 0$ (siehe S. 240) und $(X_{ik}) = X'$: $X'(d_{ik})X = Z(d_{ik})$. Dadurch wird also sowohl der Bereich der zulässigen X_{ik} wie der der Z eingeschränkt. Die Z bilden nun offenbar eine multiplikative Gruppe, die wir als die zu der betreffenden Normalform gehörige *Multiplikationsgruppe* 3 bezeichnen wollen. Es gilt nun der

Satz 4. *Im Falle $\delta' = 1$ bilden für die erste Typenklasse s -ter Stufe bei vorgegebener Normalform für \mathfrak{B} die bis auf einen gemeinsamen Faktor aus der Multiplikationsgruppe invarianten Ausdrücke*

$$\sum_{k=\varrho+1}^{\lambda} F_k^i(A) g_k \quad (i = \varrho + 1, \dots, \lambda),$$

worin $A = (a_{ik}^i)_{i=\varrho+1, \dots, \lambda; k=1, \dots, \lambda; i=1, \dots, \delta}$ mit $a_{ik}^i = \sum_{h=1}^{\delta} f_{ikh} d_{ih}$ gesetzt ist, zusammen mit den

$$f_{ik} \quad (i = \varrho + 1, \dots, \lambda; k = 1, \dots, \varrho)$$

ein vollständiges Invariantensystem. Für die letzte Stufe wird ein solches durch die ebenfalls bis auf einen gemeinsamen Faktor aus der Multiplikationsgruppe invarianten g_i ($i = 1, \dots, \lambda$) gebildet.

Denn aus (4.12) folgt $\sum_{h,k,l} f_{ikh} d_{lh} V_{kl} + Z g_i = g_i$ ($i = \varrho + 1, \dots, \lambda$), und daraus ergibt sich nach dem Hilfssatz von § 4 und auf Grund der Tatsache, daß $f_{ikh} = 0$ für $\varrho = 0$ gilt, sofort die Behauptung.

Die einzige noch zu lösende Aufgabe ist also die explizite Bestimmung von 3. Offenbar besteht 3 für $\varrho = \delta$ nur aus dem Einselement, wodurch die Behauptung von Satz 4 — wie es ja auch sein muß — in die von Satz 4, § 4 übergeht. Ebenso enthält 3 nur die Eins, wenn $D_{\varrho} \neq 0$ ($\varrho > 0$) ist. Der entgegengesetzte Fall, nämlich daß 3 aus der vollen multiplikativen Gruppe des Körpers $K(a)^{14)}$ besteht, tritt, wie man leicht einsieht, in der letzten Stufe

¹⁴⁾ $K(a)$ gebrauchen wir im folgenden als Abkürzung für $K(a_1, \dots, a_s)$.

auf, wenn $K(a)$ quadratisch-abgeschlossen oder der Elementindex $\bar{r} = 2$ ist. Eine allgemeine explizite Bestimmung von \mathfrak{B} ist ohne nähere Kenntnis sämtlicher Normalformen unmöglich. Wir beenden daher unsere Untersuchungen des Falles $\delta' = 1$ mit der Angabe der Multiplikationsgruppen für die oben aufgestellten Normalformen im Falle $\delta = 2$, $\varrho = 1$:

\mathfrak{B}_I besteht aus dem Einselement,

\mathfrak{B}_{II} besteht aus allen von Null verschiedenen Elementen aus $K(a)$,

\mathfrak{B}_{III} besteht aus allen von Null verschiedenen Quadraten aus $K(a)$,

\mathfrak{B}_{IV} besteht aus dem Einselement,

und für die in § 5 aufgestellten Normalformen des Falles $\delta = 2$, $\varrho = 0$:

\mathfrak{B}_A besteht aus allen von Null verschiedenen Elementen der Form $x^2 + ay^2$ aus $K(a)$,

\mathfrak{B}_B besteht aus allen von Null verschiedenen Elementen aus $K(a)$.

Wir wenden uns nun dem Falle $\delta' = \frac{\delta(\delta+1)}{2} - 1$ ($\delta \geq 2$) zu, wo die Multiplikationstafel von \mathfrak{B} am einfachsten durch die quadratische Fundamentalforn $f(w_1, \dots, w_\delta) = 0$ dargestellt wird. Die $X_{i,k}$ werden dann dadurch eingeschränkt, daß $f(x_1, \dots, x_\delta) = cf(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\delta)$ sein soll mit $\bar{x}_i = \sum X_{i,k} x_k$ und $c \neq 0$. Die $Z_{i,k}$ bestimmen sich offenbar eindeutig aus den $X_{i,k}$. In (4.12) nimmt nun das Glied $\sum g_{i,k} Z_{i,k}$ keine so einfache Gestalt an wie bei $\delta' = 1$. Eine weitere Behandlung des Strukturproblems ist hier ohne die nähere Kenntnis der Normalformen und der für eine Normalform zulässigen $X_{i,k}$ unmöglich. Um im nächsten Paragraphen dieses Problem wenigstens für $\delta = 2$ behandeln zu können, bestimmen wir noch die Normalformen nebst den zulässigen Transformationsmatrizen für $\delta = 2$, $\varrho = 1$:

$$I. \quad w_1^2 = w_1', \quad w_1 w_2 = w_2', \quad w_2^2 = a w_1',$$

wo a für $p \neq 2$ alle quadratfreien Kerne und für $p = 2$ ein Repräsentantensystem der durch $A^2 a + B^2 = \bar{a}$ ($A \neq 0$) erzeugten Klasseneinteilung (Repräsentant der aus allen Quadraten bestehenden Hauptklasse sei 0) durchläuft.

$$\text{Zulässige Matrizen: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ für } a \neq 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \text{ mit } x \neq 0 \text{ für } a = 0$$

$$II. \quad w_1^2 = w_1', \quad w_1 w_2 = 0, \quad w_2^2 = w_2'.$$

$$\text{Zulässige Matrizen: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \text{ mit } x \neq 0$$

$$III. \quad w_1^2 = 0, \quad w_1 w_2 = w_1', \quad w_2^2 = w_2'.$$

$$\text{Zulässige Matrizen: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \text{ mit } x \neq 0.$$

Im Falle $p = 2$ gibt es noch Ausnahmeformen, die wir aber wieder nur für quadratisch-separabel-abgeschlossenes $K(a)$ betrachten. Dann gibt es nur noch:

$$\text{IV.} \quad w_1^2 = w_1', \quad w_1 w_2 = w_2', \quad w_2^2 = w_2'.$$

$$\text{Zulässige Matrizen: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In I und IV erkennen wir die in § 5 hergeleiteten Normalformen C und D wieder. Die Aufstellung der zulässigen Matrizen für diese beiden (Fall $\varrho = 0$) ergibt für C , und zwar unabhängig vom Wert der Charakteristik:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ \pm a y & \pm x \end{pmatrix} \text{ mit } x^2 - a y^2 \neq 0 \text{ für } a \neq 0, \begin{pmatrix} x y \\ 0 z \end{pmatrix} \text{ mit } x \neq 0, z \neq 0 \text{ für } a = 0,$$

und für D :

$$\begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & x+y \\ y & y \end{pmatrix} \text{ mit } x \neq 0, y \neq 0.$$

§ 7.

Die Algebren vom Defekt 2 und Index 3.

Wie im vorigen Paragraphen beschränken wir uns auch hier auf den Fall $q_1 > 2$. Für jeden Wert von $\delta' = 1, 2, 3$ ergibt sich nun die Strukturtheorie der Typen erster Stufe sofort aus den Sätzen 3 bis 5 von § 4, denn die Übertragung der dort für die erste Typenklasse gewonnenen Ergebnisse auf die h -te Typenklasse ergibt weder Komplikationen noch nennenswerte Vereinfachungen. Wir brauchen also nur noch für jeden der Werte $\delta' = 1, 2, 3$ die Fälle $\varrho = 1$ ($\lambda \geq 2$) und $\varrho = 0$ zu behandeln. Dabei beachten wir, daß die h -te Typenklasse zweiter Stufe außer durch $f_{\lambda 1} = 1, f_{i2} = 0$ ($i = 1, \dots, \lambda$) noch durch

$$(7.1) \quad f_{i1} = 0 \quad \text{für } i < h$$

gekennzeichnet ist. Im folgenden führen wir die Invarianten f_{i1} ($i > h$) nicht mehr besonders an. Multiplizieren sich die nicht sämtlich verschwindenden Größen A_1, \dots, A_n ($n > 1$) bei einer Transformation mit demselben von Null verschiedenen Faktor, so können wir diesen Tatbestand auch so ausdrücken: Die Verhältnisse $A_1 : \dots : A_n$ sind invariant. Für das Folgende ist es zweckmäßig, diese Formulierung auch auf die Fälle $A_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) und $n = 1$ auszudehnen. In diesen beiden Fällen bedeutet sie einfach, daß die Beziehungen $A_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) invariant sind, bzw. daß man A_1 auf die beiden Werte 0 und 1 normieren kann.

$$\delta' = 1.$$

$\varrho = 1$. Nach § 6, Satz 4 erhalten wir — für die h -te Typenklasse tritt hier wegen (7.1) eine ähnliche Abänderung auf, wie in § 6, Satz 2 —, wenn $G_i = \sum_{k=h+1}^{\lambda} F_k^i(A) g_k$ ($i = h+1, \dots, \lambda$) mit $A = (f_{ik})_{i=h+1, \dots, \lambda; k=1, \dots, \lambda}$ gesetzt wird, für die auf S. 256 aufgestellten Normalformen die vollständigen Invariantensysteme:

I, IV: $g_1, \dots, g_{h-1}, G_{h+1}, \dots, G_{\lambda}$,

II: Die Verhältnisse $g_1 : \dots : g_{h-1} : G_{h+1} : \dots : G_{\lambda}$,

III: 1. $g_1 = \dots = g_{h-1} = 0$.

Wenn G_k das erste nicht verschwindende G_i ist, der quadratfreie

Kern von G_k und die $\frac{G_i}{G_k} (k < i)$.

2. $g_i = 0 (i < k < h), g_k \neq 0$.

Der quadratfreie Kern von g_k und die $\frac{g_i}{g_k} (k < i < h), \frac{G_i}{g_k} (i > h)$.

$\varrho = 0$. Für die in § 5 aufgestellten Normalformen A und B erhalten wir die vollständigen Invariantensysteme:

A : Wenn g_k das erste nicht verschwindende g_i ist, der Repräsentant von g_k aus einem Repräsentantensystem der durch

$$(7.2) \quad (x^2 + ay^2)g = \bar{g}, \quad x^2 + ay^2 \neq 0$$

erzeugten Klasseneinteilung und die $\frac{g_i}{g_k} (i = k+1, \dots, \lambda)$.

B : Die Verhältnisse $g_1 : \dots : g_{\lambda}$.

$$\delta' = 2.$$

$\varrho = 1$. In der h -ten Typenklasse erhalten wir unter Anwendung des Hilfssatzes von § 4 nach (4.12), worin wir i die Werte $1, \dots, h-1, h+1, \dots, \lambda$ annehmen lassen, und (7.1) mit den Bezeichnungen

$$G_{il} = \sum_{k=h+1}^{\lambda} F_k^i(A) g_{kl} \quad (i = h+1, \dots, \lambda; l = 1, 2),$$

$$A = (f_{ik})_{i=h+1, \dots, \lambda; k=1, \dots, \lambda}$$

für die auf S. 258, aufgestellten Normalformen die vollständigen Invariantensysteme

I: 1. $a \neq 0$.

$g_{i1} (i < h), G_{i1} (i > h)$ und die bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenfaktor invarianten $g_{i2} (i < h), G_{i2} (i > h)$.

2. $a = 0$.

g_{i1} ($i < h$), G_{i1} ($i > h$) und die Verhältnisse

$$g_{i2} \dots : g_{h-1,2} : G_{h+1,2} \dots : G_{\lambda,2}.$$

II: g_{i1} ($i < h$), G_{i1} ($i > h$) und, wenn es ein erstes nicht verschwindendes g_{k2} gibt, der quadratfreie Kern von g_{k2} und die $\frac{g_{i2}}{g_{k2}}$ ($k < i \neq h$).

III: 1. Alle $g_{i2} = 0$

die Verhältnisse $g_{i1} : \dots : g_{h-1,1} : G_{h+1,1} \dots : G_{\lambda,1}$.

2. g_{k2} das erste nicht verschwindende g_{i2} .

g_{i2} ($i = k, \dots, \lambda$), nachdem g_{k2} auf seinen quadratfreien Kern normiert ist. Die weiteren Invarianten sind von Fall zu Fall verschieden:

$$p = 2: g_{i1} \ (i < h), \ G_{i1} \ (i > h).$$

$$p \neq 2: \text{a) } \underline{k < h.}$$

Bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenfaktor g_{i1} ($i < k$),

$$\begin{vmatrix} g_{i1} & g_{i2} \\ g_{k1} & g_{k2} \end{vmatrix} \quad (k < i < h), \quad \begin{vmatrix} G_{i1} & G_{i2} \\ g_{k1} & g_{k2} \end{vmatrix} \quad (i > h).$$

b) $k > h$.

Wenn l das größte $j \leq \lambda + 1$ mit $G_{i2} = 0$ ($i < j$) ist, die bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenfaktor invarianten g_{i1} ($i < h$), G_{i1} ($h < i < l$),

$$\begin{vmatrix} G_{i1} & G_{i2} \\ G_{l1} & G_{l2} \end{vmatrix} \quad (i > l).$$

IV: g_{i2} ($g_{i1} + g_{i2}$), g_{i2} ($i < h$); G_{i1} ($G_{i1} + G_{i2}$), G_{i2} ($i > h$).

$e = 0$. Für die in § 5 aufgestellten Normalformen C und D erhalten wir nach (4. 12) unter Benutzung der am Ende von § 6 stehenden Ergebnisse:

C : 1. $a \neq 0$.

Die Transformationsformeln lauten:

$$\begin{aligned} g_{i1} &= (x^2 + ay^2)\bar{g}_{i1} \pm 2axy\bar{g}_{i2}, \\ g_{i2} &= 2xy\bar{g}_{i1} \pm (x^2 + ay^2)\bar{g}_{i2}, \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, \lambda).$$

Daraus ergeben sich die vollständigen Invariantensysteme in den Fällen

$p = 2$: a) Alle $g_{i1} = 0$.

Wenn es ein erstes nicht verschwindendes g_{k2} gibt, der Repräsentant von g_{k2} aus einem Repräsentanten-

system der durch (7.2) erzeugten Klasseneinteilung und die $\frac{g_{i2}}{g_{k2}}$ ($i = k+1, \dots, \lambda$).

b) g_{k1} das erste nicht verschwindende g_{i1} .

Der Repräsentant von g_{k1} aus dem unter a) beschriebenen System, $\frac{g_{i1}}{g_{k1}}$ ($i = k+1, \dots, \lambda$) und

$$\frac{g_{i2}}{g_{k1}} \quad (i = 1, \dots, \lambda).$$

$p \neq 2$: $K(a)$ sei quadratisch-abgeschlossen (für allgemeines $K(a)$ läßt sich das Invariantensystem in keinem Falle explizit anschreiben).

a) $a = 1$. $\alpha) \underline{g_{i1}^2 = g_{i2}^2} \quad (i = 1, \dots, \lambda).$

Wenn, falls es ein erstes nicht verschwindendes g_{h1} gibt, auf $g_{h1} = g_{h2} = 1$ und, falls es ein erstes $k > h$ mit $g_{k1} + g_{k2} \neq 0$ gibt, auf $g_{k1} = 1$ normiert wird,

$$g_{i1}, g_{i2}, \quad (i \neq h, i \neq k).$$

$$\beta) \underline{g_{i1}^2 = g_{i2}^2} \quad (i < h), \quad g_{h1}^2 \neq g_{h2}^2.$$

Nachdem auf $g_{h1} = 1, g_{h2} = 0$ normiert ist, $g_{i1} \ (i \neq h)$ und bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenfaktor die $g_{i2} \ (i \neq h)$.

b) $a \neq 1$.

Wenn, falls es ein erstes nicht verschwindendes Paar g_{h1}, g_{h2} gibt, auf $g_{h1} = 1, g_{h2} = 0$ normiert wird (was wegen $a \neq x^2$ möglich ist),

$$g_{i1} \quad (i > h),$$

und bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenfaktor die

$$g_{i2} \quad (i > h).$$

2. $a = 0$.

Wenn, falls es ein erstes $g_{h1} \neq 0$ gibt, auf den quadratfreien Kern von g_{h1} normiert wird,

$$g_{i1} \quad (i \geq h).$$

Die weiteren Invarianten sind von Fall zu Fall verschieden:

$p = 2$: die Verhältnisse $g_{12} : \dots : g_{i2}$,

$p \neq 2$: die Verhältnisse

$$g_{12} : \dots : g_{k-1,2} : \begin{vmatrix} g_{k+1,2} & g_{k+1,1} \\ g_{k2} & g_{k1} \end{vmatrix} : \dots : \begin{vmatrix} g_{\lambda 2} & g_{\lambda 1} \\ g_{k2} & g_{k1} \end{vmatrix}.$$

D: Die Transformationsformeln lauten

$$g_{i1} = x^2 \bar{g}_{i1} \quad \text{oder} \quad = y^2 (\bar{g}_{i1} + \bar{g}_{i2})$$

$$g_{i2} = (x+y)^2 \bar{g}_{i1} + y^2 \bar{g}_{i2}.$$

Sie lassen sich ohne Mühe umformen zu

$$g_{i1}^2 + g_{i1} g_{i2} = (xy)^2 (\bar{g}_{i1}^2 + \bar{g}_{i1} \bar{g}_{i2})$$

$$(x+y)^4 (\bar{g}_{i1}^2 + \bar{g}_{i1} \bar{g}_{i2}) = g_{i2}^2 + (x+y)^2 g_{i2} \bar{g}_{i2} + (xy)^2 \bar{g}_{i2}^2.$$

Wir setzen zur Abkürzung $g_{i1}^2 + g_{i1} g_{i2} = G_i$ und erhalten in den verschiedenen Fällen die vollständigen Invariantensysteme:

1. alle $G_i = 0$.

Wenn es ein erstes nicht verschwindendes g_{h2} gibt, der quadratfreie Kern von g_{h2} und die $\frac{g_{i2}}{g_{h2}}$ ($i > h$).

2. $G_i = 0$ ($i < h$), $G_h \neq 0$.

Nachdem G_h auf seinen quadratfreien Kern normiert ist,

$$G_h, \dots, G_1.$$

Die weiteren Invarianten berechnen sich von Fall zu Fall verschieden:

a) $g_{i2} = 0$ ($i < k < h$), $g_{k2} \neq 0$.

Nachdem g_{k2} auf seinen quadratfreien Kern normiert ist,

$$g_{k2}, \dots, g_{l2}.$$

b) $g_{i2} = 0$ ($i < h$).

Nachdem g_{h2} auf seinen Repräsentanten aus einem die Null enthaltenden Repräsentantensystem der durch

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^4 G_h = g^2 + \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3 g \bar{g} + \bar{g}^2, \quad x \neq 0$$

erzeugten Klasseneinteilung normiert ist,

$$g_{h2}, \dots, g_{l2}.$$

Denn aus der zufolge der Normierung geltenden Beziehung $g_{h2} = \bar{g}_{h2}$ folgt im Falle $G_h \neq 1$: $x = 1$, woraus sich die Behauptung sofort ergibt.

Im Falle $G_h = 1$ dagegen erhalten wir daneben noch $\frac{x^2+1}{x} = g_{h2}$. Diese Gleichung ist nun wegen $G_h = g_{h1}^2 + g_{h1} g_{h2} = 1$ immer nach x auflösbar. Durch Verwendung der so berechneten drei Werte für x erhalten wir für \bar{g}_{i2} die kubische Gleichung

$$z^3 + (g_{h2}^2 + 1) g_{i2} z^2 + (g_{i2}^2 (g_{h2}^2 + 1) + g_{h2}^4 G_i) z + g_{i2} (g_{i2}^2 + g_{h2}^4 G_i) = 0.$$

Daraus folgt aber offenbar die Invarianz ihrer Koeffizienten. Da nun zufolge der bei der Behandlung des Typus D in § 5 vorausgesetzten quadratisch-separablen Abgeschlossenheit von $K(a)$ 1 und 0 in einer Klasse liegen, also sicher $g_{h,2} \neq 1$ ist, ergibt sich aus der Invarianz des Koeffizienten von z^3 die Invarianz der $g_{h+1,2}, \dots, g_{\lambda,2}$.

$$\delta' = 3.$$

Bei Anwendung der Entwicklungen zu Anfang von § 6 ersetzen wir die Indexpaare (11), (12), (22) durch die bzw. Indizes 1, 2, 3.

$\varrho = 1$. Setzen wir (siehe Hilfssatz von § 4) $G_{i,l} = \sum_{k=h+1}^{\lambda} F_k^l(A) g_{k,i}$ ($i = h+1, \dots, \lambda$; $l = 1, 2, 3$) mit $A = (f_{i,k})_{i=h+1, \dots, \lambda; k=1, \dots, \lambda}$, so erhalten wir für die h -te Typenklasse unter Benutzung von (6. 2) — worin der Index i die Werte $1, \dots, h-1, h+1, \dots, \lambda$ durchläuft — und (7. 1) die vollständigen Invariantensysteme:

$$1. \underline{g_{i,3} = 0 \ (i < h), \ G_{i,3} = 0 \ (i > h)}.$$

$$a) \underline{g_{i,2} = 0 \ (i < h), \ G_{i,2} = 0 \ (i > h)}$$

$$g_{i,1} \ (i < h), \ G_{i,1} \ (i > h).$$

$$b) \underline{g_{i,2} = 0 \ (i < h), \ G_{i,2} = 0 \ (h < i < k), \ G_{k,2} \neq 0}.$$

Nachdem auf $G_{k,2} = 1, G_{k,1} = 0$ normiert ist,

$$G_{i,2} \ (k < i), \ g_{i,1} \ (i < h), \ G_{i,1} \ (h < i \neq k).$$

$$c) \underline{g_{i,2} = 0 \ (i < k < h), \ g_{k,2} \neq 0}.$$

Nachdem auf $g_{k,2} = 1, g_{k,1} = 0$ normiert ist,

$$g_{i,1} \ (k \neq i < h), \ G_{i,1} \ (i > h), \ g_{i,2} \ (k < i < h), \ G_{i,2} \ (i > h)$$

$$2. \underline{g_{i,3} = 0 \ (i < h), \ G_{i,3} = 0 \ (h < i < k), \ G_{k,3} \neq 0}.$$

Nachdem $G_{k,3}$ auf seinen quadratfreien Kern normiert ist,

$$g_{h+1,2}, \dots, g_{\lambda,2}.$$

Die weiteren Invarianten sind von Fall zu Fall verschieden:

$p = 2$: Nachdem $G_{k,1}$ auf seinen Repräsentanten aus einem Repräsentantensystem der durch $\bar{G} - G = XG_{k,2} + X^2G_{k,3}$ erzeugten Klasseneinteilung normiert ist,

$$g_{i,2}, \ g_{i,1} \left(g_{i,1} + \frac{G_{k,2}}{G_{k,3}^2} \left| \begin{matrix} g_{i,2} & G_{k,2} \\ g_{i,3} & G_{k,3} \end{matrix} \right| \right) \ (i < h)$$

und die

$$G_{i,2}, \ G_{i,1} \left(G_{i,1} + \frac{G_{k,2}}{G_{k,3}^2} \left| \begin{matrix} G_{i,2} & G_{k,2} \\ G_{i,3} & G_{k,3} \end{matrix} \right| \right) \ (i > h).$$

$p \neq 2$: Nachdem G_{k2} auf Null normiert ist,

$$g_{i1} (i < h), G_{i1} (h < i)$$

und die bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenfaktor invarianten $g_{i2} (i < h), G_{i2} (h < i \neq k)$.

3. $g_{i3} = 0 (i < k < h), g_{k3} \neq 0$.

Nachdem g_{k3} auf seinen quadratfreien Kern normiert ist,

$$g_{k3}, \dots, g_{i3}.$$

Die weiteren Invarianten sind von Fall zu Fall verschieden:

$p = 2$: Nachdem g_{k1} auf seinen Repräsentanten aus einem Repräsentantensystem der durch $\bar{g} - g = Xg_{k2} + X^2g_{k2}$ erzeugten Klasseneinteilung normiert ist,

$$g_{i2}, g_{i1} \left(g_{i1} + \frac{g_{k2}}{g_{k2}^2} \begin{vmatrix} g_{i2} & g_{k2} \\ g_{i3} & g_{k3} \end{vmatrix} \right) (i < h)$$

und die

$$G_{i2}, G_{i1} \left(G_{i1} + \frac{g_{k2}}{g_{k2}^2} \begin{vmatrix} G_{i2} & g_{k2} \\ G_{i3} & g_{k3} \end{vmatrix} \right) (i > h).$$

$p \neq 2$: Nachdem g_{k2} auf Null normiert ist,

$$g_{i1} (i < h), G_{i1} (i > h)$$

und die bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenfaktor invarianten $g_{i2} (k \neq i < h), G_{i2} (i > h)$.

$g = 0$. Um das Ergebnis von Satz 1, § 6 explizit auswerten zu können, nehmen wir $K(a)$ als quadratisch-abgeschlossen an, wozu $p \neq 2$ notwendig ist. Auf irgendeine Weise zeichnen wir einen der beiden Werte $a, -a$ aus und nennen ihn den *absoluten Wert* von a . Ferner führen wir die abkürzende Bezeichnung

$$4g_{i1}g_{i2} - g_{i3}^2 = \Delta_i$$

ein. Es ergeben sich dann, wenn wir den trivialen Fall $g_{i1} = g_{i2} = g_{i3} = 0$ ($i = 1, \dots, \lambda$) fortlassen, die vollständigen Invariantensysteme:

1. Alle $\Delta_i = 0$.

Das erste nicht verschwindende Tripel g_{h1}, g_{h2}, g_{h3} kann dann auf $g_{h1} = 1, g_{h2} = g_{h3} = 0$ normiert werden.

a) Alle $g_{i2} = g_{i3} = 0$

$$g_{h+1,1}, \dots, g_{\lambda,1}.$$

b) g_{k2}, g_{k3} das erste nicht verschwindende Paar.

Nachdem auf $g_{k1} = g_{k2} = 0, g_{k3} = 1$ normiert ist,

$$g_{i1}, g_{i3}$$

und bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenfaktor die $g_{i2} (i \neq h, i \neq k)$.

2. $\Delta_i = 0 (i < h), \Delta_h \neq 0$.

Es wird auf $g_{h1} = g_{h3} = 1, g_{h2} = 0$ normiert.

a) $g_{i1} = g_{i3}, g_{i2} = 0 (i = 1, \dots, \lambda)$

$$g_{i1}, g_{i3} (i \neq h).$$

b) k das größte $j \leq \lambda$ mit $g_{j1} = g_{j3}, g_{j2} = 0 (i < j)$.

Nachdem g_{k2} auf Null und $g_{k3} - g_{k1}$ auf seinen absoluten Wert normiert ist,

$$g_{i1}, g_{i3} (i \neq h)$$

und bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenfaktor die $g_{i2} (k < i \neq h)$.

Damit haben wir, von einigen Einschränkungen bez. $K(a)$ und der Bedingung $q_i > 2$ abgesehen, das Strukturproblem der primären Algebren vom Defekt 2 und Index 3 explizit gelöst.

III. Die Algebren vom Defekt 1.

§ 8.

Einteilung in Typenklassen.

Gemäß den Entwicklungen von § 3 werden die Algebren $(f(a), \mathfrak{B})$, $(f(\bar{a}), \mathfrak{B})$ durch

$$(8.1) \quad \left. \begin{aligned} f_i(a_i) &= \sum_{k=1}^{r-1} f_{ik}(a) w^k \\ f_i(\bar{a}_i) &= \sum_{k=1}^{r-1} \bar{f}_{ik}(\bar{a}) \bar{w}^k \end{aligned} \right\} (i = 1, \dots, \lambda)$$

bestimmt. Der Isomorphismus $(f(a), \mathfrak{B}) = (f(\bar{a}), \mathfrak{B})$ drückt sich nach § 3, Satz 6 unter Beachtung der dort gemachten Festsetzungen durch die Beziehungen

$$(8.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{a}_i &= a_i + \sum Y_{ik}(a) w^k, \\ \bar{w} &= \sum X_k(a) w^k, X_1 \neq 0 \end{aligned} \right.$$

aus. Wegen $f_i(a_i) = a_i^{q_i} - \alpha_i(a_1^{q_1}, \dots, a_{i-1}^{q_{i-1}})$ folgt aus (8.2): $f_i(a_i) \equiv f_i(\bar{a}_i) \pmod{w^{q_i}}$. Aus $f_i(a_i) \equiv 0 \pmod{w^h} (i = 1, \dots, \lambda)$ folgt daher im Falle $h \leq q_i$

dasselbe für die $f_i(\bar{a}_i)$, also wegen (8. 2): $f_i(\bar{a}_i) \equiv 0 \pmod{w^k}$. Das bedeutet nun aber nichts anderes, als daß die Aussage¹⁵⁾

$$f_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad k < h \text{ mit } h \leq q_i$$

isomorphieinvariant ist. Das größte $h \leq \text{Min}(q_i, r)$, für das diese Aussage Gültigkeit besitzt, ist also eine Invariante: Alle Algebren mit gleichem h fassen wir in der h -ten Typenklasse zusammen. Offenbar gibt es genau $H = \text{Min}(q_i, r)$ Typenklassen, und wir bemerken nebenbei, daß diese Typenklasseneinteilung unabhängig von der Darstellung (3. 1) des Radikalrestklassenkörpers ist. Denn sei $K(a'_1, \dots, a'_i)$ eine andere Darstellung, so stellen sich, wie man leicht nachrechnet, die $f_i(a'_i)$ als Polynome in den $f_i(a_i)$ mit verschwindendem konstanten Gliede dar; aus $f_i(a_i) \equiv 0 \pmod{w^k}$ für alle i folgt also, ebenfalls für alle i , $f_i(a'_i) \equiv 0 \pmod{w^k}$. Da aus Symmetriegründen auch das Umgekehrte gelten muß, ist in Anbetracht der Definition der Typenklassen damit die behauptete Unabhängigkeit gezeigt. Da, wie wir im folgenden sehen werden, die Typenklassen mit durch p teilbarem $h < r$ der Untersuchung wesentlich schwerer zugänglich sind als die übrigen, wollen wir sie die *singulären* und die mit $p \nmid h$ oder $h = r$ als die *regulären* Typenklassen bezeichnen. Ehe wir auf die Untersuchungen der letzteren näher eingehen, machen wir noch folgende Festsetzung: Wir betrachten in $K(a)$ die Klasseneinteilung, die entsteht, wenn zwei sich nur um eine nicht verschwindende h -te Potenz als Faktor-unterscheidende Elemente zur selben Klasse gerechnet werden. Wir wählen nun ein Repräsentantensystem für diese Klassen aus, und zwar so, daß die aus den nicht verschwindenden h -ten Potenzen bestehende Hauptklasse durch 1 repräsentiert wird. Jedem Element x von $K(a)$ ist dadurch ein Element dieses im folgenden in der einmal gewählten Form beibehaltenen Systems, nämlich der Repräsentant der Klasse von x , den wir als h -Kern¹⁶⁾ von x bezeichnen, zugeordnet. Wir be-
weisen nun den

Satz 1. Für die regulären Typenklassen mit $h < H$ sind die h -Kerne k_{ih} der f_{ih} Invarianten, und zu jedem j mit nicht verschwindendem k_{jh} gibt es eine Normalform mit $f_j(a_j) = k_{jh}(a)w_h$, in der die f_{ih} ($i \neq j$) Invarianten sind.

Zusatz. Ist die H -te Typenklasse regulär, so enthält sie nur den durch $f_i(a_i) = 0$ ($i = 1, \dots, \lambda$) charakterisierten Nulltypus.

Zum Beweis greifen wir ein $f_j(a_j)$ heraus und lassen der Einfachheit halber im folgenden den Index j fort. Setzen wir in $\bar{f}_i(\bar{a})$ die Ausdrücke aus

¹⁵⁾ Wie in § 4 schreiben wir wieder f als Abkürzung für $f(a)$.

¹⁶⁾ Verallgemeinerung des auf S. 33 eingeführten Begriffes des quadratfreien Kerns

(8.2) für die \bar{a}_i ein, so erhalten wir, wenn wir formal nach Potenzen von w ordnen,

$$(8.3) \quad \bar{f}_i(\bar{a}) = \bar{f}_i(a) + \sum Z_{ik} w^k,$$

wo die Z_{ik} nur von den Y_{ik} , nicht aber von den X_i abhängen. Setzen wir zur Abkürzung

$$(8.4) \quad F_{is} = \sum_{x_{i_0}=i, x_{i_1}=s} \frac{i!}{i_0! \dots i_{r-1}!} X_1(a)^{i_0} \dots X_{r-1}(a)^{i_{r-1}},$$

so folgt nach (8.2):

$$(8.5) \quad \bar{w}^i = w^i \sum_{s=0}^{r-i-1} F_{is} w^s.$$

Da nun

$$(8.6) \quad f(\bar{a}) = f(a) + w^{q_2} \cdot A$$

gilt, erhalten wir wegen (8.1), (8.3) und (8.5)

$$(8.7) \quad f(a) = \sum_{k,s} \bar{f}_k(a) F_{ks} w^{k+s} + \sum_{k,l,s} Z_{kl} F_{ks} w^{k+l+s} - w^{q_2} \cdot A.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ordnen wir formal nach Potenzen von w und schreiben sie in der Form $\sum A_i w^i$, wo also die A_i noch keine Elemente unseres normalen Repräsentantensystems R zu sein brauchen. Da nun aber nach (8.4)

$$(8.8) \quad \begin{cases} F_{i0} = X_1(a)^i, \\ F_{is} = i X_1(a)^{i-1} X_{s+1}(a) + F'_{is}(X_1, \dots, X_s) \text{ für } s \geq 1 \end{cases}$$

gilt, erhalten wir für $h < q_2$ (was für die regulären Typenklassen mit $h < H$ bestimmt der Fall ist) aus (8.7):

$$\begin{aligned} A_h &= \bar{f}_h(a) X_1(a)^h, \\ A_{h+l} &= h \bar{f}_h(a) X_1(a)^{h-1} X_{l+1}(a) + G_l(X_1, \dots, X_l) \text{ für } l \geq 1. \end{aligned}$$

Da wegen $\sum f_i(a) w^i = \sum A_i w^i$ $f_i(a) = R(A_i) + H_i(A_1, \dots, A_{i-1})$ ist, folgt aus diesen Beziehungen, wenn wir gleich zu den Elementen von $K(a)$ übergehen,

$$(8.9) \quad \begin{cases} f_h = \bar{f}_h X_1^h, \\ f_{h+l} = h \bar{f}_h X_1^{h-1} X_{l+1} + F_l(X_1, \dots, X_l) \text{ für } l \geq 1. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich nun erstens, daß der h -Kern k_h von f_h eine Invariante ist, und zweitens, daß für $k_h \neq 0$ $f(a)$ auf die Normalform $k_h(a) w^h$ gebracht werden kann, sobald $h \not\equiv 0 \pmod p$ ist. Wir brauchen zu diesem Zweck nur $Y_{ik} = 0$ zu setzen und die X_i aus dem offenbar auflösbaren Gleichungssystem

$$k_h = \bar{f}_h X_1^h, \quad (h \bar{f}_h X_1^{h-1}) X_{l+1} = -F_l(X_1, \dots, X_l), \quad l \geq 1$$

zu bestimmen.

Da unsere bisherigen Überlegungen für jedes j gelten, haben wir nach (8.9) $f_{i\lambda} = \bar{f}_{i\lambda} \cdot X_1^{\lambda} (i=1, \dots, \lambda)$ und daher, wenn wir auf $\bar{f}_{j\lambda} = f_{j\lambda} = k_{j\lambda} \neq 0$ normiert haben: $f_{i\lambda} = \bar{f}_{i\lambda} (i \neq j)$, w. z. b. w.

Aus dem Beweisgang erkennen wir nebenbei noch, daß man in jeder Algebra den $f_{j\lambda} (k \geq h)$ abgesehen von der Bedingung $f_{j\lambda} = k_{j\lambda} X^{\lambda} (X \neq 0)$ beliebige Werte vorschreiben kann. In der ersten Typenklasse speziell bleibt als einschränkende Bedingung nur $f_{j1} \neq 0$, da aus $k_{j1} \neq 0$ stets $k_{j1} = 1$ folgt.

Da Gleichung (8.9) für alle Typenklassen mit $h < q_1$ gilt, können wir für die singulären Typenklassen die schwächere Aussage machen:

Satz 2. *In den singulären Typenklassen mit $h < H$ sind die h -Kerne der $f_{i\lambda}$ Invarianten.*

Man sieht leicht, daß, wenn die letzte Typenklasse singulär ist, $f_{i\lambda}$ in keinem Falle invariant bleibt. In diesem Falle wird die letzte Typenklasse auch im allgemeinen mehr als einen Typus enthalten. Wir zeichnen den auf die Form $f_i(a_i) = 0 (i=1, \dots, \lambda)$ normierbaren als *Nulltypus* aus. Dann und nur dann, wenn \mathfrak{A} vom Nulltypus ist (einerlei, ob die H -te Typenklasse, der er angehört, regulär oder singulär ist), läßt sich \mathfrak{A}/w relationstreu durch einen Oberkörper \bar{K} von K in \mathfrak{A} repräsentieren: Es gilt $\mathfrak{A} = \bar{K} + \bar{K}w + \dots + \bar{K}w^{r-1}$. In Anbetracht der Bedeutung dieser Bildung für spätere Untersuchungen (§ 11) wollen wir \mathfrak{A} in diesem Falle als die *Grundalgebra* vom Index r über K bezeichnen.

Im Hinblick auf die schon für $r=3$ aufgetretenen formalen Schwierigkeiten (siehe § 6) erscheint eine über das Bisherige hinausgehende Untersuchung für allgemeines λ wenig aussichtsreich. Wir wenden uns daher im folgenden Paragraphen dem Sonderfall $\lambda=1$ zu.

§ 9.

Der Fall $\lambda=1$.

Wir übernehmen die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen, indem wir überall den überflüssig gewordenen Index $i=1, \dots, \lambda$ fortlassen. Setzen wir dann noch im Falle $r \leq q$: $k_r = 0$, so gilt der

Satz 1. *Für die regulären Typenklassen bildet k_λ ein vollständiges Invariantensystem.*

Denn nach § 8, Satz 1 kann die Algebra auf die Normalform $f(a) = k_\lambda(a) w^{\lambda}$ gebracht werden, die also durch die Invariante k_λ eindeutig bestimmt ist. Zwei Algebren mit gleichem k_λ sind also isomorph, w. z. b. w.

Für die erste Typenklasse erhalten wir ein besonderes einfaches Ergebnis:

Satz 2. In der ersten Typenklasse gibt es nur einen Typus.

Denn da, wie schon im vorigen Paragraphen bemerkt, $k_1 = 1$ ist, gibt es nur den in der Normalform durch $f(a) = w$ dargestellten Typus, den wir *Einstypus* nennen wollen. Wegen der zu Anfang des vorigen Paragraphen vermerkten Invarianz der Typenklasseneinteilung ist dieser Typus unabhängig von der Wahl der Darstellung des Radikalrestklassenkörpers definiert.

Bei den singulären Typenklassen genügt selbst bei $h < H$ die Invariante k_h nicht zur vollständigen Beschreibung der Typen. Eine neue Invariante liefert uns der

Satz 3. Ist die h -te Typenklasse singulär, so gibt es ein einziges, nicht durch p teilbares, positives $e \leq r - h$, das den Bedingungen

$$\text{I. } f_i = 0 \text{ für } h < i < h + e, \quad p \nmid i,$$

$$\text{II. } f'_i = 0 \text{ für } h \leq i < h + e - 1, \quad p \mid i,$$

$$\text{III. } f_{h+e} \neq 0, \text{ wenn } h + e < r \text{ und } f'_{h+e-1} \neq 0$$

genügt. Dieses e ist isomorphieinvariant.

Dabei bedeutet f'_i die an der Stelle $x = a$ genommene Ableitung von $f_i(x)$ nach x . Daß es nur ein den aufgezählten Bedingungen genügendes e gibt, erkennt man sofort. Es ist also nur noch die Invarianz von e zu zeigen. Wir benutzen zu diesem Zwecke die Bezeichnungen und Formeln von § 8. Ergänzend bemerken wir noch, daß das A in (8. 7) sich zu

$$A = \sum_{i=1}^{r-1} Y_i(a)^q w^{q(i-1)}$$

berechnet. Da (8. 8) für $p \mid i$ keine wesentliche Aussage macht, ergänzen wir es durch die ebenfalls leicht aus (8. 5) herzuleitenden Beziehungen

$$(9.1) \quad \begin{cases} F_{is} = 0 \text{ für } p^k \mid i, \quad p^k \nmid s, \\ F_{i, p^k, t, p^k} = l X_1(a)^{(i-1)p^k} X_{t+1}(a)^{p^k} + f_{i, p^k, t, p^k}(X_1, \dots, X_t). \end{cases}$$

Zur Auswertung von $Z_{i,k}$ soll uns die aus (8. 3) mit Hilfe von (8. 2) zu berechnende Formel

$$(9.2) \quad \begin{cases} Z_{i1} = \bar{f}'_i(a) Y_1(a), \\ Z_{i, k+1} = \bar{f}'_i(a) Y_{k+1}(a) + W_k(Y_1, \dots, Y_k) \text{ für } k \geq 1 \end{cases}$$

dienen. Es seien nun die Bedingungen I, II, III für die \bar{f}_i und ein durch p nicht teilbares positives $e \leq r - h$ erfüllt. Dann sind I und III auch für die A_i erfüllt; denn auf den Wert von A_i mit $h < i \leq h + e$, $p \nmid i$ haben erster und letzter Term in (8. 7) wegen (9. 1) und der für die \bar{f}_i erfüllten Be-

dingung I keinen Einfluß, der zweite Term wegen der Bedingung II nur für $i = h + e$, und zwar wegen (9. 2) nur mit einem zu \bar{f}_{h+e-1} proportionalen Gliede. Unter Beachtung der nun für die A_i erfüllten Bedingung I zeigen wir leicht, daß $f_i(a) = R(A_i)$ für $h \leq i \leq h + e$ gilt, womit die Gültigkeit der Bedingungen I und III auch für die f_i nachgewiesen ist. Wäre nun Bedingung II für die f_i nicht erfüllt, so folgt aus (8. 7), daß man das $f(a)$ -System in ein $f(\bar{a})$ -System transformieren kann, für dessen \bar{f}_i die Bedingung I nicht erfüllt ist. Das ist aber unmöglich, denn das $f(\bar{a})$ -System entsteht aus dem $f(a)$ -System durch Transformation, und für diese Systeme haben wir ja eben die Gültigkeit von Bedingung I nachgewiesen. Damit ist nun aber die Invarianz von e gezeigt.

Alle Typen mit gleichem e bezeichnen wir als *Typen e -ter Gattung*. Da in den nach (8. 7) zu berechnenden Ausdruck für $f_{h+e-1}(a)$ im Falle $p|e-1$ (sonst gilt ja invariant $f_{h+e-1} = 0$ wegen Bedingung I), abgesehen von dem $\bar{f}_{h+e-1}(a)$ und den wegen Bedingung II von a^p allein abhängenden $f_i(a)$ nur p -te Potenzen eingehen, ist auch die Frage, ob $f_{h+e-1} = 0$ oder $\neq 0$ ist, invariant zu beantworten. Je nachdem der erste oder zweite Fall eintritt, sprechen wir von *Typen erster oder zweiter Art*. Typen zweiter Art können offenbar nur im Falle $p|e-1$ auftreten. Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall $h < H$, $h + e < r$, und normieren $f_h = \bar{f}_h = k_h$, was ja nach (8. 9) möglich ist. Es ist also X_1 eine h -te Einheitswurzel, und da bei $f_{h+e-1} = 0$ die Gleichung für f_{h+e} sich zu $f_{h+e} = X_1^{h+e} \bar{f}_{h+e}$ berechnet, ist f_{h+e} für die Typen erster Art bis auf eine als Faktor hinzutretende e -te Potenz einer h -ten Einheitswurzel invariant. In diesem Sinne betrachten wir f_{h+e} als neue Invariante. Zum Unterschied von k_h , das wir als *Hauptinvariante* bezeichnen, nennen wir sie *Nebeninvariante*. Bei den Typen zweiter Art lautet die in Frage stehende Bedingung: $f_{h+e} = X_1^{h+e} \bar{f}_{h+e} + X_1^{h+e-1} \bar{f}_{h+e-1} Y_1$, die wegen $\bar{f}_{h+e-1} \neq 0$ immer durch ein passendes Y_1 befriedigt werden kann und daher zu keiner Invarianten Anlaß gibt. Speziell erkennen wir daraus, daß wir immer $f_{h+e} \neq 0$ erreichen können, was ja bei den Typen erster Art nach Bedingung III schon von vornherein der Fall ist. In dieser Tatsache nun liegt die Bedeutung der Invariante e : Vernachlässigen wir nämlich einmal in (8. 7) den Einfluß der \bar{f}_i mit $h \leq i < h + e$, $p \nmid i$, so erhalten wir die Gleichungen für f_{h+e+l} ($l \geq 1$) in der Form

$$f_{h+e+l} = e \bar{f}_{h+e} X_1^{h+e-1} X_{l+1} + G_l(X_1, \dots, X_l),$$

die wegen $e \neq 0 \pmod p$ und $\bar{f}_{h+e} \neq 0$ immer rekursiv nach den X_2, X_3, \dots auflösbar sind. Die Schwierigkeiten kommen nun dadurch hinein, daß erstens in den Gleichungen für die f_i mit $h < i < h + e$, $p \nmid i$ etwa die Größen X_1, \dots, X_e

schon auftreten, und zweitens erst für $l > \bar{l}$ in den Gleichungen $f_{h+e+i} = \dots$, die durch die \bar{f}_i mit $h \leq i < h+e$, $p|i$ veranlaßten Terme keine der Größen X_{i+1}, \dots mehr enthalten. Wir müssen also sämtliche Gleichungen $f_i = \dots$ für $h < i < h+e$, $p|i$ und für $h+e \leq i \leq h+e + \text{Max}(\bar{l}, g-1)$ aufstellen und haben erst für $l > \text{Max}(\bar{l}, g-1)$ die zu keinen Invarianten mehr Veranlassung gebende Rekursionsformel

$$f_{h+e+i} = e \bar{f}_{h+e} X_1^{h+e-1} X_{i+1} + H_i(H_1, \dots, X_i).$$

Nun sind im allgemeinen die noch aufzustellenden Gleichungen so kompliziert, daß eine allgemeine Diskussion unübersichtlich würde. Wir beschränken uns daher auf einige leicht zu übersehende Spezialfälle.

Satz 4. *In einer singulären Typenklasse mit $h < H$ bilden Haupt- und Nebeninvariante für die Typen e -ter Gattung erster Art ein vollständiges Invariantensystem, sobald $e < p$ und im Falle $e = p-1$ $p^2 | h$ gilt.*

Um diesen Satz zu beweisen, beachten wir, daß Gleichungen $f_i = \dots$ mit $h < i < h+e$, $p|i$ wegen $e < p$ überhaupt nicht vorhanden sind: Unser oben eingeführtes g ist also $= 0$ zu setzen. Wie steht es nun mit dem \bar{l} ? Unter Benutzung von (9.1) finden wir, daß nur für $e+l = k\bar{q}$, wo \bar{q} die höchste in h aufgehende Potenz von p ist, der Term mit \bar{f}_h nach (8.7) einen Beitrag zu f_{h+e+i} liefert, in dem X_{k+1} bestimmt, sonst aber nur die X_k, \dots, X_1 vorkommen. l ist nun so definiert, daß aus $l > \bar{l}$ folgt: $k < l$. Da nun hier $k = \frac{e+l}{\bar{q}} = l - \frac{l(\bar{q}-1)-e}{\bar{q}}$ wegen $\bar{q}-1 > e$ (es gilt für $e < p-1$ auch $e < \bar{q}-1$), und für $e = p-1$ ist $p < p^2 \leq \bar{q}$) schon für $l \geq 1$ kleiner als l ist, haben wir $\bar{l} = 0$. Aus $\text{Max}(\bar{l}, g-1) = 0$ folgt dann die Behauptung unseres Satzes.

Satz 5. *In einer singulären Typenklasse mit $h < H$ sind die Typen erster Gattung zweiter Art bereits durch die Hauptinvariante vollkommen charakterisiert.*

Offenbar ist eine Algebra der h -ten Typenklasse dann und nur dann von erster Gattung und zweiter Art, wenn $k'_h \neq 0$ ist. Wir benutzen in unserem Spezialfall statt der oben skizzierten und beim Beweis von Satz 4 angewandten Methode eine Rekursion nach Y_i : Nach (9.2) folgt auf die bekannte Art aus (8.7) die Beziehung $f_{h+i} = X_1^h \bar{f}'_h Y_i + E_i(Y_1, \dots, Y_{i-1})$ für $l \geq 1$, die wir für $\bar{f}'_h \neq 0$ stets rekursiv nach den Y_i auflösen können. Für Isomorphie genügt also das Übereinstimmen in der Hauptinvarianten, w. z. b. w.

Zum Schluß betrachten wir noch ein einfaches Beispiel für eine singuläre Typenklasse mit $h = H$: Wir setzen $h = q = r-1$ und haben, wie man sofort sieht, als einzige Isomorphiebedingung die Gleichung $f_q = X^q \bar{f}_q - Y^q$ mit $X \neq 0$.

§ 10.

Restklassenringe von Funktionenkörpern.

Wir beschränken uns auf Körper algebraischer Funktionen einer Veränderlichen: „Funktionenkörper über K “ soll im folgenden eine endliche algebraische Erweiterung einer einfachen transzendenten Erweiterung von K bedeuten. Für den Funktionenkörper L gibt es also eine Darstellung

$$(10.1) \quad L = K(x; y_1, \dots, y_m),$$

worin x transzendent über K als unabhängige Veränderliche fungiert und die y_i algebraisch über $K(x)$ sind. Umgekehrt ist jeder auf diese Art erzeugte Körper in dem oben erklärten Sinne Funktionenkörper über K . Das Minimum der bei allen Darstellungen (10.1) eines Funktionenkörpers L auftretenden m nennen wir die *Vielfachheit* von L . Der Begriff „Funktionenkörper der Vielfachheit Null“ fällt offenbar mit dem Begriff „Körper der rationalen Funktionen einer Veränderlichen“ zusammen. Unter dem Restklassenring von L nach einem ganzen Divisor¹⁷⁾ $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1^{r_1} \dots \mathfrak{p}_n^{r_n}$ wollen wir den Restklassenring des Integritätsbereiches der \mathfrak{d} -ganzen Elemente von L (in deren Divisordarstellung die \mathfrak{p}_i ($i = 1, \dots, n$) also nicht mit negativem Exponenten vorkommen) nach dem Ideal der durch \mathfrak{d} teilbaren Elemente verstehen. Es gilt dann bekanntlich der

Satz 1. *Der Restklassenring eines Funktionenkörpers L/K nach dem Divisor $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1^{r_1} \dots \mathfrak{p}_n^{r_n}$ ist eine in n Primärkomponenten zerfallende Algebra über K ; die i -te Primärkomponente ist isomorph zum Restklassenring von L nach $\mathfrak{p}_i^{r_i}$ und hat den Index r_i .*

Es taucht nun die Frage auf, wann eine Algebra Restklassenring eines Funktionenkörpers ist. Nach Satz 1 braucht diese Frage nur für die primären Algebren beantwortet zu werden, die, wenn sie Restklassenring eines Funktionenkörpers sind, nur als Restklassenring nach einer Primdivisorpotenz dargestellt werden können. Eine Antwort gibt der

Satz 2. *Eine primäre Algebra vom Defekt δ und Inseparabilitätsrang λ ist dann und nur dann Restklassenring eines Funktionenkörpers von der Vielfachheit m , wenn $\delta \leq 1$, $\lambda \leq m + 1$ und im Falle $\delta = 1$, $\lambda = m + 1$ die Algebra von der ersten Typenklasse ist.*

Wir betrachten den Restklassenring des Funktionenkörpers $L/K \bmod \mathfrak{p}'$, der nach Satz 1 eine primäre Algebra \mathfrak{A}/K darstellt. Hat L eine Vielfachheit m , so gibt es eine Darstellung (10.1), in der wir noch x und y_i so wählen können, daß sie \mathfrak{p} -ganz sind. Identifizieren wir nun die zu den Elementen von K ge-

¹⁷⁾ Zum Divisorbegriff siehe F. K. Schmidt (a. a. O., § 4) und van der Waerden [3].

hörigen Restklassen mod p mit eben diesen Elementen, so ist der Restklassenkörper von L mod p eine endliche algebraische Erweiterung \bar{K} von K . Es seien \bar{x}, \bar{y}_i die Restklassen von x, y_i . Dann gilt $\bar{K} = K(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$, also hat \bar{K} einen Inseparabilitätsrang $\lambda \leq m + 1$. Mit π als Primelement von p ist nun offenbar (π) mod π^r das Radikal von \mathfrak{A} , also \bar{K} Radikalrestklassenkörper von \mathfrak{A} . Wir erweitern nach § 1, Satz 2 den Grundkörper K zu K' und identifizieren noch K' mit seinem in \bar{K} gelegenen isomorphen Bild. Dann gibt es gemäß Satz 4 von § 1 eine ausgezeichnete Darstellung $\bar{K} = K'(a_1, \dots, a_\lambda)$, und wir bestimmen nun noch ein normales Repräsentantensystem R mit a_i als Repräsentant von a_i . Man sieht nun sofort, daß jedes p -ganze Element von L sich mod π durch ein Element aus R darstellen läßt. Daraus ergibt sich für jedes Element die Darstellung $f_0 + \pi f_1 + \dots + \pi^{r-1} f_{r-1}$ mod π^r mit f_i aus R , womit gezeigt ist, daß \mathfrak{A} einen Defekt ≤ 1 hat. Soll nun aber $\lambda = m + 1$ gelten, so müssen die irreduziblen Polynome $F(z), F_i(z)$ aus $K[z]$ mit $F(\bar{x}) = 0, F_i(\bar{y}_i) = 0$ sämtlich inseparabel sein. Ist nun $\delta = 1$ (also $r \geq 2$) und sei \mathfrak{A} nicht von der ersten Typenklasse, so gilt $f_i(a_i) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$ ($i = 1, \dots, \lambda$) und daraus folgt, da die $F(z), F_i(z)$ ja nur Potenzen von z mit durch p (≥ 2) teilbarem Exponenten enthalten, $F(x) \equiv F_i(y_i) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$. Daraus würde aber folgen, daß jedes in (π) enthaltene Element von L durch π^2 teilbar ist. Da dies einen Widerspruch darstellt, muß \mathfrak{A} im Falle $\lambda = m + 1, \delta = 1$ von der ersten Typenklasse sein, w. z. b. w. Sei nun umgekehrt eine Algebra \mathfrak{A}/K vom Defekt $\delta \leq 1$ und dem Inseparabilitätsrang λ vorgegeben. Es sei wieder K' der erweiterte Grundkörper, und zwar wollen wir $K' = K(a)$ mit $f(a) = 0, f(x)$ irreduzibel aus $K[x]$, schreiben, während

$$K'(a_1, \dots, a_\lambda) \text{ mit } a_i^{q_i} - \alpha_i(a; a_1^{q_1}, \dots, a_{i-1}^{q_{i-1}}) = 0 \quad (i = 1, \dots, \lambda)$$

eine ausgezeichnete Darstellung des Radikalrestklassenkörpers sein soll. Die Algebra möge nun durch das $f(a)$ -System

$$f_i(a_i) = \sum_{k=1}^{r-1} f_{ik}(a; a_1, \dots, a_\lambda) w^k \quad (i = 1, \dots, \lambda)$$

bestimmt sein. Dann bilden wir den Körper $L = K(x; y, y_1, \dots, y_\lambda)$ mit

$$(10.2) \quad f(y-x) = 0 \\ y_i^{q_i} - \alpha_i(y-x; y_1^{q_1}, \dots, y_{i-1}^{q_{i-1}}) - \sum_{k=1}^{r-1} f_{ik}(y-x; y_1, \dots, y_\lambda) x^k + G_i x^r = 0,$$

wo G_i irgendeine ganze rationale Funktion der x, y, y_i sei. Wir betrachten in der algebraischen Hülle von K die Nullstellenmannigfaltigkeit des durch die linken Seiten der Gleichungen (10.2) erzeugten Polynomideals in den

Veränderlichen y, y_1, \dots, y_i für allgemeines x . Da diese Mannigfaltigkeit für den speziellen Wert $x = 0$ offenbar den Transzendenzgrad Null besitzt, muß ihr Transzendenzgrad auch für allgemeines x Null sein, woraus sich aber ergibt, daß die y, y_1, \dots, y_i sämtlich algebraisch über $K(x)$ sind. Da die Anzahl der Gleichungen (10. 2) gerade gleich der Anzahl dieser algebraischen Elemente ist, erkennen wir, daß x transzendent über K ist: L stellt einen Funktionenkörper dar, der, da y separabel über $K(x)$ ist, eine Vielfachheit $\leq \lambda$ besitzt. Sei nun p irgendein die Funktion x teilender Primdivisor von L , so wird offenbar durch $a \longleftrightarrow y - x, a_i \longleftrightarrow y_i, w \longleftrightarrow x$ ein Isomorphismus zwischen der Algebra \mathfrak{A} und dem Restklassenring von $L \bmod p^r$ hergestellt. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß L im Falle $\delta = 1, \lambda \geq 1$ eine Vielfachheit $\leq \lambda - 1$ besitzt, sobald \mathfrak{A} von der ersten Typenklasse ist. Es sei in diesem Falle j so gewählt, daß $f_j(a_i) \not\equiv 0 \bmod w^2$ gilt, und nach einer Bemerkung von § 8 können wir dann den $f_{j,k}$ bis auf $f_{j,1} \not\equiv 0$ beliebige Werte erteilen. Wir können also die $f_{j,k}$ speziell so wählen, daß bei passender Wahl von G_j die Gleichung (10. 2) für $i = j$ die Form $y_j^{q_j} - \alpha_j(y; y_1^{q_1}, \dots, y_{j-1}^{q_{j-1}}) = x$ annimmt. Es ist also $L = K(y, y_1, \dots, y_i)$. Weil y separabel über $K(y_1, \dots, y_i)$ ist, gibt es λ Elemente z_1, \dots, z_λ mit $L = K(z_1, \dots, z_i)$. Da aber L über K den Transzendenzgrad 1 hat, erkennt man daraus, daß die Vielfachheit unseres Funktionenkörpers $\leq \lambda - 1$ ist, w. z. b. w.

Da sich jedes in bezug auf den Primdivisor p ganze Element des rationalen Funktionenkörpers $K(x) \bmod p$ durch ein Element von $K[x]$ darstellen läßt, ist der Restklassenring von $K(x) \bmod p^r$ isomorph zum Polynomrestklassenring $K[x]/f(x)^r$, wo $f(x)$ das bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte durch p teilbare irreduzible Polynom bedeutet. Setzen wir in Satz 2 daher $m = 0$, so erhalten wir unter Beachtung von § 9, Satz 2 den

Satz 3. Eine primäre Algebra vom Defekt δ und Inseparabilitätsrang λ ist dann und nur dann Polynomrestklassenring, wenn $\delta \leq 1, \lambda \leq 1$ und im Falle $\delta = 1, \lambda = 1$ die Algebra vom Einstypus ist.

Die in unseren Sätzen auftretende Forderung $\delta \leq 1$ läßt übrigens noch folgende leicht zu verifizierende Umformung zu:

Jedes von Null verschiedene Element der Algebra läßt sich eineindeutig in der Form ew^k ($0 \leq k < r, w^0 = 1$) darstellen, wo e eine Einheit und w ein multiplikativ unzerlegbares Element des Radikals oder im Falle $r = 1$ das Einselement ist.

Nach bekanntem Schlußverfahren leiten wir hieraus den Satz her:

Die primären Algebren vom Defekt $\delta \leq 1$ sind genau die primären hyperkomplexen Hauptidealringe;

oder, indem wir die idealtheoretische Terminologie (Krull, a. a. O., Nr. 30) benutzen:

Satz 4. *Die primären Algebren vom Defekt $\delta \leq 1$ sind genau die zerlegbaren primären hyperkomplexen Ringe.*

Im nächsten Paragraphen werden wir uns von anderen Gesichtspunkten aus noch genauer mit der Charakterisierung der Algebren im Bereich der zerlegbaren primären Ringe beschäftigen.

§ 11.

Zusammenhang mit der Theorie der diskret bewerteten perfekten Körper.

Aus Satz 2 des vorigen Paragraphen ergibt sich, daß jede Algebra vom Defekt $\delta \leq 1$ mit dem Index r als Restklassenring eines diskret bewerteten Körpers nach der r -ten Potenz des die Bewertung erzeugenden Divisors (d. i. genauer gesagt: Restklassenring des Bewertungsringes nach der r -ten Potenz des Bewertungsideals) dargestellt werden kann. Unter den diskret bewerteten Körpern nehmen nun die perfekten insofern eine Sonderstellung ein, als sich jeder diskret bewertete Körper in einen perfekten einbetten läßt. Es drängt sich daher die Frage nach der Charakterisierung der Restklassenringe der diskret bewerteten perfekten Körper auf. Zur Untersuchung dieser Frage benötigen wir zwei der von H. Hasse und F. K. Schmidt bewiesenen Struktursätze:

Satz 1. *Jeder charakteristikgleich diskret bewertete perfekte Körper ist analytisch isomorph zu einem Potenzreihenkörper.*

Satz 2. *Jeder verzweigte charakteristikgleich diskret bewertete perfekte Körper ist Eisensteinscher Oberkörper eines gewissen unverzweigten Unterkörpers.*

Wir wollen, wie üblich, einen unverzweigten Körper als Körper vom Verzweigungsexponenten $e = 1$ auffassen. Dann gilt der

Satz 3. *Der Restklassenring eines diskret bewerteten perfekten Körpers K nach der r -ten Potenz des die Bewertung erzeugenden Primdivisors ist, wenn im charakteristikungleichen Falle r nicht größer als der Verzweigungsexponent ist, die Grundalgebra vom Index r über den Restklassenkörper von K .*

Im charakteristikgleichen Falle ist K nach Satz 1 isomorph zu dem Körper der formalen Potenzreihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ($a_i \in K_0$); K_0 ist dabei isomorph zum Restklassenkörper von K , und x entspricht einem Primelement der Bewertung von K . Der Restklassenring nach der r -ten Potenz des Primdivisors ist also isomorph zu $K_0 + K_0 w + \dots + K_0 w^{r-1}$ ($w^r = 0$), und das ist isomorph zur Grundalgebra vom Index r über den Restklassenkörper

von K , w. z. b. w. Im charakteristikutgleichen Falle sei e der Verzweigungsexponent. Es sei K_0 der nach Satz 2 existierende unverzweigte Unterkörper (Primelement p), über dem K Eisensteinsch ist. Für das Primelement π

von K gilt also eine Gleichung: $\pi^e = \sum_{i=0}^{e-1} p a_i \pi^i$ ($a_i \in K_0$) mit $p \nmid a_0$. Wegen $r \leq e$ folgt aus dieser Gleichung $p \equiv 0 \pmod{\pi^r}$. K_0 ist also $\pmod{\pi^r}$ isomorph zu seinem Restklassenkörper, der nun wiederum isomorph zum Restklassenkörper \mathfrak{K} von K ist. Der Restklassenring von K nach der r -ten Potenz des Primdivisors ist also isomorph zu $\mathfrak{K} + \mathfrak{K}w + \dots + \mathfrak{K}w^{r-1}$ ($w^r = 0$), womit die Behauptung auch im charakteristikutgleichen Falle bewiesen ist.

Erweitern wir nun den durch p bewerteten Funktionenkörper L , der gemäß § 10, Satz 2 $\pmod{p'}$ zur primären Algebra \mathfrak{A} vom Defekt $\delta \leq 1$ und Index r isomorph ist, zu seiner perfekten Hülle L' , so kann man offenbar \pmod{p} und damit auch $\pmod{p'}$ jedes Element von L' durch ein Element von L ersetzen. Es ist also $L' \pmod{p'}$ ebenfalls isomorph zu \mathfrak{A} und der Restklassenkörper von L' isomorph zum Radikalrestklassenkörper von \mathfrak{A} . Nach Satz 3 ist aber andererseits, da L' durch p charakteristikutgleich bewertet ist, der Restklassenring von $L' \pmod{p'}$ isomorph zur Grundalgebra vom Index r über dem Restklassenkörper von L' . Verstehen wir nun einmal einen Isomorphismus zwischen Algebren nicht in dem sonst üblichen engeren Sinne eines Isomorphismus bez. des Grundkörpers, so gilt also der

Satz 4. *Jede Algebra \mathfrak{A} vom Defekt $\delta \leq 1$ und Index r ist isomorph zur Grundalgebra vom Index r über dem Radikalrestklassenkörper von \mathfrak{A} .*

Für diesen Satz gibt es auch einen direkten, den Umweg über die diskret bewerteten perfekten Körper vermeidenden Beweis. Krull hat nämlich (a. a. O., Nr. 30) für die zerlegbaren primären Ringe, zu denen nach § 10, Satz 4 ja auch die Algebren vom Defekt $\delta \leq 1$ gehören, zu den aus der Theorie der diskret bewerteten perfekten Körper bekannten die analogen Begriffe eingeführt und in seinen beiden Hauptsätzen die den Hasse-Schmidtschen Struktursätzen entsprechenden Sätze aufgestellt. Die für uns wesentliche, unserem Satz 1 entsprechende Folgerung aus dem zweiten Krullschen Hauptsatz ist

Satz 5. *Jeder charakteristikutgleiche zerlegbare primäre Ring Z enthält einen zum Restklassenkörper von Z isomorphen Unterkörper.*

Aus diesem Satz erhalten wir ohne Mühe sofort die Behauptung von Satz 4, wenn wir noch beachten, daß eine Algebra trivialerweise niemals von Primzahlpotenzcharakteristik sein kann, was ja für einen charakteristikutgleichen Ring nötig wäre.

Krull hat nun seine beiden Hauptsätze nur für vollkommene Ringe, d. h. Ringe mit vollkommenem Restklassenkörper bewiesen. Er bemerkt aber (a. a. O., Nr. 31), daß das Hasse-Schmidtsche Beweisverfahren wohl die

Möglichkeit biete, die Beweise auch für unvollkommene Ringe durchzuführen. Nun haben inzwischen Teichmüller ([2], [3]) und Witt (a. a. O., § 4) einfachere Beweismethoden für die Hasse-Schmidtschen Struktursätze gefunden, und diese Methoden lassen sich in der Tat sehr einfach auf die zerlegbaren primären Ringe übertragen. Wir zeigen dies an Satz 5. Ein charakteristikkgleicher Ring Z hat entweder die Charakteristik 0 oder p . Ist die Charakteristik $= 0$, so wenden wir nach Teichmüller [2] die Hasse-Schmidtsche Methode der Transzendenzbasen an: Offenbar können wir den Primkörper von Z mit dem Primkörper P des Restklassenkörpers K identifizieren. X sei eine Transzendenzbasis von K über P . Zu jeder Restklasse $x \in X$ wählen wir einen beliebigen Repräsentanten $\bar{x} \in Z$. Diese \bar{x} sind dann über P gleichfalls algebraisch unabhängig. Da der Polynomring $P[\bar{X}]$ (wo \bar{X} die Menge der \bar{x} bedeutet) vom Nullelement abgesehen, nur Einheiten von Z enthält¹⁶⁾, liegt auch der Körper $P(\bar{X})$ in Z . $P(\bar{X})$ ist Repräsentantensystem für $P(X)$. Nun sei \bar{K} der Körper der über $P(\bar{X})$ algebraischen Elemente von Z , d. h. der Elemente von Z , die Nullstelle eines irreduziblen Polynoms mit Koeffizienten aus $P(\bar{X})$ sind. Irgendeine Restklasse a aus K genüge nun der irreduziblen Gleichung $f(a) = 0$ mit Koeffizienten aus $P(X)$. Da $z = a$ einfache Wurzel von $f(z) = 0$ ist, gibt es nach dem Wurzelexistenzsatz (Krull, a. a. O., Nr. 29) ein Element $\bar{a} \in a$ mit $\bar{f}(\bar{a}) = 0$, wo $\bar{f}(z)$ das dem $f(z)$ vermöge des Isomorphismus $P(X) \cong P(\bar{X})$ zugeordnete Polynom mit Koeffizienten aus $P(\bar{X})$ sei. Es gibt also in \bar{K} zu jedem a aus K einen Repräsentanten. Umgekehrt können zwei Elemente von \bar{K} nicht in derselben Restklasse liegen (siehe den Beweis bei Teichmüller [2]). \bar{K} ist also isomorph zu K , womit die Behauptung von Satz 5 bewiesen ist. Hat Z die Charakteristik p , so gehen wir so vor: Es sei a_1, a_2, \dots eine p -Basis von K , \bar{a}_i ein beliebiges Element der Restklasse a_i . Da eine einfache reguläre algebraische Erweiterung eines zerlegbaren primären Ringes (Krull, a. a. O., S. 84 unten) einen über diesem unverzweigten zerlegbaren primären Ring ergibt, ist auch die unendliche algebraische Erweiterung $Z_n = Z(\bar{a}_1^{p^{-n}}, \bar{a}_2^{p^{-n}}, \dots)$ ein über Z unverzweigter zerlegbarer primärer Ring, und ebenso die Vereinigungsmenge Z' der ineinandergeschachtelten Ringe $Z_1 < Z_2 < \dots$. Offenbar hat Z' den kleinsten vollkommenen Oberkörper K' von K als Restklassenkörper, denn dieser ist die Vereinigungsmenge der $K_1 < K_2 < \dots$, wo $K_n = K(a_1^{p^{-n}}, a_2^{p^{-n}}, \dots)$ der Restklassenkörper von Z_n ist. Es sei nun r der Index¹⁷⁾ von Z und k die durch

$$p^{k-1} < r \leq p^k$$

¹⁶⁾ In einem primären Ring ist jedes nicht im Radikal liegende Element Einheit.

¹⁷⁾ So wollen wir in Übertragung der entsprechenden Definition bei den Algebren die von Krull (a. a. O., S. 84 oben) „Exponent“ genannte Größe bezeichnen.

bestimmte Zahl. Ist dann a ein Element von K' und \bar{a} ein Element der Restklasse $a^{p^{-k}}$, so ist \bar{a}^{p^k} ein nicht mehr von der besonderen Auswahl des \bar{a} abhängendes Element von a . Dieses wählen wir als Repräsentanten und zeigen leicht die Relationstreue dieses Repräsentantensystems, daß also einen zu K' isomorphen Körper \bar{K}' bildet. Die Repräsentanten der in K liegenden Restklassen bilden nun einen Unterkörper \bar{K} von \bar{K}' . Ist nun a eine Restklasse aus K , so liegt $a^{p^{-k}}$ in K_k , ein Element \bar{a} dieser Restklasse also in Z_k . Das Element \bar{a}^{p^k} , das nach Definition der Repräsentant von a ist, liegt also in Z : \bar{K} ist Unterkörper von Z , womit auch in diesem Falle die Behauptung bewiesen ist.

Man macht sich auf ähnliche Weise leicht klar, daß auch der erste Krullsche Hauptsatz und der unserem Satz 2 entsprechende Rest des zweiten durch Übertragung des von Teichmüller und Witt angewandten Verfahrens gewonnen werden können. Für die Durchführung dieser Übertragung ist wesentlich, daß, wenn wir den zerlegbaren primären Ring als durch sein Primideal „bewertet“ auffassen, jede konvergente Folge fast-konstant ist und daher einen Grenzwert besitzt: In diesem Sinne ist also jeder zerlegbare primäre Ring „perfekt“.

Aus Satz 5 gewinnen wir noch eine interessante Charakterisierung unserer Algebren vom Defekt $\delta \leq 1$:

Satz 6. *Die primären Algebren vom Defekt $\delta \leq 1$ sind genau die charakteristikkgleichen zerlegbaren primären Ringe.*

Daß so eine Algebra stets ein charakteristikkgleicher zerlegbarer primärer Ring ist, haben wir schon oben bemerkt. Das Umgekehrte ergibt sich daraus, daß nach Satz 5 jeder charakteristikkgleiche zerlegbare primäre Ring Grundalgebra über einem zu seinem Restklassenkörper isomorphen Körper ist.

Durch Satz 4 ist offenbar das Strukturproblem der primären Algebren über K vom Defekt 1, dem Index r und dem Radikalrestklassenkörper L/K auf die folgende Aufgabe zurückgeführt:

Es sind alle Isomorphismen σ_i aufzusuchen, die den in der Grundalgebra \mathfrak{A} über L vom Index r enthaltenen Körper K in einen Körper $K_i < \mathfrak{A}$ so überführen, daß isomorphe Elemente bez. des Radikals von \mathfrak{A} kongruent sind. Die so entstandenen K_i sollen derart in Klassen eingeteilt werden, daß K_i und K_k dann und nur dann zur selben Klasse gehören, wenn sich $\sigma_i \sigma_k^{-1}$ zu einem Automorphismus von \mathfrak{A} erweitern läßt.

Nachdem jeweils die Elemente von K_i nach Maßgabe des Isomorphismus σ_i mit den Elementen von K identifiziert worden sind, kommt nämlich jeder Algebrentypus der oben beschriebenen Art unter den \mathfrak{A}/K_i vor, und zwei

dieser Algebren gehören offenbar dann und nur dann zum selben Typus, wenn die zugehörigen K_i in der gleichen Klasse liegen.

Da dies neue Problem nun keineswegs einfacher, ja infolge begrifflicher Komplikationen eher noch schwieriger erscheint als das ursprüngliche, ist durch diese Zurückführung für die Lösung des Strukturproblems nichts gewonnen. Unser Satz 4 ist also nur als theoretische Einsicht zu werten und vermag keine bessere Methode als die von uns zur Untersuchung der Algebren vom Defekt 1 eingeschlagene aufzuzeigen.

Literaturverzeichnis.

M. Deuring.

Algebren, Ergebnisse d. Math. IV, (1935).

L. E. Dickson.

[1] Algebras and their Arithmetics. Chicago 1923.

[2] Algebren und ihre Zahlentheorie. Zürich 1927.

[3] Höhere Algebra. Leipzig 1926.

G. Frobenius.

Theorie der hyperkomplexen Größen. Sitzungsberichte der preuß. Akad. d. Wiss. 1903.

W. Gröbner.

Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen. Math. Annalen 110 (1935).

H. Hasse.

[1] Symmetrische Matrizen im Körper der rationalen Zahlen. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 153 (1924).

[2] Äquivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 153 (1924).

H. Hasse und F. K. Schmidt.

Die Struktur diskret bewerteter perfekter Körper. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 170 (1934).

O. Hazlett.

On the classification and invarientive characterization of nilpotent algebras. Amer. Journ. of Math. 38 (1916).

W. Krull.

Idealtheorie. Ergebn. d. Math. IV, (1935).

C. C. Mac Duffee.

The Theory of Matrices. Ergebn. d. Math. II, (1933).

F. K. Schmidt.

Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p . Math. Zeitschr. 33 (1931).

G. Scorza.

[1] Corpi numerici ed algebre. Messina 1921.

[2] Sulla struttura delle algebre pseudonulle. Atti Accad. naz. Lincei VI₂₀ (1934).

[3] Sulle algebre pseudonulle di ordine massimo. Ann. Math. pura appl. IV₁₄ (1936).

[4] Sopra una classe di algebre pseudonulle. Atti Accad. Sci. Torino 70 (1935).

O. Teichmüller.

- [1] p -Algebren. Deutsche Mathematik 1 (1936).
- [2] Über die Struktur diskret bewerteter perfekter Körper. Göttinger Nachrichten, N. F. 1 (1936).
- [3] Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 176.

B. L. van der Waerden.

- [1] Moderne Algebra, Band 1. Berlin 1930.
- [2] Moderne Algebra, Band 2. Berlin 1931.
- [3] Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz-abgeschlossenen Ringen. Math. Annalen 101 (1929).

J. H. Mcl. Wedderburn.

On hypercomplex numbers. Proc. London Math. Soc. II₂ (1908).

E. Witt.

Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^n . Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p . Journ. f. d. reine u. angew. Math. 176 (1937).

(Eingegangen am 30. 2. 1938.)

Beiträge zur Theorie der Zöpfe. II.

Die Lösung des Transformationsproblems für eine besondere Klasse von Viererzöpfen.

Von

W. Fröhlich in Prag.

§ 1.

Einleitung.

Um rasch einen Überblick über die folgenden Untersuchungen zu geben, beginnen wir mit einem Beispiel: Wir betrachten in der Ebene drei Punkte a, b, c , welche in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ (Fig. 1) angebracht sind, und eine orientierte, geschlossene Kurve K , welche die drei Punkte umschlingt (Fig. 2). Unter S_i^{+1} bzw. S_i^{-1} ($i = 1, 2, 3$) verstehen wir



Fig. 1.



Fig. 2.

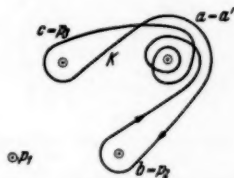


Fig. 3.

einen vollen Umlauf der Kurve K um den Punkt p_i in mathematisch positivem bzw. negativem Sinne. Dann kann die Fig. 2 durch das Potenzprodukt

$$(1) \quad S_1^2 S_3 S_2^{-1}$$

oder durch eine seiner zyklischen Permutationen beschrieben werden. Nun lassen wir den Punkt a auf der Symmetrale von bc eine kontinuierliche Bewegung ausführen, bis er nach a' gelangt. Das ist in der Fig. 1 durch die gestrichelte Linie mit dem Pfeil angedeutet. Die Kurve K wird kontinuierlich so mitdeformiert, daß sie keinen der drei Punkte a, b, c überschreitet. So entsteht die Fig. 3. Wird jetzt das Dreieck abc mit der Kurve K als starres,

ebenes System angesehen und so bewegt, daß a auf p_1 , b auf p_3 und c auf p_2 zu liegen kommt, so entsteht die Fig. 4, die durch

$$S_1^3 S_2 S_1^{-1} S_3^{-1}$$

oder durch eine der zugehörigen zyklischen Permutationen beschrieben werden kann.

Wenn statt der Bewegung des Punktes a nach a' die Bewegung des Punktes b nach b' (auf der punktierten Linie in Fig. 1) ausgeführt wird, so entsteht aus der Fig. 2 die Fig. 5 und daraus durch eine der vorigen analoge Bewegung des starr gedachten Systems die Fig. 6, die durch

$$S_3^2 S_2^{-1} S_1$$

oder durch eine der zugehörigen zyklischen Permutationen beschrieben werden kann.

Allgemeiner als bisher werden wir den Punkten a, b, c erlauben, sich irgendwie kontinuierlich in der Ebene zu bewegen, bis sie wieder in irgendeiner

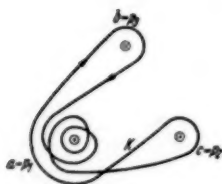


Fig. 4.

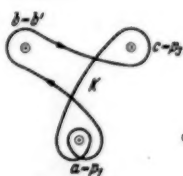


Fig. 5.

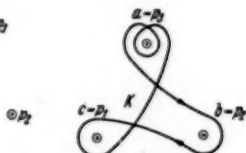


Fig. 6.

Reihenfolge auf die Ecken p_1, p_2, p_3 zu liegen kommen. Die Kurve K ist wie früher zu behandeln. Auf diese Weise können aus Fig. 2 unendlich viele neue Figuren erzeugt werden, oder arithmetisch gesprochen: Aus dem Potenzprodukt (1) können unendlich viele von (1) und seinen zyklischen Permutationen verschiedene Potenzprodukte erzeugt werden.

Und nun kommen wir zum eigentlichen Problem, das in roher Form so lautet: „Wie kann man bei zwei vorgelegten Figuren von je drei Punkten und einer Kurve entscheiden, ob sie sich durch die eben geschilderten Veränderungen ineinander überführen lassen oder nicht?“

Dieses Problem genau zu formulieren und dabei als ein Transformationsproblem der Zöpfe zu erkennen und dann das Problem zu lösen, das ist der Inhalt der folgenden Untersuchungen.

§ 2.

Operationen und Substitutionen.

Wir knüpfen jetzt an den ersten Teil¹⁾ dieser Arbeit an: Dort wurden im § 2 Operationen an einem Grundriß $\varphi^{(L)}$ zeichnerisch erklärt und die Symbolik $\Phi^{(L)} \times (T)$ eingeführt, im § 5 wurde $\Phi^{(L)} \times \sigma_i^a$ für die Rechnung brauchbar gemacht. Mit Ausnahme des letzten Paragraphen wurden alle Rechnungen in den σ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n-1$) ausgeführt. Es lassen sich aber die Operationen mit gewissen Substitutionen in Verbindung bringen, wenn man die S_i an Stelle der σ_i einführt. Wir hatten (Zöpfe I § 9):

$$(2) \quad \begin{cases} S_1 = \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \dots \sigma_3 \sigma_1^2 \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} \\ S_2 = \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \dots \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_2^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} \\ \vdots \\ S_{n-1} = \sigma_{n-1}^2. \end{cases}$$

Die S_i können als Fundamentalkurven angesehen werden, d. h. als orientierte, geschlossene, doppelpunktfreie Kurven, welche alle durch einen festen Punkt p

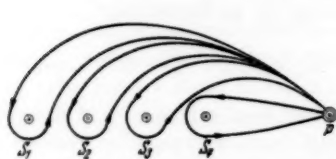


Fig. 7.



Fig. 8.

gehen. Für $n = 5$ z. B. sind sie in der Fig. 7 dargestellt. Die Wirkung der Transformationen

$$S'_i = \sigma_2^{-1} S_i \sigma_2 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

kann aus Fig. 8 unmittelbar abgelesen werden:

$$\begin{aligned} S'_1 &= S_1, \\ S'_2 &= S_2 S_3 S_2^{-1}, \\ S'_3 &= S_2, \\ S'_4 &= S_4. \end{aligned}$$

¹⁾ W. Fröhlich, Beiträge zur Theorie der Zöpfe I. Über eine besondere Klasse von Zöpfen, Math. Annalen 115 (1938), S. 412—434. Diese Arbeit wollen wir im folgenden mit „Zöpfe I“ zitieren.

Allgemeiner gelten für $S'_i = \sigma_j^{-1} S_i \sigma_j$ ($j = 1, 2, \dots, n-2$) die Formeln

$$(3) \quad \begin{cases} S'_i = S_i & (i \neq j, j+1), \\ S'_j = S_j S_{j+1} S_j^{-1}, \\ S'_{j+1} = S_j \end{cases}$$

und für $S'_i = \sigma_j S_i \sigma_j^{-1}$ ($j = 1, 2, \dots, n-2$) die Formeln

$$(4) \quad \begin{cases} S'_i = S_i & (i \neq j, j+1), \\ S'_j = S_{j+1}, \\ S'_{j+1} = S_{j+1}^{-1} S_j S_{j+1}, \end{cases}$$

welche natürlich auch mit Hilfe der Relationen²⁾

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma_i \xleftrightarrow{\quad} \sigma_k & (k \neq i-1, i+1), \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i = 1, 2, \dots, n-2) \end{cases}$$

nachgeprüft werden können.

Ist nun $W_{(S)}$ ³⁾ irgendein Kurzwort der S_i , so findet man

$$W'_{(S)} = \sigma_j^{-1} W_{(S)} \sigma_j \quad (j = 1, 2, \dots, n-2),$$

indem man die Formeln (2) anwendet und dann zum Kurzwort übergeht. Das gleiche Resultat erhält man aber auch, wenn man statt der Formeln (3) die Formeln

$$(6) \quad \begin{cases} S'_i = Y S_i Y^{-1} & (i \neq j, j+1), \\ S'_j = Y S_j S_{j+1} S_j^{-1} Y^{-1}, \\ S'_{j+1} = Y S_j Y^{-1} \end{cases}$$

verwendet, in denen Y ein unbestimmtes Potenzprodukt von S_1, S_2, \dots, S_{n-1} bedeutet. Ähnliches gilt für die Formeln (4). Und wenn wir mit $\bar{\sigma}_j$ und $\bar{\sigma}_j^{-1}$ die Substitutionen bezeichnen, welche zu den Transformationen

$$\sigma_j^{-1} W_{(S)} \sigma_j \quad \text{und} \quad \sigma_j W_{(S)} \sigma_j^{-1}$$

²⁾ Vgl. E. Artin, Theorie der Zöpfe, Hamburg. Abh. 4, S. 52, Formeln (7) und (8). Diese Arbeit wird im folgenden immer gemeint sein, wenn wir den Namen E. Artin zitieren.

³⁾ K. Reidemeister, Einführung in die kombinatorische Topologie (Die Wissenschaft, Bd. 86), S. 34.

gehören, so haben wir in der üblichen Schreibweise ⁴⁾

$$(7) \quad \bar{\sigma}_j = \begin{pmatrix} S_i & S_j & S_{j+1} \\ YS_iY^{-1} & YS_jS_{j+1}S_j^{-1}Y^{-1} & YS_jY^{-1} \end{pmatrix} \\ (j = 1, 2, \dots, n-2) \quad (i \neq j, j+1),$$

$$(8) \quad \bar{\sigma}_j^{-1} = \begin{pmatrix} S_i & S_j & S_{j+1} \\ YS_iY^{-1} & YS_{j+1}Y^{-1} & YS_{j+1}^{-1}S_jS_{j+1}Y^{-1} \end{pmatrix}.$$

Die Operation

$$\Phi^{(L)} \times (T)$$

kann jetzt rechnerisch dadurch ausgeführt werden, daß man mittels (2) den Übergang von $\Phi^{(L)}$ zu $\mathfrak{P}^{(L)}$ macht, hierauf die Substitutionen (7) und (8) wiederholt anwendet, so wie es durch (T) verlangt wird, und schließlich wieder zur Klasse der Kurzworte übergeht. Statt der wiederholten Anwendung von (7) und (8) kann man auch mit einer einzigen Substitution (\bar{T}) auskommen, nämlich mit jener, die zu (T) gehört. Sie hat die Gestalt

$$(\bar{T}) = \begin{pmatrix} S_i \\ YQ_iS_iQ_i^{-1}Y^{-1} \end{pmatrix},$$

worin Y wieder ein unbestimmtes Potenzprodukt von S_1, S_2, \dots, S_{n-1} bedeutet, während die Q_i bestimmte Potenzprodukte von S_1, S_2, \dots, S_{n-1} sind. Der Index i hängt natürlich von i ab.

Schreibt man (\bar{T}) in der Form

$$S'_i = YQ_iS_iQ_i^{-1}Y^{-1},$$

so läßt sich folgende Gleichung ⁵⁾ leicht beweisen:

$$(9) \quad S'_1S'_2 \dots S'_{n-1} = YS_1S_2 \dots S_{n-1}Y^{-1}.$$

Und für

$$(10) \quad (T) = (\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-2})^{n-1}$$

lauten die Gleichungen von (\bar{T}) :

$$(11) \quad S'_i = YS_iY^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Die Substitutionen von (\bar{T}) bilden eine Gruppe, bei der (11) als Identität anzusehen ist. Die

$$\bar{\sigma}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n-2)$$

⁴⁾ Die Formeln (7) und (8) stimmen für $Y = 1$ mit den Formeln (26) und (25) von E. Artin, S. 61, im wesentlichen überein.

⁵⁾ Wie bei E. Artin, S. 68, die Formel (37).

bilden ein System von Erzeugenden, aber die Gruppe ist mit 3_{n-2} nicht isomorph. Aus (10) und (11) folgt nämlich

$$(12) \quad (\overline{\sigma_1 \sigma_2} \dots \overline{\sigma_{n-2}})^{n-1} = 1,$$

während die entsprechende Relation für 3_{n-2} nicht gilt.

§ 3.

Dreiecksgrundrisse.

In diesem und in allen folgenden Paragraphen soll $n = 4$ sein. Die Formeln (1) lauten dann

$$(13) \quad \begin{cases} S_1 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1}, \\ S_2 = \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_3^{-1}, \\ S_3 = \sigma_3^2. \end{cases}$$

Die Grundrisse von S_1, S_2, S_3 sind in Fig. 9 gezeichnet. Da liegen die drei Punkte p_1, p_2, p_3 mit p in einer Geraden. Um zu einem Dreieck $p_1 p_2 p_3$,



Fig. 9.



Fig. 10.



Fig. 11.

wie wir es in § 1 hatten, zu kommen, bewegen wir in Fig. 9 den Punkt p längs der punktierten Linie nach p' und nehmen dabei die Kurven S_1, S_2 und S_3 mit. So entsteht die Fig. 10, in welcher wir nur noch den Punkt p_3 längs der punktierten Linie nach p'_3 zu bewegen und die Kurve S_3 dabei mitzunehmen brauchen, um auf die Fig. 11 zu kommen. Lassen wir in ihr den Punkt p weg, so haben wir volle Übereinstimmung mit den Festsetzungen über $S_i^{+1}, S_i^{-1}, p_1 = a, p_2 = b$ und $p_3 = c$ im § 1.

Durch diese Umwandlung der geradlinig angeordneten Punkte $p_1 p_2 p_3$ in ein Dreieck entsteht aus jedem Grundriß $\varphi^{(L)}$ eine neue Figur, die wir *Dreiecksgrundriß* $\chi^{(L)}$ nennen wollen. Man erkennt leicht, daß die Beziehung zwischen $\varphi^{(L)}$ und $\chi^{(L)}$ umkehrbar eindeutig ist, und daraus folgt der

Satz 1. *Jedem der fünf Begriffe $\Phi^{(L)}$, $\psi^{(L)}$, $\varphi^{(L)}$, $\mathfrak{P}^{(L)}$ und $\chi^{(L)}$ sind die anderen vier eindeutig zugeordnet.*

Als Beispiel zu diesem Satze wählen wir die Klasse $\Phi^{(L)}$, die aus den zyklischen Permutationen von

$$\sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1^4 \sigma_2^{-1} \sigma_3^6)$$

besteht: Die zugehörige Klasse $\psi^{(L)}$ enthält dann genau vier Elemente, nämlich

$$\begin{array}{ll} \sigma_3^2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^4 \sigma_2^{-1}, & \sigma_3^{-1} \sigma_1^4 \sigma_2^{-1} \sigma_3^2, \\ \sigma_1^4 \sigma_2^{-1} \sigma_3^2 \sigma_2^{-1}, & \sigma_3^{-1} \sigma_3^2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^4, \end{array}$$

und der Grundriß $\varphi^{(L)}$ ist die Fig. 12⁷⁾. Die Klasse $\mathfrak{P}^{(L)}$ enthält genau drei Elemente, nämlich

$$S_1^2 S_3 S_2^{-1}, \quad S_3 S_2^{-1} S_1^2, \quad S_2^{-1} S_1^2 S_3,$$

und der Dreiecksgrundriß $\chi^{(L)}$ ist die Fig. 2, der man sofort ansieht, wie sie aus der Fig. 12 entstanden ist.

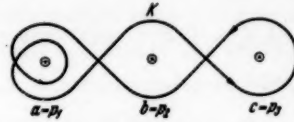


Fig. 12.

§ 4.

Dreiecksoperationen.

Gehören $\mathfrak{P}_1^{(L)}$ und $\Phi_1^{(L)}$ zu $\chi_1^{(L)}$, $\mathfrak{P}_2^{(L)}$ und $\Phi_2^{(L)}$ zu $\chi_2^{(L)}$, und ist

$$\Phi_2^{(L)} = \Phi_1^{(L)} \times (T),$$

so wollen wir sagen: $\chi^{(L)}$ ist durch die *Dreiecksoperation*

$$\mathfrak{P}_2^{(L)} = \mathfrak{P}_1^{(L)} \times (T)$$

aus $\chi_1^{(L)}$ entstanden. Aber auch die *Substitutionen* (\overline{T}) wollen wir, da ja kein Mißverständnis zu befürchten ist, als *Dreiecksoperationen* bezeichnen. Dann bilden nach § 2 die Dreiecksoperationen eine *Gruppe* Ω mit den Erzeugenden

$$\overline{\sigma}_1 \quad \text{und} \quad \overline{\sigma}_2,$$

zwischen denen unter anderem die Relation

$$(14) \quad \overline{\sigma}_1 \overline{\sigma}_2 \overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_2 \overline{\sigma}_1 \overline{\sigma}_2$$

⁶⁾ Vgl. die Fig. 2 von Zöpfe I auf S. 412.

⁷⁾ Vgl. ⁶⁾.

besteht. Wir wollen nun zeigen, daß die in § 1 geschilderten Veränderungen Dreiecksoperationen sind. Zu diesem Zwecke führen wir die zwei neuen Elemente *)

$$(15) \quad D = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1 \quad \text{und} \quad B = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1$$

ein und berechnen aus (14) mühelos

$$(16) \quad B^2 = D^2.$$

Umgekehrt errechnet man aus (15)

$$(17) \quad \bar{\sigma}_1 = BD^{-1}$$

und $\bar{\sigma}_2 = D^2 B^{-1}$, wofür man wegen (16) auch

$$(18) \quad \bar{\sigma}_2 = D^{-1} B$$

schreiben kann. Schließlich folgt aus (15) und (16) sofort wieder (14). Jetzt sind wir sicher, daß B und D Erzeugende der Gruppe Ω von Dreiecksoperationen sind und berechnen uns aus (7) und (8) die Substitutionen

$$D = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ YS_1S_2S_1^{-1}Y^{-1} & YS_1S_2S_1^{-1}Y^{-1} & YS_1Y^{-1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ YS_1S_2S_2^{-1}S_1^{-1}Y^{-1} & YS_1S_2S_1^{-1}Y^{-1} & YS_1Y^{-1} \end{pmatrix},$$

wofür wir wegen der Unbestimmtheit von Y auch schreiben dürfen:

$$(19) \quad D = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ YS_2Y^{-1} & YS_2Y^{-1} & YS_1Y^{-1} \end{pmatrix},$$

$$(20) \quad B = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ YS_2S_2S_2^{-1}Y^{-1} & YS_2Y^{-1} & YS_1Y^{-1} \end{pmatrix}.$$

Die Relation (16) zerfällt wegen (12), (14) und (15) in die Relationen

$$(21) \quad D^2 = 1 \quad \text{und} \quad B^2 = 1,$$

und wenn wir noch zwei Erzeugende

$$(22) \quad A = DBD^{-1} \quad \text{und} \quad C = D^{-1}BD$$

*) Die Formeln (15) bis (18) werden auf die gleiche Weise gewonnen wie die Formeln (38) und (40) bei E. Artin auf S. 70.

einführen, so ergibt sich aus (19) und (20)

$$(23) \quad A = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ YS_1Y^{-1} & YS_2Y^{-1} & YS_1S_2S_1^{-1}Y^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(24) \quad C = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ YS_2Y^{-1} & YS_2S_1S_1^{-1}Y^{-1} & YS_3Y^{-1} \end{pmatrix}.$$

Wir merken noch die zwei Relationen

$$(25) \quad A^2 = 1 \quad \text{und} \quad C^2 = 1$$

an, die sich sofort aus (22) und aus der zweiten Gleichung (21) ergeben, und wenden uns jetzt zur geometrischen Deutung von A, B, C, D :

Die Dreiecksoperation D bedeutet, daß das Dreieck abc mit der Kurve K als starres System um den Dreiecksmittelpunkt gedreht wird, und zwar in mathematisch positivem Sinne um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$, so daß der Punkt a auf p_2 , b auf p_3 und c auf p_1 zu liegen kommt. Für die Dreiecksoperation B gilt nach (15)

$$B = \bar{\sigma}_1 D,$$

sie setzt sich also aus $\bar{\sigma}_1$ und der darauffolgenden Dreiecksoperation D zusammen. Jetzt erkennt man, daß B dieselbe Veränderung ist, durch welche wir die Fig. 6 aus der Fig. 2 gewonnen haben. Und ebenso ergibt sich aus der ersten Gleichung (22), daß die Fig. 4 aus der Fig. 2 durch die Dreiecksoperation A gewonnen wurde, daß also wirklich alle in § 1 geschilderten Veränderungen Dreiecksoperationen sind. Und damit ist auch gezeigt, daß das am Ende von § 1 aufgestellte Problem identisch mit dem Transformationsproblem unserer besonderen Klasse von Viererzöpfen ist.

Wir wollen noch einen Satz über die Gruppe \mathfrak{D} aufstellen und entnehmen dazu den Gleichungen (22), daß

$$(26) \quad \begin{cases} AD = DB, & BD = DC, & CD = DA, \\ AD^2 = D^2C, & BD^2 = D^2A, & CD^2 = D^2B \end{cases}$$

gilt, was auch anschaulich ganz klar ist. Wenn nun eine Dreiecksoperation (T) als Potenzprodukt von $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ vorgelegt ist, so können wir sie mittels (17) und (18) in ein Potenzprodukt von B, D überführen und mittels (21) können wir bewirken, daß die D -Potenzen alle nur mit den Exponenten $+1$ oder $+2$ vorkommen und die B -Potenzen überhaupt nur mit dem Exponenten $+1$. Hierauf können wir durch Anwendung von (26) alle D nach links an den Anfang des Produktes bringen. Dabei kommen vielleicht auch A - und C -Potenzen herein, die sich aber mit (25) reduzieren lassen. Es gilt also der

Satz 2. Jede Dreiecksoperation (T) kann so als reduziertes Potenzprodukt von A, B, C, D dargestellt werden, daß der erste Faktor D^{+1} oder D^{+2} ist, während alle folgenden Faktoren A^{+1}, B^{+1} oder C^{+1} sind.

§ 5.

Einteilung der Dreiecksoperationen.

Wir gehen wieder von einem Dreiecksgrundriß $\chi_1^{(L)}$ aus und betrachten jene Stücke der Kurve K , die von p_2 direkt nach p_3 oder von p_3 direkt nach p_2 verlaufen. Sie entsprechen den Termen

$$S_2^{\varepsilon_2} S_3^{\varepsilon_3} \quad \text{und} \quad S_3^{\varepsilon_3} S_2^{\varepsilon_2} \quad (\varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

welche in der zu $\chi_1^{(L)}$ gehörigen Klasse $\mathfrak{P}_1^{(L)}$ vorkommen, und ihre Anzahl sei α_1 . Unter β_1 bzw. γ_1 verstehen wir die entsprechenden Anzahlen von Stücken der Kurve K zwischen den Punkten p_3 und p_1 bzw. p_1 und p_2 . Geht nun $\chi_1^{(L)}$ durch eine Dreiecksoperation in $\chi_2^{(L)}$ über, so werden die zugehörigen Zahlen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ im allgemeinen von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ verschieden sein. Ist insbesondere A diese Dreiecksoperation, so definieren wir:

- I. A ist eine *g-Operation* (gebotene Operation) für $\chi_1^{(L)}$, wenn $\alpha_2 > \alpha_1$ ist.
- II. A ist eine *e-Operation* (erlaubte Operation) für $\chi_1^{(L)}$, wenn $\alpha_2 = \alpha_1$ ist.
- III. A ist eine *v-Operation* (verbotene Operation) für $\chi_1^{(L)}$, wenn $\alpha_2 < \alpha_1$ ist.

Für B und C sollen die entsprechenden Definitionen gelten, die Dreiecksoperationen D und D^2 sind ganz anderer Art, denn sie drehen den Dreiecksgrundriß, ohne ihn sonst zu verändern. Wir setzen für sie und für die *e-Operationen* den gemeinsamen Namen *E-Operationen* fest. Damit ist eine Einteilung der Dreiecksoperationen A, B, C, D für einen vorgelegten Dreiecksgrundriß geschaffen. — Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 3. Entsteht $\chi_2^{(L)}$ aus $\chi_1^{(L)}$ durch die Dreiecksoperation O ($O = A, B, C$) und ist O eine *g-* bzw. *e-*, *v-Operation* für $\chi_1^{(L)}$, so ist O eine *v-* bzw. *e-*, *g-Operation* für $\chi_2^{(L)}$.

Satz 4. Ist für einen vorgelegten Dreiecksgrundriß eine der Dreiecksoperationen A, B, C eine *g-Operation*, so sind die anderen beiden notwendig *v-Operationen*.

Satz 5. Ist für einen vorgelegten Dreiecksgrundriß eine der Dreiecksoperationen A, B, C eine *e-Operation*, so kann keine der beiden anderen eine *g-Operation* sein.

Der Satz 3 folgt mittels (21) und (25) sogleich aus den Definitionen I, II und III. Zum Beweise der Sätze 4 und 5 ändern wir die Indizes der $\chi^{(L)}$ ein wenig ab: Der vorgelegte Dreiecksgrundriß sei $\chi_0^{(L)}$, er werde durch die Dreiecksoperation A in $\chi_1^{(L)}$, durch B in $\chi_2^{(L)}$ und durch C in $\chi_3^{(L)}$ verwandelt. Dann entnehmen wir der Anschauung die folgenden Ungleichungen

$$(27) \quad \begin{cases} \beta_0 \geq \alpha_1, & \gamma_0 \geq \alpha_1, \\ \alpha_0 \geq \beta_2, & \alpha_0 \geq \gamma_3, \end{cases}$$

die man auch aus der Betrachtung der zu $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_2, \gamma_0, \gamma_3$ gehörenden Terme von $\mathfrak{P}_0^{(L)}, \mathfrak{P}_1^{(L)}, \mathfrak{P}_2^{(L)}$ und $\mathfrak{P}_3^{(L)}$ gewinnen kann.

Was nun den Satz 4 anlangt, so können wir uns auf den Fall beschränken, daß A die g -Operation ist, daß also

$$\alpha_1 > \alpha_0$$

gilt. Dann folgt daraus und aus (27)

$$\beta_2 < \beta_0 \quad \text{und} \quad \gamma_3 < \gamma_0,$$

womit B und C als v -Operationen erkannt sind.

Beim Satz 5 können wir uns auf den Fall beschränken, daß A die e -Operation ist, daß also

$$\alpha_1 = \alpha_0$$

gilt. Jetzt folgt daraus und aus (27)

$$\beta_2 \leq \beta_0 \quad \text{und} \quad \gamma_3 \leq \gamma_0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

§ 6.

Die Normalklasse.

Wir betrachten jetzt wieder eine Klasse $\mathfrak{P}_0^{(L)}$ und unterwerfen den zugehörigen Dreiecksgrundriß $\chi_0^{(L)}$ allen möglichen Operationen. Da werden im allgemeinen unendlich viele verschiedene $\chi^{(L)}$ entstehen. Wir greifen jene $\chi^{(L)}$ heraus, für welche keine der Operationen A, B, C eine g -Operation ist, und fassen sie in einer Klasse $\{\mathfrak{N}\}$ zusammen, die wir *Normalklasse* nennen. Den Beweis, daß immer Elemente von $\{\mathfrak{N}\}$ existieren, wollen wir jetzt erbringen:

Wir ordnen jedem $\mathfrak{P}^{(L)}$ zwei ganze, positive Zahlen Σ und M zu, die wir so erklären: Σ ist die Summe der absoluten Werte aller in $\mathfrak{P}^{(L)}$ vorkommenden Exponenten und M ist die Summe aus Σ und der Anzahl der Potenzen von $\mathfrak{P}^{(L)}$. Dann gilt zunächst der

Satz 6. Entsteht $\mathfrak{P}_1^{(L)}$ aus $\mathfrak{P}_0^{(L)}$ durch die Operation A , so ist

$$\Sigma_1 < M_0 - \alpha_1 + \alpha_0.$$

Zum Beweise verwenden wir die Substitutionen von A in der Form

$$(28) \quad \begin{cases} S'_1 = S_1, \\ S'_2 = S_3, \\ S'_3 = S_1 S_2 S_1^{-1}, \end{cases}$$

was ja erlaubt ist. Wir setzen in ein Kurzwort W_0 von $\mathfrak{P}_0^{(L)}$ ein und reduzieren zunächst nicht. Bei dem so entstehenden Wort \widehat{W}_1 ist die Summe der ab-

soluten Werte der Exponenten von S_2 und S_3 gleich der entsprechenden Summe bei W_0 , weil durch (28) die Indizes 2 und 3 vertauscht wurden, ohne daß dabei neue S_2, S_3 hinzugekommen oder alte in Wegfall geraten sind. Machen wir jetzt den Übergang von \widehat{W}_1 zum Kurzwort W_1 , so kann diese Summe nur *gleich* bleiben oder *kleiner* werden. — Über die S_1 -Potenzen läßt sich folgendes aussagen: Erstens sind α_1 von ihnen mit den Exponenten $+1$ oder -1 in Wegfall geraten. Zweitens sind α_0 von ihnen mit den Exponenten $+1$ oder -1 neu hinzugekommen. Drittens gilt für die übrigen S_1 -Potenzen der *Hauptsatz* des 1. Teiles, und zwar in seiner *zweiten Fassung* *). Für ihre Exponenten gilt also, daß der absolute Wert eines jeden um höchstens 1 gewachsen ist. — Vergrößert man bei allen Potenzen von W_0 den absoluten Wert des Exponenten um 1 und bildet man dann die Summe, so erhält man M_0 . — Aus diesen Tatsachen folgt die Ungleichung des Satzes 6. Der Satz gilt natürlich sinngemäß für die Operationen B und C und gestattet überdies noch eine Erweiterung:

Entsteht nämlich $\mathfrak{P}_2^{(L)}$ aus $\mathfrak{P}_1^{(L)}$ durch die Operation B , weiter $\mathfrak{P}_3^{(L)}$ aus $\mathfrak{P}_2^{(L)}$ etwa wieder durch die Operation A , dann $\mathfrak{P}_4^{(L)}$ aus $\mathfrak{P}_3^{(L)}$ vielleicht durch die Operation C usw., so gelten die Ungleichungen:

$$(29) \quad \begin{cases} \Sigma_2 \leq M_0 - \alpha_1 + \alpha_0 - \beta_2 + \beta_1, \\ \Sigma_3 \leq M_0 - \alpha_1 + \alpha_0 - \beta_2 + \beta_1 - \alpha_3 + \alpha_2, \\ \Sigma_4 \leq M_0 - \alpha_1 + \alpha_0 - \beta_2 + \beta_1 - \alpha_3 + \alpha_2 - \gamma_4 + \gamma_3 \end{cases}$$

usw.,

das ergibt sich mühelos aus der obigen Beweisführung.

Man könnte diese Ungleichheiten auch noch verschärfen, z. B. erkennt man leicht, daß sogar

$$\Sigma_1 < M_0 - 2\alpha_1 + \alpha_0$$

ist, und vermutlich können auch die Gleichheitszeichen von (29) weggelassen werden, doch genügen schon die bisherigen Ergebnisse, um die Existenz von $\{\mathfrak{R}\}$ nachzuweisen: Wenn nämlich alle ausgeführten Dreiecksoperationen g -Operationen sind, so folgt aus den obigen Ungleichungen

$$\Sigma_1 > \Sigma_2 > \Sigma_3 > \Sigma_4 > \dots,$$

und diese Reihe kann nicht unbegrenzt fortgesetzt werden, weil ihre Glieder ja ganzzahlig und positiv sind. Damit ist aber bewiesen, daß mindestens ein Element von $\{\mathfrak{R}\}$ existiert.

*) Vgl. Zöpfe I, S. 434.

§ 7.

Eigenschaften der Normalklasse.

Ist $\mathfrak{N}_1^{(L)}$ ein Element von $\{\mathfrak{N}\}$ und führen wir an ihm alle E -Operationen aus, die möglich sind (mindestens zwei muß es geben, nämlich D und D^2), so erhalten wir wieder Elemente von $\{\mathfrak{N}\}$. Für die Operationen D und D^2 ist das selbstverständlich, für allfällige e Operationen folgt es aus den Sätzen 3 und 5. Die neuen Elemente nehmen wir mit $\mathfrak{N}_1^{(L)}$ zusammen, streichen von zwei gleichen Elementen immer eines weg, bis wir lauter verschiedene Elemente vor uns haben, und führen dann wieder an jedem von ihnen alle E -Operationen aus, die möglich sind. Die jetzt neu entstehenden Elemente nehmen wir wieder mit den alten zusammen, streichen wieder wie oben, führen dann wieder die E -Operationen aus, usw., so lange, bis alle neu entstehenden Elemente schon unter den alten vorhanden sind.

Daß unser Verfahren wirklich nach *endlich vielen* Schritten diesen Abschluß findet, daß es uns also nur *endlich viele* verschiedene Elemente

$$(30) \quad \mathfrak{N}_1^{(L)}, \mathfrak{N}_2^{(L)}, \mathfrak{N}_3^{(L)}, \mathfrak{N}_4^{(L)}, \dots$$

liefern kann, beweist man, indem man zunächst die Definition II auf die Formeln (28) anwendet: Die Ungleichungen

$$\Sigma_1 < M_0, \quad \Sigma_2 < M_0, \quad \Sigma_3 < M_0, \quad \Sigma_4 < M_0, \quad \dots$$

besagen, daß alle $\mathfrak{N}^{(L)}$, die aus $\mathfrak{N}_1^{(L)}$ durch Ausführung von e -Operationen entstanden sind, folgende Eigenschaft haben: *Die Summe der absoluten Werte der Exponenten liegen unter einer festen Schranke M_0 .* Daran ändern auch die Operationen D und D^2 nichts. Es gibt aber überhaupt nur *endlich viele* Potenzprodukte von S_1, S_2, S_3 mit dieser Eigenschaft.

Wir fassen die Elemente (30) in einer Klasse $\{\{\mathfrak{N}\}\}$ zusammen. Bei Ausführung von E -Operationen entstehen aus den Elementen von $\{\{\mathfrak{N}\}\}$ immer nur wieder Elemente von $\{\{\mathfrak{N}\}\}$, und umgekehrt kann man alle Elemente von $\{\{\mathfrak{N}\}\}$ aus einem von ihnen durch wiederholte Anwendung von E -Operationen erhalten. Und nun kommt die Hauptsache: Wir behaupten, daß $\{\mathfrak{N}\}$ mit $\{\{\mathfrak{N}\}\}$ *identisch* ist. Den Beweis führen wir indirekt: Wir nehmen an, daß es ein Element $\mathfrak{N}_*^{(L)}$ aus $\{\mathfrak{N}\}$ gibt, welches nicht zu $\{\{\mathfrak{N}\}\}$ gehört. Ist nun $\mathfrak{N}_1^{(L)}$ ein Element aus $\{\{\mathfrak{N}\}\}$, so existiert sicher eine Dreiecksoperation (T) , welche $\mathfrak{N}_1^{(L)}$ in $\mathfrak{N}_*^{(L)}$ überführt. Wir denken uns (T) als reduziertes Potenzprodukt von A, B, C, D so dargestellt, wie es in Satz 2 beschrieben ist. Ist der erste Faktor D oder D^2 vorhanden, so führen wir diese Dreiecksoperation aus und erhalten aus $\mathfrak{N}_1^{(L)}$ wieder ein Element von $\{\{\mathfrak{N}\}\}$. Daher kann die Dreiecksoperation, die durch den zweiten Faktor von (T) verlangt wird, nur eine

e - oder eine v -Operation sein. Ist sie eine e -Operation, so gilt der eben ausgeführte Schluß auch für den dritten Faktor von (\overline{T}) , usw. Da aber $\mathfrak{N}_*^{(L)}$ nicht zu $\{\{\mathfrak{N}\}\}$ gehören soll, müssen wir einmal auf eine v -Operation kommen: Wir nehmen an, daß die Dreiecksoperation, die durch den h -ten Faktor von (\overline{T}) verlangt wird, eine v -Operation ist. Nach Ausführung dieser v -Operation haben wir ein Element, für welches der Satz 4 gilt. Und zwar ist die Dreiecksoperation, welche durch den $(h+1)$ -ten Faktor von (\overline{T}) verlangt wird, eine der beiden v -Operationen. Diese Schlußweise gilt jetzt für alle folgenden Faktoren von (\overline{T}) , so daß $\mathfrak{N}_*^{(L)}$ aus dem vorhergehenden Element durch eine v -Operation entsteht. Dann aber ist nach Satz 3 eine der Dreiecksoperationen A, B, C eine g -Operation für $\mathfrak{N}_*^{(L)}$, und folglich gehört $\mathfrak{N}_*^{(L)}$ nicht zu $\{\mathfrak{N}\}$. Das steht im Widerspruch zur obigen Annahme.

§ 8.

Das finite Verfahren.

Das am Ende des § 1 in roher Form ausgesprochene Problem können wir jetzt genau formulieren: *Von zwei vorgelegten Dreiecksgrundrissen $\chi_1^{(L)}$ und $\chi_2^{(L)}$ ist durch ein finites Verfahren zu entscheiden, ob $\chi_1^{(L)}$ durch eine Dreiecksoperation in $\chi_2^{(L)}$ überführt werden kann oder nicht.*

Wir sind jetzt imstande, das finite Verfahren anzugeben. Es besteht in der Aufstellung der Normalklasse: *Zwei Dreiecksgrundrisse sind dann und nur dann ineinander überführbar, wenn die zugehörigen Normalklassen identisch sind.*

Damit ist auch das Transformationsproblem für die Viererzöpfe aus \mathfrak{R} gelöst. Um nämlich zu entscheiden, ob zwei Viererzöpfe Z_1 und Z_2 aus \mathfrak{R} durch Transformation ineinander überführt werden können, hat man so vorzugehen:

1. Man bestimme, zu welchen Untergruppen $\mathfrak{U}_{2,4}$ die Zöpfe Z_1 und Z_2 gehören. Sind dann β_1 bzw. β_2 die Anzahlen der Untergruppen, zu denen Z_1 bzw. Z_2 gehören, so sind für $\beta_1 \neq \beta_2$ die beiden Zöpfe nicht ineinander überführbar. Für $\beta_1 = \beta_2$ gehe man

2. in jeder Untergruppe zur Darstellung $\mathfrak{P}^{(L)}$ über und bestimme die zugehörige Normalklasse $\{\mathfrak{N}\}$.

3. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß Z_1 und Z_2 durch Transformation auseinander entstehen können, ist, daß ihre Normalklassen paarweise identisch sind. (Natürlich ist dies der Fall, sobald nur irgendein Element einer Normalklasse von Z_1 mit irgendeinem Element einer Normalklasse von Z_2 identisch ist.)

An dem folgenden Beispiel wollen wir die Normalklasse wirklich berechnen:
Der Viererzopf

$$Z = \sigma_3^{-1} \sigma_3 \sigma_1^2 \sigma_3^{-1} \sigma_3^2 \sigma_3 \sigma_1^2 \sigma_3^2 \sigma_1^2 \sigma_3^{-1} \sigma_3^{-1}$$

gehört zu \mathfrak{R} , denn er wird zur Identität, wenn man den vierten Faden wegnimmt. Er gehört also zu $\mathcal{U}_{4,4}$, aber zu keiner anderen Untergruppe. Machen wir den vierten Faden zur Raumkurve L , so stellt sich heraus, daß Z schon ein Element $W_{(0)}$ von $\Phi^{(L)}$ ist, so daß man alle anderen Elemente von $\Phi^{(L)}$ durch zyklische Permutation erhält. Die Fig. 13 zeigt den Grundriß $\varphi^{(L)}$

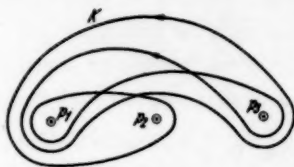


Fig. 13.



Fig. 14.

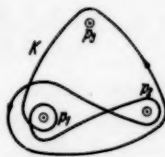


Fig. 15.

von $\Phi^{(L)}$. Wir gehen nun zur Darstellung in den Erzeugenden S_1, S_2, S_3 über: Die Klasse $\mathfrak{P}_0^{(L)}$ besteht aus den zyklischen Permutationen von

$$Z_0 = S_1 S_3 S_1 S_2 S_1 S_3^{-1},$$

und die Fig. 14 zeigt den Dreiecksgrundriß $\chi_0^{(L)}$ von $\mathfrak{P}_0^{(L)}$. Für $\mathfrak{P}_0^{(L)}$ ist A eine g -Operation, B und C sind v -Operationen, das stimmt mit dem Satz 4 überein. Führen wir die Operation A aus, so gelangen wir zur Klasse $\mathfrak{P}_1^{(L)}$, welche aus den zyklischen Permutationen von

$$Z_1 = S_1 S_2 S_3 S_1^2 S_3^{-1}$$

besteht und deren Dreiecksgrundriß $\chi_1^{(L)}$ durch die Fig. 15 dargestellt wird. Für $\mathfrak{P}_1^{(L)}$ ist B eine e -Operation, A und C sind v -Operationen, das stimmt mit



Fig. 16.

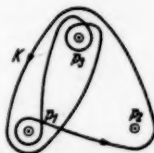


Fig. 17.

dem Satz 5 überein. Durch Ausführung der Operation B erhalten wir die Klasse $\mathfrak{P}_2^{(L)}$, welche aus den zyklischen Permutationen von

$$Z_2 = S_3 S_1 S_2 S_3^2 S_2^{-1}$$

besteht und deren $\chi_1^{(L)}$ die Fig. 16 ist. Für $\mathfrak{P}_4^{(L)}$ sind B und C e -Operationen, A ist v -Operation. Durch Ausführung von C kommt man auf $\mathfrak{P}_3^{(L)}$ mit

$$Z_3 = S_2 S_3 S_1 S_3^2 S_1^{-1}$$

und $\chi_3^{(L)}$ in Fig. 17. Jetzt ist C eine e -Operation, A und B sind v -Operationen. Wir haben also die wesentlichen Formen von $\{R\}$ schon beisammen und brauchen an ihnen nur noch die Operationen D und D^2 auszuführen. Die Normalklasse von Z besteht somit aus den neun Elementen

$$\begin{array}{lll} S_1 S_2 S_3 S_1^2 S_2^{-1}, & S_3 S_1 S_2 S_3^2 S_2^{-1}, & S_2 S_3 S_1 S_3^2 S_1^{-1}, \\ S_2 S_3 S_1 S_2^2 S_3^{-1}, & S_1 S_2 S_3 S_1^2 S_3^{-1}, & S_3 S_1 S_2 S_1^2 S_2^{-1}, \\ S_3 S_1 S_2 S_3^2 S_1^{-1}, & S_2 S_3 S_1 S_2^2 S_1^{-1}, & S_1 S_2 S_3 S_2^2 S_3^{-1} \end{array}$$

und ihren sämtlichen zyklischen Permutationen. Das sind 1080 Elemente, und sie sind alle voneinander verschieden.

Für sie alle ist $\Sigma = 6$, das zu Z_0 gehörige $M_0 = 12$.

(Eingegangen am 23. 4. 1938.)

Über isotrope Mannigfaltigkeiten.

Von

Josef Lense in München.

§ 1.

Bezeichnungen.

Wir betrachten im euklidischen R_n eine Mannigfaltigkeit V_m von der Dimension m , gegeben durch die Vektorgleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2, \dots, u_m),$$

in der Umgebung einer Stelle, wo \mathbf{x} eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen u_1, u_2, \dots, u_m ist. Der Voraussetzung nach ist m der bewegungs- und parameterinvariante Rang der Matrix

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_m} \right\|.$$

Das Bogenelement der V_m ist

$$d\mathbf{x}^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^m g_{\mu\nu} du_\mu du_\nu, \quad g_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_\mu} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_\nu}.$$

r sei der ebenfalls bewegungs- und parameterinvariante Rang der Matrix $\|g_{\mu\nu}\|$. Mannigfaltigkeiten mit $r < m$ pflegt man als *isotrop* zu bezeichnen. Insbesondere habe ich V_m mit $r = 0$ wegen $d\mathbf{x}^2 = 0$ *ametrisch* genannt. Von anderer Seite wurde dafür *total-* oder *vollisotrop* vorgeschlagen, weil sämtliche Kurven der V_m in diesem Fall isotrop sind. Lineare V_m vom Rang r nannte ich $(m-r)$ -fach isotrop¹⁾. Um die Bezeichnung zu vereinheitlichen, möchte ich vorschlagen, alle V_m vom Rang r *isotrop vom Rang r* zu nennen. Bei $m = 1$ (isotrope Kurven) kann man den Rang weglassen, weil nur $r = 0$ in Frage kommt.

Wenn für alle Kurven $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ einer V_m

$$\mathbf{x}'^2 = \mathbf{x}''^2 = \dots = \mathbf{x}^{(k)2} = 0$$

ist, aber $\mathbf{x}^{(k+1)2}$ nicht für alle Kurven identisch verschwindet, so nennt M. Pinl²⁾ eine derartige Mannigfaltigkeit *k-fach totalisotrop*. Ich möchte dafür im

¹⁾ J. Lense, Math. Annalen 112 (1935), S. 139—154 (im folgenden mit L_1 bezeichnet), insbesondere S. 152.

²⁾ M. Pinl, Compositio math. (1938), S. 208—238 (im folgenden mit P bezeichnet), insbesondere S. 210.

Anschluß an E. Bompiani³⁾ die Bezeichnung *isotrop k-ter Art* vorschlagen. Projiziert man nämlich eine derartige V_m gemäß der Gleichung

$$(1) \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\bar{\mathbf{x}}}$$

in die Koordinatenräume (x_1, x_2, \dots, x_s) und $(x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n)$, so sind die beiden Mannigfaltigkeiten $\bar{\mathbf{x}}$ und $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$ umkehrbar eindeutig so aufeinander abgebildet, daß entsprechende Kurven nicht nur gleiche Bogenlängen, sondern in entsprechenden Punkten auch gleiche Krümmungen bis zur Ordnung $k-1$ haben; die Mannigfaltigkeiten sind also nach der Bezeichnung von Bompiani aufeinander *abwickelbar von der Art k*. Für $k \rightarrow \infty$ könnte man sie *vollisotrop* nennen. Solche Gebilde liegen in linearen isotropen Räumen vom Rang 0 (L_1 , S. 153). Alle derartigen linearen Räume sind selbst vollisotrop.

§ 2.

Die Differentialform vierten Grades.

M. Pinl hat insbesondere den Fall $m=2$, $r=0$, $k=1$ untersucht³⁾. Durch jeden Punkt einer solchen Fläche gehen vier isotrope Kurven höherer als erster Art, die entsprechenden Richtungen werden durch das Verschwinden einer bewegungs- und parameterinvarianten Differentialform vierter Ordnung geliefert (vgl. hierzu auch B, S. 299, 316). Führt man u und v als Flächenparameter ein, so lautet diese Differentialform

$$(d^2 \mathbf{x})^2 = a_0 du^4 + 4 a_1 du^3 dv + 6 a_2 du^2 dv^2 + 4 a_3 du dv^3 + a_4 dv^4$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathbf{x}_{uu}^2, \\ a_1 &= \mathbf{x}_{uu} \mathbf{x}_{uv}, \\ (2) \quad a_2 &= \mathbf{x}_{uu} \mathbf{x}_{vv} = \mathbf{x}_{uv}^2 \text{ (vgl. hierzu die Gleichungen (3))}, \\ a_3 &= \mathbf{x}_{uv} \mathbf{x}_{vv}, \\ a_4 &= \mathbf{x}_{vv}^2. \end{aligned}$$

Je nachdem, ob in jedem Flächenpunkt von diesen vier Richtungen alle vier, drei, je zwei oder nur zwei zusammenfallen, kann man bei passender Parameterwahl die Normalformen

$$a du^4, \quad a du^3 dv, \quad a du^2 dv^2, \quad du^2 dv (a du + b dv)$$

herstellen. Die entsprechenden Typen seien mit I, II, III, IV bezeichnet. Sind die vier Richtungen in jedem Flächenpunkt verschieden, so gibt es bekanntlich zwei weitere Richtungen, welche je ein Paar der ersten gleichzeitig

³⁾ E. Bompiani, Mem. R. Accad. Italia 6, I (1935), S. 269—520 (im folgenden mit B bezeichnet).

harmonisch trennen. Wählt man die beiden neuen Richtungen als Richtungen für die Parameterlinien, so erhält man die Normalform $a du^4 + b du^2 dv^2 + c dv^4$ (Typus V). Herr Pinl hat noch die beiden Sonderfälle herausgegriffen, in denen das Doppelverhältnis der vier Richtungen harmonisch oder äquianharmonisch, also $b = 0$ oder $b = 2\sqrt{-3ac}$ ist. Der Sonderfall des harmonischen Doppelverhältnisses spielt eine ausgezeichnete Rolle und soll im folgenden mit Vh bezeichnet werden.

Es zeigt sich, daß im R_6 nur die Fälle I, II, Vh auftreten können. Die ihnen entsprechenden Flächen sind Torsen (I), windschiefe Regelflächen (II) und Flächen mit zwei Scharen konjugierter Kurven (Vh). Dieser Satz wurde von Herrn Bompiani nicht ausdrücklich ausgesprochen, läßt sich aber aus seinen Untersuchungen leicht erschließen (B, S. 367–369, 377, 382). Es erheben sich nun folgende Fragen: Treten die sieben von Herrn Pinl aufgestellten Typen schon im R_7 alle auf und welches sind dort die geometrischen Eigenschaften der entsprechenden Flächen? Die erste Frage konnte Herr Pinl dadurch mit ja beantworten, daß er für die neu hinzutretenden Fälle Beispiele angab (P, S. 217–227). Die Beantwortung der zweiten Frage ist der Inhalt der vorliegenden Arbeit. Es zeigt sich, daß sich die einzelnen Fälle ähnlich wie im R_6 geometrisch kennzeichnen lassen (vgl. die Zusammenstellung im § 9). Ich habe dazu die Untersuchungen von Herrn Bompiani ergänzt und dabei neue Hilfsmittel verwendet. Es ist mir gelungen, das Ziel dadurch zu erreichen, daß ich die Dimensionen der Schmiegerräume S_2 und S_3 untersuchte, die von den Ableitungen der beiden ersten bzw. der drei ersten Ordnungen des Kurvenvektors aufgespannt werden (§ 3). Der obenerwähnte Satz für den R_6 stellt sich dabei als Zwischenergebnis wieder heraus (§ 7).

Im Sinne der Gleichung (1) wird dadurch auch die Aufgabe gelöst: *Es sind sämtliche auf eine Ebene abwickelbaren Flächen des R_6 aufzustellen und die Flächen des R_4 bezüglich ihrer Abwickelbarkeit auf Flächen des R_3 einzuteilen.* Die Lösung der Aufgabe für den R_6 bedeutet in diesem Sinne: *Sämtliche auf eine Ebene abwickelbaren Flächen des R_4 sind aufzustellen und die Flächen des R_3 bezüglich ihrer gegenseitigen Abwickelbarkeit einzuteilen.*

§ 3.

Die Schmiegerräume zweiter und dritter Ordnung.

Wir wollen zuerst einige Begriffe und Beziehungen zusammenstellen, die im folgenden gebraucht werden. Die Tangentialebene einer Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ im Punkte (u, v) wird durch \mathbf{x}_u und \mathbf{x}_v aufgespannt. Der von den ersten und zweiten Ableitungen von \mathbf{x} aufgespannte Schmiegerraum zweiter

Ordnung möge mit S_2 , der von den ersten, zweiten und dritten Ableitungen aufgespannte Schmiegraum dritter Ordnung mit S_3 bezeichnet werden. σ sei die Dimension von S_2 , τ die von S_3 . Dann gilt $2 \leq \sigma \leq 5$, $\sigma \leq \tau \leq 9$.

Die Fläche möge ∞^q Tangentialebenen haben ($q = 0, 1, 2$). Diese Tangentialebenen erzeugen die Mannigfaltigkeit $\eta = x + s x_u + t x_v$, deren Tangentialraum im Punkte (s, t, u, v) von den Vektoren $\eta_s, \eta_t, \eta_u, \eta_v$ aufgespannt wird. Ein beliebiger Punkt dieses Tangentialraumes ist also durch

$$\eta + b_1 \eta_s + b_2 \eta_t + b_3 \eta_u + b_4 \eta_v = x + c_1 x_u + c_2 x_v + c_3 x_{uu} + c_4 x_{uv} + c_5 x_{vv}$$

gegeben, liegt daher im S_2 der Fläche. Die betrachtete Mannigfaltigkeit der Tangentialebenen und somit auch ihr Tangentialraum haben die Dimension $q + 2$, infolgedessen ist $q + 2 \leq \sigma$. Eine Ausnahme tritt ein, wenn eine Fläche mit $q = 2$ und daher auch ihre Tangentialebenen in einem R_3 liegen. In diesem Falle ist die erwähnte Dimension nicht vier, sondern drei. Dieser Fall ist in folgedessen immer gesondert zu betrachten.

Man muß drei Fälle unterscheiden:

1. $\sigma = 2$, die Ableitungen zweiter und höherer Ordnung von x hängen also linear von denen erster Ordnung ab, die Fläche ist somit eine Ebene, $\tau = 2$, $q = 0$, jede dieser Aussagen zieht die anderen nach sich.

2. $\sigma = 3$. Dann ist entweder $q = 1$ wegen $q + 2 \leq \sigma$ und 1., die Fläche also eine Torse (einschließlich der ausgearteten Fälle: Kegel, Zylinder), weil ihre Projektion in einen beliebigen R_3 eine Torse ist, somit $x = \beta(u) + v \beta'(u)$, daher $\tau \leq 4$, oder die Fläche liegt in einem R_3 , dann kann auch $q = 2$ eintreten, aber dafür ist $\tau = 3$. Umgekehrt folgt aus $q = 1$ (Torse) immer $\sigma = 3$, $\tau \leq 4$.

3. $\sigma \geq 4$, die Fläche kann also in keinem R_3 liegen, somit $q = 2$ wegen 1. und 2. Umgekehrt ist $\sigma \geq 4$ für $q = 2$, wenn die Fläche in keinem R_3 liegt.

Aus $d x^2 = 0$ folgt in bekannter Weise

$$(3) \quad x_u^2 = x_u x_v = x_v^2 = 0,$$

$$x_u x_{uu} = x_u x_{uv} = x_u x_{vv} = x_v x_{uu} = x_v x_{uv} = x_v x_{vv} = 0.$$

Die Gleichungen (2) ergeben dann

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{uu} x_{uuu} &= -a_0, \\ x_u x_{uuv} &= x_v x_{uuu} = -a_1, \\ x_u x_{uvv} &= x_v x_{uuv} = -a_2, \\ x_u x_{vvv} &= x_v x_{vvv} = -a_3, \\ x_v x_{vvv} &= -a_4 \end{aligned}$$

und

(5)

$$\begin{aligned}
x_{uu} x_{uuu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_0}{\partial u}, \\
x_{uu} x_{uuv} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_0}{\partial v}, \\
x_{uu} x_{uvv} &= \frac{\partial a_1}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial u}, \\
x_{uu} x_{vvv} &= \frac{3}{2} \frac{\partial a_2}{\partial v} - \frac{\partial a_3}{\partial u}, \\
x_{uv} x_{uuu} &= \frac{\partial a_1}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_1}{\partial v}, \\
x_{uv} x_{uuv} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial u}, \\
x_{uv} x_{uvv} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial v}, \\
x_{uv} x_{vvv} &= \frac{\partial a_3}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_4}{\partial u}, \\
x_{vv} x_{uuu} &= \frac{3}{2} \frac{\partial a_2}{\partial u} - \frac{\partial a_1}{\partial v}, \\
x_{vv} x_{uuv} &= \frac{\partial a_3}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial v}, \\
x_{vv} x_{uvv} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_4}{\partial u}, \\
x_{vv} x_{vvv} &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_4}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Aus (2), (3), (4) folgt:

$$\begin{array}{ll}
x_{uuu} & a_0 = a_1 = 0, \\
\text{Liegt } x_{uuv} \text{ im } S_2, \text{ so ist} & a_1 = a_2 = 0, \\
x_{uvv} & a_2 = a_3 = 0, \\
x_{vvv} & a_3 = a_4 = 0.
\end{array}$$

§ 4.

Flächen mit Asymptotenlinien.

Wir betrachten nun eine Fläche mit $m = 2$, $r = 0$, $k = 1$.

Ist $\sigma = 3$, so ist die Fläche nach § 3 eine Torse. Wäre nämlich $\varrho = 2$, so müßte die Fläche in einem R_3 liegen. Da jede Flächentangente isotrop ist, müßte der absolute Kegelschnitt dieses R_3 die ganze uneigentliche Ebene erfüllen, der R_3 daher vollisotrop sein. Dann wäre aber die Fläche ebenfalls

vollisotrop, also $k \neq 1$. Wie sich durch Rechnung ergibt⁴⁾, ist $\tau = 4$ und $(d^2 x)^2$ vom Typus I. *Die isotropen Kurven höherer als erster Art sind die Erzeugenden. Umgekehrt führt jede isotrope Torse erster Art vom Range 0 nach L_2 , S. 182–183 auf den Typus I.*

Ist $\sigma = 4$, so besteht zwischen den ersten und zweiten Ableitungen von x eine lineare homogene Gleichung

$$(6) \quad A x_u + B x_v + C x_{uu} + D x_{uv} + E x_{vv} = 0.$$

Ist diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für x parabolisch, so kann man sie bei passender Wahl von u und v in der Gestalt $x_{vv} = A x_u + B x_v$ voraussetzen. In den neu eingeführten Parametern sind daher die Kurven $u = \text{const.}$ Asymptotenlinien, *die Fläche ist gemäß (2) und (3) vom Typus I oder II.*

Wir betrachten zuerst den Fall des Typus I und denken uns u und v so gewählt, daß $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ ist. Die Differentialgleichung hat dann wieder die Form (6), wobei $D^2 - 4CE = 0$ ist. Multiplikation von (6) mit x_{uu} liefert daher wegen (2) und (3) $C = D = 0$. Differenzieren wir nun die Gleichung nach u und multiplizieren dann mit x_{uu} , so erhalten wir auch noch $A = 0$. Die Kurven $u = \text{const.}$ sind also Gerade, *die Fläche ist somit eine Regelfläche, aber wegen $\sigma = 4$ keine Torse.* Im folgenden soll unter Regelfläche immer eine solche verstanden werden, die keine Torse ist. *Die isotropen Kurven höherer als erster Art sind die Geraden der Fläche.* Nach § 3 liegt x_{uuu} nicht im S_2 , daher ist $\tau \geq 5$. Gemäß L_2 , S. 185 ist $\tau \leq 6$, also $5 \leq \tau \leq 6$.

Im Fall des Typus II denken wir uns u und v so gewählt, daß $a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ ist. Multiplikation von (6) mit x_{uu} bzw. x_{uv} gibt wegen (2) und (3) $C = D = 0$. Differenziert man jetzt die Gleichung nach u und multipliziert dann mit x_{vv} , so erhält man $A = 0$, *also wieder eine Regelfläche. Außer den Geraden gibt es hier noch eine zweite Schar von Kurven, die isotrop von höherer als erster Art sind.* Der S_2 wird von den Vektoren x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv} aufgespannt, weil wegen $A = C = D = 0$ x_{vv} proportional x_v ist. Nach § 3 liegen x_{uuu} und x_{uuv} nicht im S_2 , auch besteht keine lineare Abhängigkeit zwischen $x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{uuu}, x_{uuv}$, sonst würde die Multiplikation mit x_u wegen (3) und (4) $a_1 = 0$ ergeben. Es ist also $\tau = 6$.

⁴⁾ J. Lense, Monatshefte Math. Phys. 43 (1936), S. 177–186 (im folgenden mit L_2 bezeichnet), insbesondere S. 182–183.

§ 5.

Regelflächen.

Wir haben noch die Existenz derartiger Regelflächen nachzuweisen. Nach L_2 , S. 185 setzen wir $x = \eta(u) + v\zeta(u)$, wobei

$$(7) \quad \eta'^2 = \eta'\zeta' = \zeta'^2 = \eta'\zeta = \zeta^2 = 0$$

sein muß. Eine isotrope Regelfläche erster Art vom Rang 0 ist darnach vom Typus I oder II. $\eta''\zeta' = 0$ kennzeichnet den Typus I. Diese Gleichung können wir wegen $\eta'\zeta' = 0$ auch durch $\eta'\zeta'' = 0$ ersetzen. Im Falle I haben wir also die Gleichungen (7) in Verbindung mit $\eta'\zeta'' = 0$ zu lösen.

Dies kann in folgender Weise geschehen: Wir lösen zuerst nach L_1 , S. 143 die Gleichungen $\zeta^2 = \zeta'^2 = 0$, so daß ζ, ζ', ζ'' linear unabhängig sind, und mit dem so gewonnenen analytischen $\zeta = \zeta(u)$ die übrigen Gleichungen, nämlich

$$(8) \quad \eta'\zeta = \eta'\zeta' = \eta'\zeta'' = \eta'^2 = 0.$$

Die Möglichkeit, dieses System zu lösen, erkennen wir so: y_1, z, z_1, z_2 seien die Schnittpunkte der Richtungen der Vektoren $\eta', \zeta, \zeta', \zeta''$ mit dem uneigentlichen R_{n-1} des euklidischen R_n , in dem wir die Existenz der Regelfläche nachweisen wollen. A_{n-2}^2 sei die absolute quadratische Mannigfaltigkeit des R_n . Die Gerade $\zeta\zeta_1$ liegt auf der A_{n-2}^2 , weil $\zeta^2 = \zeta\zeta' = \zeta'^2 = 0$ ist, z_2 auf den Tangential- R_{n-2} von z und z_1 , weil $\zeta\zeta'' = \zeta'\zeta'' = 0$, daher auf ihrem durch die Gerade zz_1 gehenden Schnitt- R_{n-3} . Ebenso geht der Polar- R_{n-2} von z_2 durch diese Gerade, somit auch sein Schnitt- R_{n-4} mit dem eben genannten Schnitt- R_{n-3} . y_1 muß auf dem Schnittgebilde dieses R_{n-4} mit der A_{n-2}^2 liegen. Es ist eine quadratische Mannigfaltigkeit, welche die Gerade zz_1 enthält und deren Dimension mindestens $n-5$ beträgt. Ist daher $n=6$, so besteht diese Mannigfaltigkeit aus zwei Geraden, von denen eine zz_1 ist. Da y_1 zu z, z_1 und sich selbst konjugiert ist, muß es sowohl mit z als auch mit z_1 je auf einer Geraden liegen, daher auf der Geraden zz_1 . Sollen daher y_1, z, z_1, z_2 linear unabhängig sein, so muß $n \geq 7$ sein. Im R_7 kann man sonach die Gleichungen für festes u durch vier linear unabhängige Vektoren $\eta', \zeta, \zeta', \zeta''$ befriedigen, d. h. die Funktionaldeterminante bezüglich vier der Komponenten von η' ist für dieses feste u von Null verschieden. Durch (8) sind daher diese vier Komponenten von η' als analytische Funktionen der übrigen und der Komponenten von ζ, ζ', ζ'' definiert und damit ist nach dem Existenzsatz aus der Theorie der Differentialgleichungen die Existenz von η als analytische Funktion von u gesichert. Die Fläche ist keine Torse. Denn die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist die lineare Abhängigkeit der Vektoren η', ζ, ζ' , weil dann und nur dann die Tangentialebene von v nicht abhängt. Daraus folgt wegen (7) und (8) $\eta''\zeta' = 0$, d. h. in Hinblick auf die

eben nachgewiesene Existenz von Regelflächen mit dieser Eigenschaft ist die Bedingung $\eta'' \zeta' = 0$ für isotrope Torsen erster Art vom Rang 0 notwendig, aber nicht hinreichend.

Die Existenz von Regelflächen des Typus II, also mit $\eta'' \zeta' \neq 0$, wurde schon L_2 , S. 185–186 nachgewiesen. Man hat nur in den eben durchgeführten Betrachtungen die Bedingung $\eta' \zeta'' = 0$ wegzulassen. Solche Regelflächen sind für $n \geq 6$ möglich.

§ 6.

Flächen mit zwei Scharen konjugierter Kurven.

Ist die Differentialgleichung (6) nicht parabolisch, so kann man sie bei passender Wahl von u und v in der Gestalt

$$(9) \quad x_{uv} = A x_u + B x_v$$

voraussetzen. Die Parameterlinien sind also konjugiert, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, der Typus ist somit I oder Vh, je nachdem ob eine der beiden Größen a_0 und a_4 verschwindet oder beide von Null verschieden sind. Indem wir gegebenenfalls u mit v vertauschen, können wir immer $a_0 \neq 0$ voraussetzen.

Umgekehrt führt eine isotrope Fläche erster Art vom Rang 0 mit zwei Scharen konjugierter Kurven immer auf diese Differentialgleichung und damit auf Typus I oder Vh. Die beiden Fälle sind dadurch voneinander geschieden, daß bei I eine Schar von isotropen Kurven höherer als erster Art vorhanden ist (sie ist eine der beiden Scharen konjugierter Kurven), bei Vh dagegen vier Scharen solcher Kurven, von denen durch jeden Flächenpunkt vier gehen, deren Richtungen harmonisch liegen und die sich so in zwei Paare anordnen lassen, daß jedes Paar gleichzeitig von den beiden durch den Punkt gehenden konjugierten Kurven harmonisch getrennt wird.

Der S_2 wird wegen (9) von den Vektoren x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv} aufgespannt, x_{uv} und x_{vv} liegen im S_2 , x_{uu} dagegen nicht nach § 3 und im Falle Vh auch x_{vv} nicht. In diesem Falle ist auch eine lineare Abhängigkeit zwischen $x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}, x_{uv}, x_{vv}$ unmöglich, weil man sonst durch Multiplikation mit x_u und x_v nach (3) und (4) $a_0 = a_4 = 0$ erhalten würde. Es ist daher bei I $5 \leq \tau \leq 6$, bei Vh $\tau = 6$.

Beispiele für derartige Flächen liefern die Schiebflächen $x = \eta(u) + \zeta(v)$ mit $\eta'^2 = \eta' \zeta' = \zeta'^2 = 0$ (L_2 , S. 186). Ist dabei $\eta''^2 \neq 0, \zeta''^2 = 0$, so hat man den Typus I, ist dagegen $\eta''^2 \neq 0, \zeta''^2 \neq 0$, den Typus Vh. Will man z. B. den Fall I im R_7 verwirklichen, so nimmt man für η eine isotrope Kurve erster Art in einem euklidischen R_3 und für ζ eine Kurve einer vollisotropen Ebene in einem zu diesem R_3 senkrechten euklidischen R_4 .

§ 7.

Fallunterscheidungen im R_σ .

Der Normalraum des S_2 ist ein $R_{n-\sigma}$, er enthält zufolge (3) x_u und x_v , also ist $n \geq \sigma + 2$. Es ergibt sich daher gemäß § 3 bis 6:

1. $n = 4$, $\sigma = 2$, die Fläche ist eine Ebene.

2. $n = 5$. Es ist auch $\sigma = 3$ (Torse) möglich. Nichtebene Flächen in vollisotropen R_3 sind hier unmöglich, weil derartige R_3 erst im euklidischen R_4 auftreten (L_1 , S. 153).

3. $n = 6$, $\sigma \leq 4$, daher sind für $k = 1$ nur die Typen I, II, Vh möglich. Im Falle I enthält der Normal- $R_{6-\sigma}$ des S_2 die Vektoren x_u , x_v , x_{uv} , x_{vv} , von denen mindestens $\sigma - 1$ linear unabhängig sind. Somit ist $6 - \sigma \geq \sigma - 1$ oder $\sigma \leq 3$. Man hat daher folgende Einteilung: Typus I, $\sigma = 3$, $\tau = 4$, Torsen; Typus II, $\sigma = 4$, $\tau = 6$, Regelflächen; Typus Vh, $\sigma = 4$, $\tau = 6$, Flächen mit zwei Scharen konjugierter Kurven.

Im Sinne der Gleichung (1) für $s = 3$ erhält man damit folgende Einteilung der Flächen des euklidischen R_3 bezüglich ihrer Abwickelbarkeit:

I, Torsen;

II, aufeinander abwickelbare Regelflächen, wobei die Erzeugenden in Erzeugende übergehen;

Vh, aufeinander abwickelbare Flächen, bei denen zwei Scharen konjugierter Kurven in ebensolche übergehen. Durch jeden Flächenpunkt gehen vier Kurven, deren Krümmungen bei der Abwicklung erhalten bleiben. Ihre Tangenten liegen harmonisch und lassen sich so in Paare anordnen, daß jedes Paar von den Tangenten der beiden durch den betreffenden Flächenpunkt gehenden konjugierten Kurven harmonisch getrennt wird⁵⁾.

4. $n = 7$. Hier ist zum ersten Male $\sigma = 5$ möglich. Um zur vollen Fallunterscheidung hinsichtlich der sieben Typen zu gelangen, sind noch einige Vorarbeiten zu leisten.

§ 8.

Hilfssätze für den R_7 .

Wir betrachten im euklidischen R_7 das Quadrat der aus den Komponenten der sieben Vektoren x_u , x_v , x_{uu} , x_{uv} , x_{vv} , u , v , (u , v beliebige Vektoren)

⁵⁾ A. Voss, Math. Annalen 46 (1895), S. 97—132.

gebildeten Determinante D . Man erhält für dieses Quadrat zufolge (2) und (3)

$$D^2 = \begin{vmatrix} x_u u & x_u v \\ x_v u & x_v v \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Für beliebige u und v ist D dann und nur dann Null, wenn die fünf Ableitungen erster und zweiter Ordnung des Kurvenvektors linear abhängig sind, d. h. es ist $\sigma \leq 4$, wenn

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

verschwindet und umgekehrt. Das ist gemäß den in § 2 aufgestellten Normalformen gerade bei I, II, VI der Fall und sonst nicht.

Setzt man in D^2 für u die dritten Ableitungen von x ein und berücksichtigt (4), so erkennt man, daß sich der am Schluß von § 3 angegebene Satz im R_7 für $\sigma = 5$ umkehren läßt. Wählt man dagegen für u und v je ein Paar dieser dritten Ableitungen und setzt wieder $\sigma = 5$, also $A \neq 0$ voraus, so erhält man für den R_7 folgendes Ergebnis: Wenn x_{uuu} und x_{uvv} zusammen mit den Ableitungen erster und zweiter Ordnung höchstens einen R_6 aufspannen, so ist $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$ und umgekehrt. Ersetzt man in diesem Satz das Paar x_{uuu}, x_{uvv} der Reihe nach durch die Paare $x_{uuu}, x_{uvv}; x_{uuu}, x_{vvv}; x_{uuu}, x_{vvv}; x_{uuu}, x_{vvv}; x_{uuu}, x_{vvv}; x_{uuu}, x_{vvv}; x_{uuu}, x_{vvv}$; so treten an die Stelle von $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$ die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

§ 9.

Fallunterscheidungen im R_7 .

Jetzt sind alle Hilfsmittel vorbereitet, um die im R_7 auftretenden Fälle zu untersuchen. Wir legen für die einzelnen Typen die in § 2 angegebenen Normalformen von $(d^2 x)^2$ zugrunde.

Typus I. Für $\sigma = 3$ ist die Fläche nach § 4 eine Torse, daher $\tau = 4$. Wenn $\sigma = 4$ ist, haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

$\alpha)$ S_2 wird aufgespannt von x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv} . Nach § 3 liegt x_{uuu} nicht im S_2 , wohl aber liegen $x_{uuv}, x_{uvv}, x_{vvv}$ im S_2 . Der Beweis dafür ergibt sich sofort, wenn man analog wie in § 8 nach (2), (3), (4), (5) das Quadrat der aus den Komponenten der sieben Vektoren $x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, u, v, w$ gebildeten Determinante berechnet und der Reihe nach $w = x_{uuv}, x_{uvv}, x_{vvv}$ setzt. Es ist also $\tau = 5$.

$\beta)$ S_2 wird aufgespannt von x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv} . Ähnlich wie im Fall $\alpha)$ ergibt sich, daß x_{uuu} nicht im S_2 liegt, wohl aber die Vektoren $x_{uuv}, x_{vvv}, x_{vvv}$, also wieder $\tau = 5$.

$\gamma)$ S_2 wird aufgespannt von x_u, x_v, x_{uv}, x_{vv} . x_{uu} hängt daher linear von diesen vier Vektoren ab, man erhält also nach (2) und (3) $a_0 = 0$, d. h. dieser Fall ist unmöglich.

Nach § 4 sind die Flächen für $\sigma = 4$ Regelflächen oder sie enthalten zwei Scharen von konjugierten Kurven. Ihre Existenz wurde in § 5 und 6 nachgewiesen.

$\sigma = 5$ ist nach § 8 unmöglich.

Typus II. Nach § 4 und 8 ist $\sigma = 4$, $\tau = 6$, die Fläche ist eine Regelfläche. Über die Existenz derartiger Flächen vgl. § 5.

Typus III. Nach § 8 ist $\sigma = 5$, x_{uuu} und x_{vvv} liegen im S_2 , d. h. die Schmieg- R_3 der Parameterkurven liegen im S_2 , x_{uuv} und x_{vvv} liegen nicht im S_2 und es besteht auch keine lineare Abhängigkeit zwischen diesen Vektoren und den Ableitungen erster und zweiter Ordnung, daher ist $\tau = 7$. Wir wollen eine Flächenkurve, deren Schmieg- R_3 in den S_2 der Fläche liegen, nach Bompiani eine Quasiasymptotenlinie nennen (B, S. 286–287). Die Flächen des Typus III enthalten also mindestens zwei Scharen von Quasiasymptotenlinien. Diese Eigenschaft kennzeichnet bei $\sigma = 5$ den Typus III. Denn wenn zwei derartige Scharen vorhanden sind, können wir sie als Parameterkurven einführen und erhalten nach § 3 $a_0 = a_1 = a_3 = a_4 = 0$. Die isotropen Kurven höherer als erster Art sind diese Asymptotenlinien. Ein Beispiel für diesen Typus findet sich bei P, S. 217–221.

Typus IV. Ähnlich wie im Fall III ergibt sich $\sigma = 5$, x_{vvv} liegt im S_2 , $x_{uuu}, x_{uuv}, x_{vvv}$ nicht, $\tau = 7$. Die Fläche enthält genau eine Schar von Quasiasymptotenlinien, und diese Eigenschaft kennzeichnet bei $\sigma = 5$ den Typus IV. Die isotropen Kurven höherer als erster Art bestehen aus dieser Schar und noch aus zwei anderen Scharen. Ein Beispiel für diesen Typus findet sich bei P, S. 221–222.

Typus V. Bei harmonischem Doppelverhältnis (Typus $V\lambda$) ist nach § 6 und 8 $\sigma = 4$, $\tau = 6$, die Fläche enthält zwei Scharen konjugierter Kurven. Über die Existenz derartiger Flächen vgl. § 6.

Bei nicht harmonischem Doppelverhältnis ist nach § 8 $\sigma = 5$, die dritten Ableitungen des Kurvenvektors liegen nicht im S_2 , $\tau = 7$. Es gibt keine Quasiasymptotenlinien, und diese Eigenschaft kennzeichnet bei $\sigma = 5$ diesen Fall. Beispiele für solche Flächen bei P, S. 222–227.

Zusammenstellung der für die isotropen Flächen erster Art vom Rang 0 im euklidischen R_7 kennzeichnenden Eigenschaften.

Typus	Dimension von		Kennzeichnende Eigenschaften
	S_2	S_3	
I	3	4	Torsen
	4	5	Regelflächen
	4	5	Zwei Scharen konjugierter Kurven
II	4	6	Regelflächen
III	5	7	Zwei Scharen von Quasiasymptotenlinien
IV	5	7	Eine Schar von Quasiasymptotenlinien
V	4	6	Zwei Scharen konjugierter Kurven
	5	7	Allgemeiner Fall, keine Quasiasymptotenlinien

§ 10.

Mannigfaltigkeiten von der Dimension m .

In L_2 , S. 177–180 habe ich ein Verfahren angegeben, wonach man die allgemeinste isotrope Fläche vom Rang 0 im euklidischen R_n bestimmen kann. Darnach hängt eine solche Fläche von $n - 5$ willkürlichen Funktionen von zwei Veränderlichen ab. Dieses Verfahren wurde von M. Pinl in der in Fußnote ²⁾ erwähnten Arbeit benutzt, um Beispiele verschiedener Arten solcher Flächen aufzustellen. Es ist nicht ohne weiteres ersichtlich, ob man in ähnlicher Weise die allgemeinste isotrope Mannigfaltigkeit vom Rang 0 und höherer Dimensionszahl m bestimmen kann. Doch führt hier ein anderer Gedankengang zum Ziel. Wir wählen in Gleichung (1) $\bar{x} = \bar{x}(u_1, u_2, \dots, u_m)$ beliebig. Dann ist \bar{x} so zu bestimmen, daß $d\bar{x}^2 = -d\bar{x}^2$ ist, wobei jetzt $-d\bar{x}^2$ eine bekannte quadratische Differentialform in den Veränderlichen u_1, u_2, \dots, u_m ist. Das ist aber nach dem sogenannten Einbettungssatz³⁾

³⁾ M. Janet, Ann. Soc. Polonaise Math. 5 (1927), S. 38–43; E. Cartan, Ann. Soc. Polonaise Math. 6 (1928), S. 1–7.

bei willkürlichem \bar{x} immer möglich, wenn $s \geq \frac{m(m+1)}{2}$ ist. Bei der Bestimmung von \bar{x} bleiben, wenn $s = \frac{m(m+1)}{2}$ ist, noch m Funktionen von $m-1$ Veränderlichen willkürlich. Da man m von den $n-s$ willkürlichen Komponenten von \bar{x} durch passende Wahl der Parameter u_1, u_2, \dots, u_m normieren kann, hängt die allgemeinste m -dimensionale isotrope Mannigfaltigkeit vom Rang 0 im euklidischen R_n von $n - \frac{m(m+3)}{2}$ willkürlichen Funktionen von m Veränderlichen ab. Für $m=2$ ergibt sich die obengenannte Zahl $n-5$. Gleichzeitig sieht man, daß diese Zahl von willkürlichen Funktionen erst bei $n \geq \frac{m(m+3)}{2}$ auftreten kann.

(Eingegangen am 25. 5. 1938.)

Differential Invariants in a General Differential Geometry¹⁾.

Von

Aristotle D. Michal und Donald H. Hyers in Pasadena (Cal., USA.).

Introduction.

The study of general differential geometries in which the "geometric space" is a Hausdorff topological space²⁾, while the "coordinate space" is a Banach space³⁾, has been initiated recently by one of us⁴⁾. The theory includes as special cases not only the finite dimensional but also the infinite dimensional⁵⁾ Riemannian and Non-Riemannian geometries.

Partly because of the formidable nature of the calculations in both the finite and infinite dimensional differential invariant theories, special coordinate systems known as normal coordinates⁶⁾ play an important role in these theories.

In a general differential geometry with Banach coordinates, a coordinate system $x(P)$ is a homeomorphism mapping a Hausdorff neighborhood of the geometric space H onto an open subset of a fixed open set S of the Banach space E , where S is itself the map of some Hausdorff neighborhood by some coordinate system $x_0(P)$. The value of the function $x(P)$ will be called the coordinate of the point $P \in H$. The intersection of two Hausdorff neighborhoods induces a homeomorphism $\bar{x} = \bar{x}(x)$, called a coordinate transformation, taking an open subset of S into an open subset of S .

¹⁾ Presented to the American Math. Soc., Sept. 1936 and Nov. 1936. See Abstracts 348 and 456, Bulletin of Am. Math. Soc. 42 (1936), p. 631 and p. 822.

²⁾ Alexandroff and Hopf [1].

³⁾ Banach [1]. A Banach space, called space B by Banach, is briefly a complete normed linear vector space with real number multipliers.

⁴⁾ Michal [1], [2], [3], [6], [7].

⁵⁾ For the initial paper, see Michal [5]. See also Michal [4], [2]; Michal and Hyers [1].

⁶⁾ Normal coordinate systems in the classical Riemannian geometry were first considered by Riemann himself. See Riemann [1].

For geometries with a linear connection⁷⁾, the paths in an arbitrary coordinate system $x(P)$ satisfy the "ordinary" differential equation⁸⁾

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \Gamma\left(x, \frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

where $\Gamma(x, \xi_1, \xi_2)$ is the component of the linear connection in the coordinate system $x(P)$, s is a real variable, and the limits $\frac{dx}{ds}$ and $\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right)$ are taken according to the Banach norm⁹⁾.

A coordinate system $y(P)$ in which the equation of any path through a point P_0 , with coordinate $y = 0$ (the zero element of E), takes the form $y = s\xi$, where ξ is a constant element of E , is called a normal coordinate system with center P_0 . Normal coordinates in a general differential geometry have been introduced and studied by us in a recent paper¹⁰⁾, in which the existence of normal coordinate systems were proved under suitable Fréchet differentiability conditions on the coordinate transformations and on the linear connection. The properties of normal coordinate systems were investigated, and then applied to obtain fundamental sets of differential invariants of the linear connection, in terms of which all differential invariants of a certain general type could be expressed. Covariant differentials and higher extensions (not to be confused with successive covariant differentials) of contravariant vector fields depending multilinearly on a set of contravariant vectors were also discussed by means of normal coordinate methods.

The concept of a *covariant* vector does not enter into the theory in MH. In fact, an absolute calculus employing the notion of a covariant as well as of a contravariant vector (as considered by one of us, see Michal [1]) requires not only that the coordinate space E be an "abstract Euclidean space"¹¹⁾, i. e. a Banach space with an inner product, but also that the differentials of the coordinate transformations have adjoints as linear functions of each increment. In order then to treat differential invariants in a general

⁷⁾ Michal [3]. $\Gamma(x, \xi_1, \xi_2)$, the component of the linear connection in the coordinate system $x(P)$, is a function with arguments and values in the Banach space E , bilinear in ξ_1, ξ_2 , while the component in any other coordinate system is obtained from transformation law (4.1) of § 4 below.

⁸⁾ For the Euler-Lagrange equations in n dimensions see Carathéodory [1].

⁹⁾ For example, the well known Hilbert space of L^2 functions forms a Banach space, in which convergence according to the norm reduces to convergence in the mean. See Banach [1] for this and other examples of a Banach space.

¹⁰⁾ Michal and Hyers [2]. Henceforth we shall refer to this paper by the initials MH.

¹¹⁾ Michal-Highberg-Taylor [1]. See also § 1 below. A Hilbert space is a very special abstract Euclidean space in which the norm $\|x\|$ and inner product $[x, y]$ are related by the simple formula $\|x\| = [x, x]^{\frac{1}{2}}$. For the theory of Hilbert space see Stone [1] and Hilbert [1].

geometry involving both covariant and contravariant vectors, it is clear that the theory in MH must be considerably modified and extended. One of the most difficult new problems, though trivial when E is *finite* dimensional, is to prove the existence and differentiability of the adjoints of the differentials of the transformation to normal coordinates.

The first three sections of the present paper are concerned with certain functional transformations and "adjoint differential equations" in an abstract Euclidean space E , which is not yet conditioned by being a coordinate space for a Hausdorff topological space. Section 1 is introductory, furnishing needed theorems on adjoints. In section 2, the properties of a class $k^{(m)}$ of Fréchet differentiable transformations are discussed (see Definition 2.1), with a view to their use in sections 4–8 as coordinate transformations for the differential geometry. Section 3 is devoted to the proof of the fundamental existence and differentiability Theorem 3.1 for the new type of functional equation (3.3) satisfied by the adjoint of the differential of the solution of the differential system (3.1).

In the remaining sections of the paper, we give the elements of the geometry of a Hausdorff space H with a linear connection in which *both* covariant and contravariant vectors play a role. Here, H is required to have an abstract Euclidean space E as a coordinate space. The results of the first three sections are applied together with some of those of MH to obtain a theory of normal coordinates and of differential invariants in such a geometry. Section 4 is concerned with the postulates for the geometry and with the proof of Theorem 4.2 on the existence of normal coordinate systems. In section 5 we discuss fields of scalars, covariant vectors and contravariant vectors which depend multilinearly on covariant and contravariant vectors. The covariant differentials and extensions (See Definition of § 6) of these forms are considered in § 6. Section 7 deals with the extensions of the linear connection and its adjoints, in terms of which a replacement theorem for differential invariants is given thus extending the replacement theorem of MH. An example satisfying the postulates of our geometry, in which the coordinate space E is the well known infinite dimensional Euclidean space of continuous functions, is considered briefly in section 8. Numerous other examples will occur to the reader.

Throughout the paper we make free use of known¹²⁾ methods and results on Fréchet differentials and functional equations in Banach spaces.

¹²⁾ Fréchet [1], Hildebrandt and Graves [1], Kerner [1], Michal and Hyers [1], [2], Michal [2]. For further references see MH.

Generalizations of our studies are possible in various directions. For example one could consider two Banach coordinate spaces B_1 and B_2 , with an inter-space inner product¹³⁾, where the components of contravariant vectors lie in B_1 while those of covariant vectors lie in B_2 .

§ 1.

Adjoint and Differentials in an Abstract Euclidean Space.

The theory of general covariant vector fields as developed by one of us¹⁴⁾ requires that the coordinate space E be a Banach space subject to the following additional postulates¹⁵⁾:

- (a) There exists a bilinear¹⁶⁾ function $[x, y]$ on E^2 to the real numbers.
- (b) $[x, y] = [y, x]$.
- (c) $[x, y] = 0$ for all $x \in E$ implies $y = 0$.

For completeness we include the definition of the adjoint of a linear function.

Definition 1.1. A function $T^*(\xi)$ on E to E will be said to be the adjoint of a linear function $T(\xi)$ on E to E if

- (1) $T^*(\xi)$ is a linear function
- (2) $[T(\xi), \eta] = [\xi, T^*(\eta)]$ for all $\xi, \eta \in E$.

Let $F(x_1, \dots, x_n)$ be linear in the i th place. Then the adjoint, if it exists, of F as a linear function of x_i will be denoted by $F_{(i)}^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ or simply $F^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ whenever the i th place is clear from the context.

The following properties of adjoints of linear functions follow readily from the definition and well known theorems:

- (1) The adjoint if it exists is unique.
- (2) If $L_1(\xi), L_2(\xi)$ have adjoints $L_1^*(\xi), L_2^*(\xi)$, then $\{L_1(L_2(\xi))\}^*$ exists equal to $L_2^*(L_1^*(\xi))$; $(a_1 L_1(\xi) + a_2 L_2(\xi))^*$ exists equal to $a_1 L_1^*(\xi) + a_2 L_2^*(\xi)$.
- (3) If $L(\xi)$ has an adjoint $L^*(\xi)$ then $(L^*(\xi))^*$ exists equal to $L(\xi)$.

¹³⁾ Compare with Michal [2] and [6].

¹⁴⁾ Michal [1]. By the phrase " $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on $S_1 S_2 \dots S_n$ to Σ " we shall mean that the argument x_i of the function f ranges over the entire set S_i and that the values of f form a subset of Σ , proper or not. If $S_1 \equiv S_2 \equiv \dots \equiv S_n \equiv S$ then we shall write S^n in the place of $SS \dots S$.

¹⁵⁾ A Banach space subject to conditions (a) and (b) is called an abstract Euclidean space. See Michal-Highberg-Taylor [1] part II.

¹⁶⁾ By a multilinear function $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ we mean that F is additive and continuous in each ξ_i .

(4) Let $L_i(\xi)$ be a sequence of linear functions converging to a limit function $L(\xi)$, and let $L_i^*(\xi)$ exist for each i . If the sequence $L_i^*(\xi)$ converges to a limit function $M(\xi)$ then $L^*(\xi)$ exists equal to $M(\xi)$.

Theorem 1.1. *Let $L(\xi)$ be a solvable linear function with an adjoint $L^*(\xi)$. Then if one of the functions $(L^{-1}(\xi))^*$, $(L^*(\xi))^{-1}$ exists the other does also, and the two are equal.*

Proof. If $(L^{-1}(x))^*$ exists we have

$$\begin{aligned} [L^{-1}(x), y] &= [x, (L^{-1}(y))^*], \\ &= [L(L^{-1}(x)), (L^{-1}(y))^*], \\ &= [L^{-1}(x), L^*((L^{-1}(y))^*)]. \end{aligned}$$

Hence by postulate (c),

$$y = L^*((L^{-1}(y))^*).$$

Similarly

$$y = \{L^{-1}(L^*(y))\}^*$$

so that $(L^*(x))^{-1}$ exists equal to $(L^{-1}(x))^*$. A similar method may be used to prove the converse part of the theorem.

Theorem 1.2. *Let $L(x, \lambda)$ be linear in λ , differentiable in x , and suppose that $L^*(x, \lambda)$ exists differentiable in x . Then $L_{(1)}^*(x, \lambda; \delta x)$ exists equal to $\delta_x L^*(x, \lambda)$. If in addition $L(x, \lambda; \mu)$ is symmetric in λ and μ , then $L_{(2)}^*(x, \lambda; \mu)$ exists and*

$$L_{(2)}^*(x, \lambda; \mu) = L_{(2)}^*(x, \mu; \lambda).$$

§ 2.

Transformations of Class $k^{(m)}$.

In the subsequent theory of covariant vector forms the coordinate transformations must be such that their Fréchet differentials possess adjoints. We shall therefore introduce a sub-class $k^{(m)}$ of the class $K^{(m)}$ of transformations (cf. MH, § 2).

For completeness we first give a short discussion concerning functions of class $C^{(m)}$ locally uniformly and transformations of class $K^{(m)}$. A function $F(x)$ is said to be of class $C^{(m)}$ locally uniformly at x_0 if there exists a neighborhood of x_0 on which $F(x)$ is of class $C^{(m)}$ uniformly¹⁷. A function $F(x, \xi_1, \dots, \xi_r)$, multilinear in ξ_1, \dots, ξ_r , is said to be of class $C^{(m)}$ locally uniformly at x_0 if there exists a neighborhood X of x_0 such that $F(x, \xi_1, \dots, \xi_r)$ is of class $C^{(m)}$ uniformly on $X \Xi^r$, where Ξ is the open set $\|\xi\| < 1$.

¹⁷ Hildebrandt and Graves [1].

The following characterization of functions of class $C^{(m)}$ locally uniformly is given in Theorem 2.2 of MH. *A necessary and sufficient condition for a function $F(x, \xi_1, \dots, \xi_r)$, multilinear in ξ_1, \dots, ξ_r , to be of class $C^{(m)}$ locally uniformly at x_0 is that there exist a neighborhood X of x_0 such that the m th successive Fréchet differential in x $F(x, \xi_1, \dots, \xi_r; \delta_1 x; \dots, \delta_m x)$ with increments $\delta_1 x, \dots, \delta_m x$ exists, continuous in x uniformly with respect to its entire set of arguments for $x \in X$, $\xi_i \in \Xi$, $\delta_i x \in \Xi$, where Ξ is the neighborhood $\|\xi\| < 1$.*

It was pointed out by one of us¹⁸⁾ elsewhere that

$$F(x, \xi_1, \dots, \xi_r; \delta_1 x; \dots; \delta_m x)$$

is multilinear in $\xi_1, \dots, \delta_m x$. Hence by using the well known formula

$$\begin{aligned} F(x + \delta x, \xi_1, \dots, \xi_r; \delta_1 x; \dots; \delta_m x) - F(x, \xi_1, \dots, \xi_r; \delta_1 x; \dots; \delta_m x) \\ = \int_0^1 F(x + \sigma \delta x, \xi_1, \dots, \xi_r; \delta_1 x; \dots; \delta_m x; \delta x) d\sigma \end{aligned}$$

and a theorem¹⁹⁾ on the modulus of a multilinear function depending on a parameter, we readily obtain the following corollary.

If a function $F(x, \xi_1, \dots, \xi_r)$, multilinear in ξ_1, \dots, ξ_r , has an $(m+1)$ st Fréchet differential in x which is continuous at a point x_0 , then $F(x, \xi_1, \dots, \xi_r)$ is of class $C^{(m)}$ locally uniformly at x_0 .

Let $\bar{x} = \bar{x}(x)$ be a biunivocal transformation taking an open set of our abstract Euclidean space E into an open set of E . Then, if the function $\bar{x}(x)$ and its inverse $x(\bar{x})$ are of class $C^{(m)}$ locally uniformly at each point of their respective domains, we shall say that $\bar{x} = \bar{x}(x)$ is a transformation of class $K_{(m)}$.

A necessary and sufficient condition that a regular²⁰⁾ transformation $\bar{x} = \bar{x}(x)$ be of class $K^{(m)}$ is that the function $\bar{x}(x)$ be of class $C^{(m)}$ locally uniformly at each point of its domain. For the proof of this result see Theorem 2.4 of MH.

Definition 2.1. *A transformation of class $K^{(m)}$ carrying an open set $S_1 \subset E$ into an open set $S_2 \subset E$ will be said to be of class $k^{(m)}$ if the following conditions are satisfied*

- (1) *the differential $\bar{x}(x; \delta x)$ has an adjoint $\bar{x}^*(x; \delta x)$.*
- (2) *$\bar{x}^*(x; \delta x)$ is of class $C^{(m-1)}$ locally uniformly at each $x \in S_1$.*
- (3) *For each $x \in S_1$, $\bar{x}(x; \delta x)$ is a solvable linear function of δx .*

¹⁸⁾ Michal [2].

¹⁹⁾ Kerner [1].

²⁰⁾ A transformation is called regular if it is biunivocal, and if the transformation and its inverse are Fréchet differentiable throughout their domains.

The following lemma is a consequence of Definition 2.2 of MH and a known result²¹⁾ on the class of a composite function.

Lemma. *Let $f(x)$ and $F(y)$ be of class $C^{(m)}$ locally uniformly at x_0 and y_0 respectively, where $y_0 = f(x_0)$, and the arguments and values of the functions are in Banach spaces. Then the composite function $F(f(x))$ is of class $C^{(m)}$ locally uniformly at x_0 .*

Theorem 2.1. *The inverse of a transformation of class $k^{(m)}$ is also of class $k^{(m)}$*

Proof. From Definition 2.1 and Theorem 1.1 the adjoint $x^*(\bar{x}; \delta \bar{x})$ exists and is equal to the inverse of the solvable linear function $\bar{x}^*(x; \delta x)$. Since $\bar{x}^*(x; \delta x)$ is of class $C^{(m-1)}$ locally uniformly at each $x \in S_1$, it follows from a known result²²⁾ that the inverse function $x^*(\bar{x}(x); \lambda)$ is also of class $C^{(m-1)}$ locally uniformly at each $x \in S_1$. Hence by the lemma, $x^*(\bar{x}; \delta \bar{x})$ is of class $C^{(m-1)}$ locally uniformly at each $\bar{x} \in S_2$. This proves the theorem.

It follows from the above lemma and the elementary properties of adjoints given in § 1 that the resultant, if it exists, of two transformations of class $k^{(m)}$ is also of class $k^{(m)}$. Hence by Theorem 2.1, the totality of transformations of class $k^{(m)}$ forms a pseudo group²³⁾.

§ 3.

An Existence Theorem for a Functional Equation.

The transformation $y = h(p, x)$ to normal coordinates y has already been shown²⁴⁾ to be of class $K^{(n)}$, if the linear connection is of class $C^{(n)}$. In order to use normal coordinates in the theory of forms in covariant vectors²⁵⁾, we need to show that $y = h(p, x)$ is indeed of class $k^{(n)}$. This will be done in § 4 on the basis of Theorem 3.1 below.

Let $\Gamma(x, \xi, \eta)$ be a function with arguments and values in E which is bilinear and symmetric²⁶⁾ in ξ, η , and is of class $C^{(n)}$ locally uniformly at

²¹⁾ See p. 144 of Hildebrandt and Graves [1].

²²⁾ Cf. Lemma 16.3, p. 147 of Hildebrandt and Graves [1].

²³⁾ We take over to our space E the definition of a pseudo group given in Veblen and Whitehead (1), p. 37—38.

²⁴⁾ MH, Theorem 3.1.

²⁵⁾ For definition see § 5; or Michal [1].

²⁶⁾ The changes necessary in the theory when $\Gamma(x, \xi, \eta)$ is not symmetric are evident.

a point x_0 . The results of sections 1 and 3 of MH tell us that the solution²⁷⁾ $x = \mu(s, \xi, p)$ of the differential system

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{ds^2} + \Gamma\left(x, \frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds}\right) = 0, \\ x(0) = p, \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = \xi \end{cases}$$

is of class $C^{(n)}$ uniformly in ξ, p on $Y_0 X_0$. The first differential $\mu(s, \xi, p; \lambda)$ is the unique solution of the linear "variational" system (Use (4.11) of MH)

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 z}{ds^2} + \Gamma(\mu, \mu', \mu'; z) + 2\Gamma\left(\mu, \frac{dz}{ds}, \mu'\right) = 0, \\ z(0, \lambda) = \lambda, \left(\frac{dz(s, \lambda)}{ds}\right)_{s=0} = -\Gamma(p, \lambda, \xi), \end{cases}$$

where

$$\mu' = \frac{d\mu(s, \xi, p)}{ds}$$

and is of class $C^{(n-1)}$ uniformly in ξ, p on $Y_0 X_0$. If Γ and its first differential have adjoints, one is led to the consideration of the "adjoint" system

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 z^*}{ds^2} + z^*(s, \Gamma_{(s)}^*(\mu, \mu', \mu'; \lambda)) + 2\left[\frac{d}{ds} z^*(s, \Gamma_{(s)}^*(\mu, \lambda, \mu'))\right]_{s=0} = 0, \\ z^*(0, \lambda) = \lambda, \left(\frac{dz^*(s, \lambda)}{ds}\right)_0 = -\Gamma_{(s)}^*(p, \lambda, \xi). \end{cases}$$

Theorem 3.1. Let X be a neighborhood of a point x_0 of the space E and let $\Gamma(x, \xi, \eta)$ be a function on XE^2 to E bilinear and symmetric in ξ, η and satisfying the following conditions:

- (i) $\Gamma(x, \xi, \eta)$ is of class $C^{(n)}$ uniformly on²⁸⁾ $XE^2((0)_1)$;
- (ii) The adjoint $\Gamma_{(s)}^*(x, \xi, \eta)$ exists and is of class $C^{(n)}$ uniformly on $XE^2((0)_1)$;
- (iii) The adjoint $\Gamma_{(s)}^*(x, \xi, \eta; \lambda)$ exists and is of class $C^{(n-1)}$ uniformly on $XE^2((0)_1)$.

Let $Y_0 X_0$ be the ξ, p range of definition of the solution (known to exist by Theorem 1.1 of MH) of differential system (3.1).

Then the "adjoint differential system" (3.3) has a unique solution

$$z^* = \psi(s, \xi, p, \lambda),$$

which is of class $C^{(n-1)}$ in ξ, p, λ uniformly on $Y_0 X_0 E((0)_1)$ for each s in I , where I is the interval $0 \leq s \leq 1$. Furthermore the adjoint $\mu_{(s)}^*(s, \xi, p; \lambda)$ of the solution $\mu(s, \xi, p; \lambda)$ of the differential system (3.2) exists equal to $\psi(s, \xi, p, \lambda)$.

²⁷⁾ We have written $\mu(s, \xi, p)$ in the place of $f(p, s, \xi)$ of MH in order to be able to use the notations for Fréchet differentials. See § 1 of MH.

²⁸⁾ As in previous papers we denote the neighborhood $\|x - a\| < \varepsilon$ lying in a set S by $S((a), \varepsilon)$.

Proof. Let ξ, p be any chosen point of $Y_0 X_0$ and write

$$(3.4) \quad \begin{cases} F(s, \lambda) = \Gamma(\mu, \mu', \mu'; \lambda), \\ G(s, \lambda) = \Gamma(\mu, \lambda, \mu'), \\ w(s, \lambda) = \frac{dz(s, \lambda)}{ds}, \end{cases}$$

with these notations the differential system (3.2) and (3.3) can be written respectively in their equivalent integral forms

$$(3.5) \quad \begin{cases} z(s, \lambda) = \lambda + \int_0^s w(t, \lambda) dt, \\ w(s, \lambda) = -\Gamma(p, \lambda, \xi) + \int_0^s \{F(t, z(t, \lambda)) + 2G(t, w(t, \lambda))\} dt, \end{cases}$$

and

$$(3.6) \quad \begin{cases} z^*(s, \lambda) = \lambda + \int_0^s w^*(t, \lambda) dt, \\ w^*(s, \lambda) = -\Gamma_{(2)}^*(p, \lambda, \xi) + \int_0^s \{z^*(t, F^*(t, \lambda)) + 2w^*(t, G^*(t, \lambda))\} dt. \end{cases}$$

We shall now show that the integral system (3.6) can be considered as a system of linear integral equations in a Banach space of linear functions. Let $L_1(\lambda)$ and $L_2(\lambda)$ be any two linear functions on E to E , and define the functional transformation

$$H_{\sigma\tau} [L_1(\sigma), L_2(\tau)] \equiv L_1(L_2(\lambda))$$

so that H is a linear function of λ . If we introduce the Banach space B_1 of linear functions on E to E , with the norm of an element L defined as the modulus of the linear function $L(\lambda)$, then $H(L_1, L_2)$ is a bilinear function on B_1^2 to B_1 . In the new space B_1 we may write the system (3.6) in the form

$$(3.7) \quad \begin{cases} z^*(s) = z_0 + \int_0^s w^*(t) dt, \\ w^*(s) = \omega_0 + \int_0^s \{H(z^*(t), F^*(t)) + 2H(w^*(t), G^*(t))\} dt, \end{cases}$$

where z_0, ω_0 are respectively the elements $L(\lambda) = \lambda$ and $L(\lambda) = -\Gamma_{(2)}^*(p, \lambda, \xi)$ of B_1 , and where for each s , $z^*(s)$ is the element $L(\lambda) = z^*(s, \lambda)$ of B_1 , etc.

Let B_2 be the Banach space²⁹⁾ of ordered pairs (u, v) , where u and v are elements of the space B_1 . System (3.7) may now be replaced by a single equation

$$(3.8) \quad \omega(s) = \omega_0 + \int_0^s K(t, \omega(t)) dt,$$

²⁹⁾ For similar constructions see Michal and Hyers [1], p. 653.

where

$$\omega_0 = (z_0, w_0), \quad \omega(s) = (z^*(s), w^*(s)),$$

and $K(t, \omega(t))$ is the ordered pair of functions

$$w^*(t), \quad H(z^*(t), F^*(t)) + 2H(w^*(t), G^*(t)).$$

By construction, it is clear that the equation (3.8) contains ξ and p as parameters which so far have played an unessential part. To emphasize this dependence we rewrite (3.8) in the more explicit form

$$(3.9) \quad \omega(s) = \omega_0(\xi, p) + \int_0^s K(t, \xi, p, \omega(t)) dt.$$

Obviously $K(t, \xi, p, \omega)$ is additive in ω . From definitions (3.4), the hypotheses of our theorem, and the fact that $\mu(s\xi, p)$ and $\mu'(s\xi, p)$ have their values in X and in $E((0)_1)$ respectively, it follows that there exists a constant N independent of t, ξ, p, ω such that

$$\|K(t, \xi, p, \omega)\| \leq N\|\omega\|$$

for $t \in I, \xi, p \in Y_0 X_0$. For convenience write α for the pair ξ, p . Since $K(t, \alpha, \omega)$ is linear in ω , (3.9) is an abstract Volterra integral equation of the second kind and has a unique continuous solution $\omega(t) = \Omega(t, \alpha, \omega_0)$ which is linear in ω_0 and satisfies the inequality

$$\|\Omega(t, \alpha, \omega_0)\| < e^{tN} \|\omega_0\|$$

so that $\Omega(t, \alpha, \omega_0)$ is uniformly modular for $t \in I$ and $\alpha \in Y_0 X_0$; i. e., the modulus of Ω as a linear function of ω_0 is bounded for these values of t and α .

Let B be the Banach space of continuous functions $f \equiv f(t)$ on I to the Euclidean space E . Here and in all similar constructions, the norm of B is defined by

$$\|f\| = \max_{t \in I} \|f(t)\|.$$

From the proof of theorem 1.1 of MH, the functions $\mu(s\xi, p)$ and $\mu'(s\xi, p)$, looked upon as elements of B for each $\xi, p \in Y_0 X_0$, are of class $C^{(n)}$ in ξ, p uniformly on $Y_0 X_0$. Therefore, from hypothesis (ii) and (iii) of our theorem, definitions (3.4) and from known results³⁰⁾ on the class of a function of a function, it follows that

$$f(\xi, p, \lambda) \equiv F^*(s, \lambda) \quad \text{and} \quad g(\xi, p, \lambda) \equiv G^*(s, \lambda),$$

as functions on $Y_0 X_0 E((0)_1)$ to B , are of class $C^{(n-1)}$ uniformly on $Y_0 X_0 E((0)_1)$.

³⁰⁾ Cf. the group of lemmas referred to at the bottom of page 144 of Hildebrandt and Graves [1].

If we introduce the Banach space B_3 of continuous functions on I to B_3 , the equation (3.9) takes the form

$$(3.10) \quad \omega = \omega_0(\alpha) + K_1(\alpha, \omega),$$

where

$$K_1(\alpha, \omega) = \int_0^t K(t, \alpha, \omega(t)) dt.$$

It is easily shown from the definition of $K(t, \alpha, \omega(t))$ in terms of $F^*(t, \lambda)$ and $G^*(t, \lambda)$ and the results of the preceding paragraph that $K_1(\alpha, \omega)$ is of class $C^{(n-1)}$ uniformly on $Y_0 X_0 B_3$.

Using the terminology of Hildebrandt and Graves [1], we have demonstrated that the function $\omega - K_1(\alpha, \omega)$ is of class $C^{(n-1)}$ in α uniformly ($Y_0 X_0 B_3; \|\omega\|$), is linear in ω and has a reciprocal $\Omega(\alpha, \omega)$ which is uniformly modular for $\alpha \in Y_0 X_0$. By examining the proof of lemma 16.3 on page 147 of Hildebrandt and Graves [1] we see that $\Omega(\alpha, \omega)$ also is of class $C^{(n-1)}$ in α uniformly ($Y_0 X_0 B_3; \|\omega\|$). Consequently the function $\Omega(\alpha, \omega_0(\alpha))$ of α is of class $C^{(n-1)}$ uniformly on $Y_0 X_0$. This follows readily from a known lemma²¹), and the fact²²) that a linear function which is continuously differentiable in a parameter has a total differential.

If we interpret our results in the original space E , we see that for any pair ξ, p in $Y_0 X_0$, the integral system (3.6) has a unique solution pair $z^* = \varphi(s, \xi, p, \lambda)$, $w^* = \psi'(s, \xi, p, \lambda)$, where φ and ψ' are linear in λ and of class $C^{(n-1)}$ in ξ, p uniformly ($I Y_0 X_0 E; \|\lambda\|$). As in the preceding paragraph, this implies that φ and ψ' are of class $C^{(n-1)}$ in ξ, p, λ uniformly on $Y_0 X_0 E((0)_1)$.

To prove the last part of the theorem consider the linear integral system (3.5) equivalent to (3.2). If we apply the method of successive approximations to (3.5) we obtain sequences $\{z_i(s, \lambda)\}$ and $\{w_i(s, \lambda)\}$ which converge to limit functions $z(s, \lambda)$, $w(s, \lambda)$ respectively, where the pair $z(s, \lambda)$, $w(s, \lambda)$ is the unique solution of (3.5). Now $\mu(s, \xi, p; \lambda)$ satisfies the variational system (3.2) so that the function pair $\mu(s, \xi, p; \lambda)$, $\mu'(s, \xi, p; \lambda)$ is a solution of (3.5). Hence $z(s, \lambda) = \mu(s, \xi, p; \lambda)$ and $w(s, \lambda) = \mu'(s, \xi, p; \lambda)$. From the hypotheses of our theorem and the elementary properties of adjoints given in §1 it follows by induction that the approximating functions $z_i(s, \lambda)$ and $w_i(s, \lambda)$ have adjoints $z_i^*(s, \lambda)$ and $w_i^*(s, \lambda)$ respectively as functions of λ . But $z_i^*(s, \lambda)$ and $w_i^*(s, \lambda)$ are just the approximating functions for the integral system (3.6) and converge to the solution functions $\varphi(s, \xi, p, \lambda)$ and

²¹) Lemma 3 of Michal and Hyers [1].

²²) Theorem 1.1 of Michal [2].

$\psi'(s, \xi, p, \lambda)$ respectively. By property [4] of adjoints in § 1, we see that the adjoints of $\mu(s, \xi, p; \lambda)$ and $\mu'(s, \xi, p; \lambda)$ exist given by

$$\begin{aligned}\mu_{(3)}^*(s, \xi, p; \lambda) &= \psi(s, \xi, p, \lambda), \\ \mu_{(3)}'^*(s, \xi, p; \lambda) &= \psi'(s, \xi, p, \lambda).\end{aligned}$$

§ 4.

Normal Coordinate Systems of Class $K^{(n)}$.

So far we have studied transformations and certain functional equations in the space E . We now apply our results to the differential geometry³³⁾ of a Hausdorff space H with a linear connection and with E as the coordinate space. The mappings of neighborhoods of the space H and the postulates on coordinate systems will be taken as in MH, with the general Banach space replaced by the abstract Euclidean space E , and transformations of class $K^{(m)}$ replaced by transformations of class $K^{(n)}$.

Let $x(P)$ be some allowable $k^{(n+2)}$ coordinate system. We shall make the permanent assumption that for any point x of the coordinate domain of $x(P)$, the linear connection $\Gamma(x, \xi_1, \xi_2)$ satisfies the following conditions:

- (I) $\Gamma(x, \xi_1, \xi_2)$ is a symmetric bilinear function of ξ_1 and ξ_2 .
- (II) $\Gamma(x, \xi_1, \xi_2)$ is of class $C^{(n)}$ locally uniformly at x .
- (III) The adjoint $\Gamma_{(3)}^*(x, \xi_1, \xi_2)$ exists and is of class $C^{(n)}$ locally uniformly at x .
- (IV) The adjoint $\Gamma_{(4)}^*(x, \xi_1, \xi_2; \lambda)$ exists and is of class $C^{(n-1)}$ locally uniformly at x .

The question of the invariance of these restrictions on the linear connection under transformation of coordinates is answered in the following theorem.

Theorem 4.1. Let $x(P)$ and $\bar{x}(Q)$ be any two allowable $k^{(n+2)}$ coordinate systems with intersecting geometrical domains, which by the postulates generate a coordinate transformation $\bar{x} = \bar{x}(x)$ of class $k^{(n+2)}$ carrying an open set S_1 into an open set S_2 . If the conditions (I)–(IV) on the linear connection hold in the coordinate system $x(P)$ at each point of S_1 then they also hold in the coordinate system $\bar{x}(Q)$ at each point of S_2 .

Proof. The transformation law³⁴⁾ for the linear connection is

$$(4.1) \quad \bar{\Gamma}(\bar{x}, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) = \bar{x}(x; \Gamma(x, \xi_1, \xi_2)) + \bar{x}(x; x(\bar{x}; \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2))$$

³³⁾ See § 2 of MH.

³⁴⁾ See (2.3) of MH.

where ξ_1 and ξ_2 are two arbitrary contravariant vectors³⁵). Strictly speaking ξ_1 is the component of a contravariant vector in the coordinate system $x(P)$, but for brevity we shall refer to a component by the name of the corresponding geometric object. The transformation law for a contravariant vector is

$$(4.2) \quad \bar{\xi} = \bar{x}(x; \xi).$$

Condition (I) is obviously invariant from formula (4.1). One of the conclusions of theorem 2.5 of MH is that condition (II) is invariant under transformations of class $K^{(n+2)}$, and hence under those of class $k^{(n+2)}$. From condition (III), the elementary properties of adjoints given in § 1, and (4.2) we may take adjoints of both sides in (4.1) and obtain

$$(4.3) \quad \begin{cases} \bar{\Gamma}_{(3)}^*(\bar{x}, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) = x^*[\bar{x}; \Gamma_{(3)}^*(x, \bar{x}^*(x; \bar{\xi}_1), x(\bar{x}; \bar{\xi}_2))] \\ \quad + x_{(2)}^*(\bar{x}; \bar{x}^*(x; \bar{\xi}_1); \bar{\xi}_2). \end{cases}$$

All the functions involved in the right member of (4.3) are at least of class $C^{(n)}$ locally uniformly, and it follows as in the lemma to theorem 2.1 that $\bar{\Gamma}_{(3)}^*(\bar{x}, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ is of class $C^{(n)}$ locally uniformly at \bar{x} , so that condition (III) is invariant. If we differentiate (4.1) and take adjoints we can prove in a similar way that condition (IV) is invariant. This completes the proof of the theorem.

We are now in a position to show that the transformations³⁶) $y = h(p, x)$ to normal coordinates is of class $k^{(n)}$. That this transformation is of class $K^{(n)}$ has already been shown in Theorem 3.1 of MH.

Theorem 4.2. *Let q be any chosen point of the coordinate domain Σ of an allowable $k^{(n+2)}$ coordinate system $x(P)$ in which conditions (I)–(IV) are satisfied by the linear connection Γ . Then there exists a constant $d > 0$ and a function $h(p, x)$ of class $C^{(n)}$ uniformly on $E^2((q)_d)$ such that for any choice of p in $E((q)_d)$ the transformation $y = h(p, x)$ with inverse $x = \mu(y, p)$ is of class $k^{(n)}$ for $x \in E((p)_d)$ and defines a normal coordinate system $y(P)$ with center $P_0 = P(p)$.*

Proof. By hypothesis and the definition of functions of class $C^{(n)}$ locally uniformly at a point, there exists a neighborhood X of q such that $X \subset \Sigma$ and the linear connection $\Gamma(x, \xi_1, \xi_2)$ satisfies conditions (i), (ii), (iii) of theorem 3.1 for $x_0 = q$. By existence theorem 1.1 of MH there are neighborhoods X_0 of q and Y_0 of 0 such that $X_0 \subset X$ and $Y_0 \subset E((0)_1)$, and the differential system (3.1) has the unique solution $x = \mu(s\xi, p)$ which for each s on $0 \leq s \leq 1$ is of class $C^{(n)}$ uniformly on $Y_0 X_0$.

³⁵) Michal [3].

³⁶) Cf. the first part of 3 of the present paper.

Consider the transformation

$$x = \mu(y, p)$$

which is of class $C^{(n)}$ uniformly on $Y_0 X_0$ and reduces to p for $y = 0$. From Theorem 3.1 of MH there is a neighborhood $E((q)_{2c}) \subset X_0$ and a function $y = h(p, x)$ of class $C^{(n)}$ uniformly on $E^2((q)_{2c})$ which for each $p \in E((q)_c)$ is inverse to $x = \mu(y, p)$. In particular $h(p, p) = 0$ for all $p \in E((q)_c)$. Since the hypotheses of theorem 3.1 are satisfied we may apply this theorem and deduce that $\mu(y, p; \lambda)$ has an adjoint $\mu_{(3)}^*(y, p; \lambda)$ which is of class $C^{(n-1)}$ uniformly on $Y_0 X_0 E((0)_1)$. We now show that this adjoint is a solvable linear function of λ . Form the Banach space E_1 of pairs $\alpha = (x_1, x_2)$ out of E with $\|\alpha\| = \max \|x_1\|, \|x_2\|$. Define

$$\alpha_0 = (q, q), \quad \alpha_1 = (x, p)$$

and

$$\varrho(\alpha_1, \lambda) = \mu_{(3)}^*(h(p, x), p; \lambda)$$

so that $\varrho(\alpha_1, \lambda)$ is a function on $E_1((\alpha_0)_{2c})E$. Since $\mu_{(3)}^*(s\xi, p; \lambda)$ satisfies the initial conditions in (3.3) we have

$$\varrho(\alpha_0, \lambda) = \mu_{(3)}^*(0, q; \lambda) = \lambda$$

so that $\varrho(\alpha_1, \lambda)$ has an inverse for $\alpha_1 = \alpha_0$. With the aid of a known lemma³⁷ we find that $\varrho(\alpha_1, \lambda)$ has an inverse $\sigma(\alpha_1, \lambda)$ in some neighborhood $E_1((\alpha_0)_{2d})$ where $d \leq c$. Hence for any choice of p in $E((q)_d)$ the linear function $\mu_{(3)}^*(h(p, x), p; \lambda)$ has an inverse for $x \in E((p)_d)$. Consequently the three conditions of Definition 2.1 for a transformation to be of class $k^{(n)}$ are satisfied by the transformation $x = \mu(y, p)$ which takes a certain open set S_2 containing the origin into the neighborhood $E((p)_d)$. Since $x = \mu(y, p)$ is of class $k^{(n)}$ on S_2 , its inverse $y = h(p, x)$, the transformation to normal coordinates y , is of class $k^{(n)}$ on $E((p)_d)$ for each p in $E((q)_d)$. This is immediate from theorem 2.1.

§ 5.

Multilinear Forms in Covariant and Contravariant Vectors.

To the list of geometric objects studies in MH we now add covariant vectors and covariant vector fields³⁸. The definition of a covariant vector may be obtained from the definition of a contravariant vector given in § 2

³⁷) Lemma 16.2 on page 146 of Hildebrandt and Graves [1].

³⁸) See Michal [1], where more general coordinate transformations are allowed. The normal coordinate existence theorems seem to require more stringent conditions.

of MH, by replacing the tangent space $T(P)$ by another linear space $T^*(P)$, and the transformation law

$$(5.1) \quad \bar{\xi} = \bar{x}(x; \xi)$$

by the new transformation law

$$(5.2) \quad \bar{\eta} = x^*(\bar{x}; \eta)$$

relating the components η and $\bar{\eta}$ of the covariant vector in any two allowable $k^{(m)}$ ($m \geq 1$) coordinate systems $x(P)$ and $\bar{x}(P)$ with intersecting geometrical domains.

One may now consider geometric objects which are contravariant vector fields, covariant vector fields, or scalar fields, and whose components are multilinear functions of contravariant vectors, of covariant vectors, or of both. We shall say that a form $F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s)$ depending on r contravariant vectors ξ and s covariant vectors η , is of type (Con, r, s) (Cov, r, s) or (Sca, r, s) according as F is a contravariant vector field, a covariant vector field, or a scalar field.

Theorem 5.1. *The adjoints, if they exist, of a form $F(x, \xi, \eta)$ are forms of the types indicated by the following table.*

F	$(\text{Con}, 1, 1)$	$(\text{Cov}, 1, 1)$
$F_{(2)}^*$	$(\text{Cov}, 0, 2)$	$(\text{Cov}, 1, 1)$
$F_{(3)}^*$	$(\text{Con}, 1, 1)$	$(\text{Con}, 2, 0)$

Proof. We shall prove that if $F(x, \xi, \eta)$ is of type $(\text{Con}, 1, 1)$ then $F_{(3)}^*(x, \eta_1, \eta_2)$ is of type $(\text{Cov}, 0, 2)$. The proofs for the other cases are similar. For any contravariant vector ξ and covariant vector η_2 ,

$$\bar{F}(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}_2) = \bar{x}(x; F(x, \xi, \eta_2)).$$

Let $\bar{\eta}_1$ be the component in the \bar{x} coordinate system of a covariant vector. Then

$$\bar{F}(\bar{x}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = \bar{x}(x; F(x, x(\bar{x}; \bar{\eta}_1), \eta_2)).$$

Taking adjoints with respect to $\bar{\eta}$, in both members and making use of the elementary properties of adjoints we have

$$\begin{aligned} \bar{F}_{(3)}^*(\bar{x}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) &= x^*(\bar{x}; F_{(3)}^*(x, x^*(x; \bar{\eta}_1), \eta_2)) \\ &= x^*(\bar{x}; F_{(3)}^*(x, \eta_1, \eta_2)). \end{aligned}$$

The obvious generalizations of this theorem for the adjoints $F_{(i)}^*$ of a form of type (π, r, s) , where π denotes one of the three abbreviations Con, Cov, or Sca, are left to the reader.

One can also prove theorems on the adjoints of the components of other geometric objects. For example consider the linear connection $\Gamma(x, \xi_1, \xi_2)$. The adjoint $\Gamma_{(2)}^*(x, \eta, \xi)$ is the component of a new geometric object with the following law of transformation

$$(5.3) \quad \bar{\Gamma}_{(2)}^*(\bar{x}, \bar{\eta}, \bar{\xi}) = x^*(\bar{x}; \Gamma_{(2)}^*(x, \eta, \xi)) + x_{(2)}^*(\bar{x}; \eta; \bar{\xi}),$$

where ξ and η are arbitrary contravariant and covariant vectors respectively. By theorem 1.2 this may also be written³⁹⁾.

$$(5.4) \quad \bar{\Gamma}_{(2)}^*(\bar{x}, \bar{\eta}, \bar{\xi}) = x^*(\bar{x}; \Gamma_{(2)}^*(x, \eta, \xi)) + x_{(2)}^*(\bar{x}; \bar{\xi}; \eta).$$

Since the linear connection is symmetric we also have

$$(5.5) \quad \bar{\Gamma}_{(2)}^*(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = x^*(\bar{x}; \Gamma_{(2)}^*(x, \xi, \eta)) + x_{(2)}^*(\bar{x}; \bar{\xi}; \eta).$$

§ 6.

Covariant Differentials and Extensions of Forms.

The extensions of multilinear forms of types (Con, $r, 0$) and (Sca, $r, 0$) in contravariant vectors alone were considered in § 6 of MH. By using normal coordinates of class $k^{(n)}$, instead of those of class $K^{(n)}$, it is now possible to define the extensions of forms of type (π, r, s) where π stands for any of the abbreviations Con, Cov or Sca.

Definition. The l th extension $F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s/\xi_{r+1}, \dots, \xi_{r+l})$ of a form $F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s)$ of type (π, r, s) is defined by⁴⁰⁾

$$\begin{aligned} F(p, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s/\xi_{r+1}, \dots, \xi_{r+l}) \\ = [{}^{\dagger}F(y, {}^{\dagger}\xi_1, \dots, {}^{\dagger}\xi_r, {}^{\dagger}\eta_1, \dots, {}^{\dagger}\eta_s; {}^{\dagger}\xi_{r+1}; \dots; {}^{\dagger}\xi_{r+l})]_y = 0 \end{aligned}$$

where $y(P)$ is a normal coordinate system⁴¹⁾ of class $k^{(l+1)}$, with center P_0 given by $p = x(P_0)$.

Since a normal coordinate system of class $k^{(n)}$ is automatically a normal coordinate system of class $K^{(n)}$, Theorem 3.2 of MH applies here and tells us that the transformation between two normal coordinate systems of class $k^{(n)}$ with the same center is linear. With this in mind one can prove the following theorem by using methods similar to those in MH.

Theorem 6.1. The l th extension of a form of type (π, r, s) is a form of type $(\pi, r+l, s)$ where π has the same value in both cases.

³⁹⁾ This is the transformation law (2.10) of Michal [1] with slightly different notations.

⁴⁰⁾ In this definition it is sufficient to assume that F possesses continuous l th order Fréchet differentials in x .

⁴¹⁾ As in MH the dagger \dagger denotes evaluation in a normal coordinate system.

The l th extension of a form may be calculated on the basis of the results of MH and the following theorem. As in MH we omit the arguments and write for the transformation to normal coordinates

$$y = v(x), \quad x = \mu(y).$$

As usual we denote the adjoint, if it exists, of $\mu(y; \delta_1 y; \dots; \delta_r y)$ as a function of $\delta_{i-1} y$ by $\mu_{(i)}^*(y; \delta_1 y; \dots; \delta_r y)$. Then with the aid of Theorem 4.2 and Theorem 1.2 we obtain

Theorem 6.2. *The adjoints $\mu_{(i)}^*(y; \delta_1 y; \dots; \delta_r y)$ and $v_{(i)}^*(x; \delta_1 x; \dots; \delta_r x)$, $i = 1, 2, \dots, r+1$, $r \leq n$, exist and are equal respectively to the $(r-1)$ st differentials of $\mu_{(r)}^*(y; \delta_{i-1} y)$ and of $v_{(r)}^*(x; \delta_{i-1} x)$.*

It has been shown in (4.11) of MH that

$$(6.1) \quad \begin{cases} \mu(0; \delta y) = \delta y \\ \mu(0; \delta_1 y; \dots; \delta_r y) = -\Gamma_r(p, \delta_1 y, \dots, \delta_r y) \end{cases} \quad 2 \leq r \leq n,$$

where

$$\Gamma_2(p, \delta_1 y, \delta_2 y) = \Gamma(p, \delta_1 y, \delta_2 y)$$

in the present case. Taking adjoints of (6.1) we have

$$(6.2) \quad \begin{cases} \mu^*(0; \delta y) = \delta y \\ \mu_{(i)}^*(0; \delta_1 y; \dots; \delta_r y) = -\Gamma_{r(i)}^*(p, \delta_1 y, \dots, \delta_r y). \end{cases}$$

By taking adjoints in 4.12 and 4.14 of MH we find that

$$(6.3) \quad v^*(p; \delta x) = \delta x,$$

$$(6.4) \quad v_{(i)}^*(p; \delta_1 x; \delta_2 x) = \Gamma_{(i)}^*(p, \delta_1 x, \delta_2 x).$$

The adjoints of the higher order differentials of $v(x)$ at $x = p$ may be obtained by differentiating the formula [Cf. (4.13) of MH]

$$(6.5) \quad v(x; \delta_1 x; \delta_2 x) = -v(x; \mu[v(x); v(x; \delta_1 x); v(x; \delta_2 x)])$$

and taking adjoints (See § 7 for an alternative method).

The covariant differential⁴²⁾ of a form of type (π, r, s) was defined and studied by one of us without the use of normal coordinates. The following theorem furnishes an alternative definition for the covariant differential of such a form.

Theorem 6.3. *The first extension of a form $F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s)$ of type (π, r, s) is identical with the first covariant differential of F and is given by*

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s | \delta x) &= F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s; \delta x) \\ &- \sum_{i=1}^r F(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \Gamma(x, \xi_i, \delta x), \xi_{i+1}, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s) \\ &+ \sum_{i=1}^s F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_{i-1}, \Gamma_{(i)}^*(x, \eta_i, \delta x), \eta_{i+1}, \dots, \eta_s) \\ &+ II \end{aligned} \right.$$

⁴²⁾ Michal [1] and [3].

where

$$(6.7) \quad \begin{cases} \Pi = \Gamma(x, F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s), \delta x) \text{ for } F \text{ of type (Con, } r, s) \\ = -\Gamma_{(2)}^*(x, F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s), \delta x) \text{ for } F \text{ of type (Cov, } r, s) \\ = 0 \text{ for } F \text{ of type (Sca, } r, s). \end{cases}$$

We outline the proof for the case where F is of type (Con, r, s). The other cases may be handled in a similar fashion. Considering x as the independent variable differentiate the relation

$$(6.8) \quad F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s) = \mu(y; {}^tF(y, {}^t\xi_1, \dots, {}^t\xi_r, {}^t\eta_1, \dots, {}^t\eta_s))$$

using known theorems on Fréchet differentials. Put $x = p$ in the result and use formulas (6.1), (6.3) and (6.4) to obtain (6.6) of the theorem for $x = p$.

We note that the l th extension of F may be calculated similarly by taking the l th differentials instead of first differentials. For instance in the (Con, r, s) case we would take the l th differential of (6.8).

§ 7.

Adjoint Normal Vector Forms and Other Abstract Differential Invariants.

In § 5 of MH the normal vector form $A_k(x, \xi_1, \dots, \xi_{k+2})$ was defined as the k th extension of the symmetrized linear connection $\Gamma_2(x, \xi_1, \xi_2)$ which in the present paper is just $\Gamma(x, \xi_1, \xi_2)$ itself. Under the standing hypotheses in the second paragraph of § 4, it can be shown by applying theorems 4.2, 4.1 and 1.2 that the linear connection is of class $C^{(n-2)}$ locally uniformly at p , the center of normal coordinates, and that the differentials of orders $1, 2, \dots, n-2$ have adjoints in each linear place. Consequently the adjoints $A_{k(i)}^*$ of the A_k 's exist for $k \leq n-2$. The obvious generalization of Theorem 5.1 mentioned in § 5 enables us to conclude that the form

$$A_{(k)i}^*(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-2}, \eta, \xi_i, \dots, \xi_{k+2}),$$

where η is an arbitrary covariant vector, is of type (Cov, $r-1, 1$). Each $A_{k(i)}^*$ will be called an *adjoint normal vector form*. For $i = 2, 3$ it is readily shown that $A_{k(i)}^*$ is simply the k th extension of $\Gamma_{(i)}^*(x, \eta, \xi)$. The explicit expressions for the forms $A_{k(i)}^*$ are obtained from the formulas for A_k by taking adjoints. For example, from formula (5.5) of MH we obtain

$$(7.1) \quad \begin{cases} A_{1(2)}^*(x, \eta, \xi_2, \xi_3) = \Gamma_{(2)}^*(x, \eta, \xi_2; \xi_3) - \Gamma_3^*(x, \eta, \xi_2, \xi_3) \\ \quad - \Gamma_{(2)}^*(x, \Gamma_{(2)}^*(x, \eta, \xi_2), \xi_3) \\ \quad - \Gamma_{(2)}^*(x, \eta, \Gamma(x, \xi_2, \xi_3)), \end{cases}$$

where the ξ 's are contravariant vectors and η is a covariant vector, and where

$$(7.2) \quad \Gamma_3(x, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{3} P \{ \Gamma(x, \xi_1, \xi_2; \xi_3) - 2 \Gamma(x, \Gamma(x, \xi_1, \xi_2), \xi_3) \}$$

the symbol P denoting the sum over all cyclic permutations of ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

In § 5 of MH it was shown that the differentials $v(p; \delta_1 x; \dots; \delta_r x)$, $3 \leq r \leq n$, of the transformation $y = v(x)$ to normal coordinates y could be calculated in terms of normal vector forms. Similarly the adjoints of these differentials of $v(x)$ at $x = p$ can be calculated in terms of the adjoint normal vector forms since in the present paper the transformation $y = v(x)$ is of class $k^{(n)}$. For example, on using (5.7) of MH we find

$$(7.3) \quad \left\{ \begin{aligned} v_{(2)}^*(p; \delta_1 x; \delta_2 x; \delta_3 x) &= \Gamma_{(2)}^*(p, \Gamma_{(2)}^*(p, \delta_1 x, \delta_3 x), \delta_2 x) \\ &\quad + \Gamma_{(2)}^*(p, \delta_1 x, \delta_2 x; \delta_3 x) \\ &\quad - A_{1(2)}^*(p, \delta_1 x, \delta_2 x, \delta_3 x). \end{aligned} \right.$$

Having developed the theory of normal coordinates of class $k^{(n)}$ and of adjoint normal vector forms we are now in a position to give a replacement theorem for more general differential invariants than those considered in § 7 of MH.

Consider a functional

$$G_{\alpha \dots \omega} [f(\alpha_1, \alpha_2), g(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \dots, h(\pi_1, \dots, \pi_{i+2}), i(\varrho_1, \varrho_2), j_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), j_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \dots, k_1(\psi_1, \dots, \psi_{m+2}), k_2(\omega_1, \dots, \omega_{m+2}) || \lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s]$$

whose arguments are multilinear functions, f, \dots, k_2 , and whose value is a multilinear function in $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu, \dots, \mu_s$.

Definition. A multilinear form

$$(7.4) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, \xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_s) \\ &= G_{\alpha \dots \omega} [\Gamma(x, \alpha_1, \alpha_2), \Gamma(x, \beta_1, \beta_2; \beta_3), \dots, \Gamma(x, \pi_1, \pi_2; \pi_3; \dots; \pi_{i+2}), \\ &\quad \Gamma_{(2)}^*(x, \varrho_1, \varrho_2), \Gamma_{(3)}^*(x, \sigma_1, \sigma_2; \sigma_3), \Gamma_{(4)}^*(x, \tau_1, \tau_2; \tau_3), \dots, \\ &\quad \Gamma_{(r)}^*(x, \psi_1, \psi_2; \psi_3; \dots; \psi_{m+2}), \Gamma_{(s)}^*(x, \omega_1, \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_{m+2}) || \xi_1, \dots, \xi_r, \\ &\quad \eta_1, \dots, \eta_s] \end{aligned} \right.$$

of type (π, r, s) will be called a differential invariant of order l, m if G as a functional of the Γ 's and Γ^* 's retains its form under transformations of coordinates.

Each of the adjoints $\Gamma_{(i)}^*(x, \dots; \dots; \dots)$ can be expressed either as a $\Gamma_{(2)}^*(x, \dots; \dots; \dots)$ or as a $\Gamma_{(4)}^*(x, \dots; \dots; \dots)$ since $\Gamma(x, \xi_1, \xi_2; \lambda; \dots; \mu)$ is symmetric in ξ_1, ξ_2 and in λ, \dots, μ . It is for this reason that we do not include the adjoints $\Gamma_{(3)}^*, i \neq 2, 4$ as arguments of the functional G .

Replacement Theorem. Under our hypotheses on the symmetric linear connection $\Gamma(x, \xi_1, \xi_2)$ every differential invariant (7.4) of type (π, r, s) and order l, m , where $l \leq n, m \leq n$ can be expressed wholly in terms of a fundamental

set of differential invariants consisting of the normal vector forms and the adjoint normal vector forms by the following replacement process:

$\Gamma(x, \alpha_1, \alpha_2)$ is replaced by 0,

$\Gamma(x, \gamma_1, \gamma_2; \gamma_3; \dots; \gamma_{j+2})$ is replaced by $A_j(x, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{j+2})$,
 $j = 1, 2, \dots, l$,

$\Gamma_{(2)}^*(x, \varrho_1, \varrho_2)$ is replaced by 0,

$\Gamma_{(i)}^*(x, \Phi_1, \Phi_2; \Phi_3; \dots; \Phi_{j+2})$ is replaced by $A_{j(i)}^*(x, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{j+2})$,
 $j = 1, 2, \dots, m, \quad i = 2, 4$.

As a single illustration consider the covariant curvature form⁴³⁾ which in the notation of the present paper may be written

$$(7.5) \quad \begin{cases} B_{(2)}^*(x, \eta, \xi_1, \xi_2) = \Gamma_{(2)}^*(x, \eta, \xi_1; \xi_2) - \Gamma_{(2)}^*(x, \eta, \xi_2; \xi_1) \\ \quad + \Gamma_{(2)}^*(x, \Gamma_{(2)}^*(x, \eta, \xi_2, \xi_1)) \\ \quad - \Gamma_{(2)}^*(x, \Gamma_{(2)}^*(x, \eta, \xi_1, \xi_2)). \end{cases}$$

Applying the replacement theorem to this differential invariant of type (Cov, 2, 1) and order 0, 1 we immediately obtain

$$(7.6) \quad B_{(2)}^*(x, \eta, \xi_1, \xi_2) = A_{1(2)}^*(x, \eta, \xi_1, \xi_2) - A_{1(2)}^*(x, \eta, \xi_2, \xi_1).$$

§ 8.

An Infinite Dimensional Instance.

In this concluding section we take the coordinate space to be the Euclidean space E_1 of real continuous functions $x(\sigma)$ (written x^σ or x_σ) of a real variable σ defined on the closed interval (a, b) with the analytical and geometrical metrics determined respectively by

$$\begin{aligned} \|x\| &= \max_{a \leq \sigma \leq b} |x^\sigma| \\ [x, y] &= x^\sigma y_\sigma, \end{aligned}$$

where the repetition of a continuous index that is not enclosed in a parenthesis, once as a subscript and once as a superscript, denotes integration over (a, b) with respect to that index.

Definition. A p -parameter family of linear functionals $M^{a_1 \dots a_p} [y^\sigma]$, where each a_i ranges over the closed interval (a, b) , will be said to be of Michal-Schmidt type⁴⁴⁾ (MS type) if

$$M^{a_1 \dots a_p} [y^\sigma] = M^{a_1 \dots a_p} y^\sigma + \sum_{i=1}^p M^{a_1 \dots a_p} y^{a_i},$$

⁴³⁾ Cf. formula (3.13) of Michal [1].

⁴⁴⁾ Integral forms more general than those of Volterra type were studied by Erhard Schmidt in Schmidt [1]. The recurrence formula (8.1) is due to A. D. Michal. Cf. Bull. of Amer. Math. Soc., vol. 37 (1931), p. 16.

where each ${}_{(0)}M^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ and $M_{\sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ are continuous functions of $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ and $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \sigma$ respectively.

More generally, a p -parameter family of multilinear functionals

$$M^{\alpha_1 \dots \alpha_p} [y_1^{\sigma_1}, \dots, y_m^{\sigma_m}]$$

of Michal-Schmidt type will be defined recurrently by

$$(8.1) \quad \begin{cases} M^{\alpha_1 \dots \alpha_p} [y_1^{\sigma_1}, \dots, y_m^{\sigma_m}] = M_{\sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} [y_1^{\sigma_1}, \dots, y_{m-1}^{\sigma_{m-1}}] y_m^{\sigma} \\ \quad + \sum_{i=1}^p {}_{(0)}M^{\alpha_1 \dots \alpha_p} [y_1^{\sigma_1}, \dots, y_{m-1}^{\sigma_{m-1}}] y^{\sigma_i}. \end{cases}$$

We restrict ourselves to functional transformations $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ in E , which satisfy the following conditions at each point x^{τ} of their domains of definition⁴⁵:

(I) The first differential of $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ exists and is of the MS type

$$(8.2) \quad \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}; \delta x^{\tau}] = \bar{K}^{\sigma} [x^{\tau}] \delta x^{\sigma} + \bar{K}_{\rho}^{\sigma} [x^{\tau}] \delta x^{\rho},$$

where $\bar{K}^{\sigma} \neq 0$ in (a, b) and the Fredholm determinant

$$D [\bar{K}_{\rho}^{\sigma} / \bar{K}^{(\rho)}] \neq 0.$$

(II) The functional transformation $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ is biunivocal.

(III₁) The first Fréchet differentials of the coefficient functionals (functional „derivatives“) $\bar{K}^{\sigma} [x^{\tau}]$ and $\bar{K}_{\rho}^{\sigma} [x^{\tau}]$ exist *uniformly* in the parameters σ and ρ respectively and are of MS type. Hence the second Fréchet differential of the transformation $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ exists and is a one parameter family of bilinear functionals in the increments of MS type.

(III₂) The first Fréchet differentials of the coefficient functionals of the second Fréchet differential of the transformation $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ exist uniformly in their parameters and are of MS type. Hence the third Fréchet differential of $\bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ exists and is a one parameter family of trilinear functionals of MS type.

(III _{$n+2$}) The first Fréchet differentials of the coefficient functionals of the $(n+2)$ nd Fréchet differential of the transformation $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ exist uniformly in their parameters, are continuous functionals of x^{τ} uniformly in their parameters, and are of MS type. Hence the $(n+3)$ rd Fréchet differential of $\bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ exists continuous in x^{τ} and is a one parameter family of $(n+3)$ - linear functionals of MS type.

⁴⁵ We remind the reader that we are concerned with mappings of neighborhoods of a Hausdorff space onto open sets in the function space E_1 . The domain of definition of a coordinate transformation is the map in E_1 of the intersection of two Hausdorff neighborhoods. Cf. § 4. See also § 2 of MH.

It follows from the restrictions (I) and (II) on the coordinate transformation $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$, the Fredholm integral equation theory and a known abstract implicit function theorem⁴⁶⁾ that the inverse transformation $x^{\tau} = x^{\tau} [\bar{x}^{\sigma}]$ is Fréchet differentiable, and hence by definition⁴⁷⁾, regular. Since, by (III)_{n+2}, the $(n+3)$ rd differential of $\bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ exists and is continuous in x^{τ} , an application of the results immediately preceding definition 2.1 shows that the transformation $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ is of class $K^{(n+2)}$. From restriction (I) it is clear that the adjoint of the differential of the transformation $\bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ exists and is given by

$$(8.3) \quad \bar{x}^* (x; \eta) = \bar{K}^{(\sigma)} [x^{\tau}] \eta_{\sigma} + \bar{K}^{\sigma}_{\tau} [x^{\tau}] \eta_{\tau}.$$

Furthermore, by the restrictions (III)₁ - (III)_{n+2}, $\bar{x}^* (x; \eta)$ is of class $C^{(n+1)}$ locally uniformly at each x^{τ} of the domain of $\bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$. Evidently

$$D[\bar{K}^{\sigma}_{\tau} / \bar{K}^{\sigma}] = D[\bar{K}^{\sigma}_{\tau} / \bar{K}^{(\sigma)}] \neq 0,$$

so that $\bar{x}^* (x; \eta)$ is a solvable linear functional transformation in η_{σ} . Hence by definition 2.1, the transformation $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ is of class $K^{(n+2)}$.

We shall assume that the linear connection $\Gamma(x, \xi, \zeta)$ has the following properties.

(I) Γ is of the MS type⁴⁸⁾

$$(8.4) \quad \begin{cases} \Gamma(x, \xi, \zeta) = \Gamma^i_{\alpha\beta} [x^{\tau}] \xi^{\alpha} \zeta^{\beta} + M^i_{\alpha} [x^{\tau}] \xi^{\alpha} \zeta^i \\ \quad + N^i_{\alpha} [x^{\tau}] \xi^i \zeta^{\alpha} + N^i_{\alpha} \xi^{\alpha} \zeta^i + P^i [x^{\tau}] \xi^i \zeta^i, \end{cases}$$

where

$$(8.5) \quad \Gamma^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\beta\alpha}.$$

(II)₁) The first Fréchet differential of each of the coefficient functionals in (8.4) exists uniformly in i, α, β and is of the MS type.

(II)_{n+1}) The first Fréchet differential of each of the coefficient functionals in the n th differential (in x^{τ}) of $\Gamma(x, \xi, \zeta)$ exists uniformly in its parameters, is of MS type and is a continuous functional of x^{τ} uniformly in its parameters.

Obviously $\Gamma(x, \xi, \zeta)$ is a symmetric bilinear functional of $\xi^{\alpha}, \zeta^{\beta}$ so that condition (I) on the linear connection, given at the beginning of § 4, is satisfied. The remaining conditions (II), (III), (IV) of § 4 may be shown to be satisfied by our present functional linear connection with the aid of arguments similar to some of those used in establishing the fact that the transformations $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$ are of class $K^{(n+2)}$. From Theorem 4.1, the conditions (I)-(IV) on the linear connection, given in § 4, are invariant under a coordinate transformation $\bar{x}^{\sigma} = \bar{x}^{\sigma} [x^{\tau}]$. Moreover, since we are supposing that the differentials

⁴⁶⁾ Hildebrandt and Graves [1], Theorem 4, page 150.

⁴⁷⁾ For a definition of a regular transformation see footnote 20 in § 2.

⁴⁸⁾ Michal [4]. See also Michal [5].

of $\bar{x}^p [x^r]$ are of the MS type in the increments, it follows from the transformation law (4.1) for a linear connection that the restrictions (I) and $(II_1) - (II_{n+1})$ on the functional linear connection are invariant under a coordinate transformation $\bar{x}^p = \bar{x}^p [x^r]$.

With the above restrictions on the transformations of coordinates and on the linear connection, the general theory developed in the first seven sections now applies to the case where the coordinate space E is the infinite dimensional Euclidean space of continuous functions x^r .

References.

A. D. Michal.

- [1] Abstract Covariant Vector Fields in a General Absolute Calculus, *American Journal of Math.* **59** (1937), pp. 306—314.
- [2] Postulates for Linear Connections in Abstract Vector Spaces, *Annali di Matematica* **15** (1936), pp. 197—220.
- [3] General Tensor Analysis, *Bull. of Amer. Math. Soc.* **43** (1937), pp. 394—401.
- [4] Differential Geometries of Function Space, *Proc. of National Academy of Sciences* **16** (Jan., 1930), pp. 88—94.
- [5] Affinely Connected Function Space Manifolds, *American Journal of Mathematics* **50** (1928), pp. 473—517.
- [6] Riemannian Differential Geometry In Abstract Spaces, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **21** (Sept., 1935), pp. 526—529.
- [7] General Riemannian Differential Geometry, to be published elsewhere.

A. D. Michal, I. E. Highberg and A. E. Taylor.

- [1] Abstract Euclidean Spaces with Independently Postulated Analytical and Geometrical Metrics, *Annali Della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* (2) **6** (1937), p. 117—148.

A. D. Michal and D. H. Hyers.

- [1] Second Order Differential Equations With Two Point Boundary Conditions In General Analysis, *American Journal of Math.* **58** (1936), pp. 646—660.
- [2] Theory and Applications of Abstract Normal Coordinates in a General Differential Geometry, *Annali Della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* (2) **7** (1938), p. 157—176.

T. H. Hildebrandt and L. M. Graves.

- [1] Implicit Functions and Their Differentials in General Analysis, *Transactions of American Mat. Soc.* **29** (1927), p. 127—153.

Erhard Schmidt.

- [1] Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen, *Math. Annalen* **65** (1908), p. 370—399.

M. Kerner.

- [1] La Différentielle dans l'Analyse Générale, *Annals of Mathematics* **34** (1933), p. 546—572.

B. Riemann.

- [1] *Commentatio Mathematica, Werke*, 2nd ed., p. 391.

D. Hilbert.

- [1] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (1910).

M. H. Stone.

- [1] Linear Transformations in Hilbert Spaces (1932).

P. Alexandroff and H. Hopf.

- [1] Topologie, vol. I (1935).

S. Banach.

- [1] Théorie des Opérations Linéaires (1932).

C. Carathéodory.

- [1] Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (1935).

M. Fréchet.

- [1] La notion de Différentielle dans L'Analyse Générale, Annales Sc. de L'Ecole Normale Supérieure 42 (1925), p. 293—323.

O. Veblen and J. H. C. Whitehead.

- [1] The Foundations of Differential Geometry (1932).

(Eingegangen am 24. 8. 1937.)

Eine Abbildung der Linienelemente einer Ebene auf Raumpunkte.

Von

G. H. A. Grosheide F. Wzn. in Amsterdam (Niederlande).

§ 1.

Durch die Gerade¹⁾

$$(a'x) = a^1x_1 + a^2x_2 + a^3x_3 = 0$$

und den Punkt

$$(u'A) = u^1A_1 + u^2A_2 + u^3A_3 = 0$$

wird ein Linienelement der projektiven Ebene R_2 bestimmt, wenn die Forderung

$$(a'A) = a^1A_1 + a^2A_2 + a^3A_3 = 0$$

erfüllt ist. Ist α eine von Null und Eins verschiedene Konstante, so kann durch²⁾

$$(1) \quad u^i T_i^k x_k = (u'A)(a'E)(e'x) + \alpha (u'E)(e'A)(a'x) \quad [\alpha(\alpha - 1) \neq 0]$$

den Linienelementen (a', A) und (e', E) der Punkt T , $(T_1^1, T_1^2, \dots, T_3^3)$ eines achtdimensionalen projektiven Raumes G_8 zugeordnet werden. Dieser Punkt ist nur dann unbestimmt, wenn

$$(a'E) = (e'A) = 0$$

ist und deshalb entweder die Punkte oder die Geraden der Linienelemente (a', A) und (e', E) zusammenfallen.

Wir betrachten das Element (a', A) als variabel, dagegen das Element (e', E) als festes „Basis-Element“ der Abbildung. Jedes Linienelement besitzt also vermöge (1) einen Bildpunkt in einem in G_8 verlaufenden linearen Raum G_4 (§ 2).

Setzen wir voraus, daß $m_1 m_2 m_3$ eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3 ist mit der Eigenschaft

$$e^{m_1} \neq 0; \quad E_{m_2} \neq 0,$$

¹⁾ Wir benutzen die Schreibweise von R. Weitzenböck, Invariantentheorie (Groningen 1923).

²⁾ Vgl. H. J. van Veen, Een afbeelding op R_2 van de projectiviteiten van punten en stralenvelden. Versl. Kon. Ak. Amsterdam 36 (1927), S. 338–345. A representation on R_2 of the projectivities of point-fields and ray-fields. Proc. Kon. Ak. Amsterdam 30 (1927), S. 552–558.

so ist wegen $\alpha(\alpha - 1) \neq 0$ umgekehrt einem willkürlichen Punkte T von G_4 ein Linienelement von R_2 zugeordnet (§ 3), nämlich

$$(a'x): \quad e^{m_1} T_{m_1}^i T_i^k x_k - e^i T_i^{m_1} T_{m_1}^k x_k = 0,$$

$$(u'A): \quad E_{m_2} u^i T_i^k T_k^{m_1} - u^i T_i^{m_1} T_{m_2}^k E_k = 0,$$

ausgenommen, wenn T auf einer der sich schneidenden Geraden

$$(5) \quad \varrho T_i^k = e^k B_i \quad [\varrho \neq 0; (e'B) = 0],$$

$$(6) \quad \varrho T_i^k = b^k E_i \quad [\varrho \neq 0; (b'E) = 0]$$

liegt. Schließen wir Kurven, gelegen in Ebenen von G_4 , die eine dieser Geraden oder ihren Schnittpunkt enthalten, aus (§ 4), dann sind nur diejenigen ebenen Kurven, die Bildfiguren gewisser W -Kurven erster Art von R_2 sind, Linien-elementvereine zugeordnet (§ 5). Den Geraden von R_2 entsprechen die Geraden eines Geradennetzes in G_4 . Den Punkten von R_2 entsprechen die Geraden eines zweiten Netzes (§ 7). Einer willkürlichen Geraden von G_4 sind im allgemeinen zwei Kurven zweiter Ordnung in R_2 zugeordnet (§ 8).

Vermöge (1) ist eine umkehrbar eindeutige Verwandtschaft zwischen den Punkten und den Ebenen von G_4 festzulegen, die für $\alpha = -1$ ein Nullsystem ist (§ 6 und 7). Der Fall $\alpha = -1$ ist schon von Beck³⁾ untersucht worden (§ 9). Durch passende Wahl des Basiselementes gelangen wir nämlich zu einer Lieschen Abbildung.

§ 2.

Für die Koordinaten der Bildpunkte in G_9 gilt:

$$e^i T_i^k x_k = (e'A)(a'E)(e'x),$$

$$u^i T_i^k E_k = \alpha (u'E)(e'A)(a'E),$$

$$T_i^i = (1 + \alpha)(e'A)(a'E).$$

Da wegen $(e^1, e^2, e^3) \neq (0, 0, 0)$ und $(E_1, E_2, E_3) \neq (0, 0, 0)$ Teilen erlaubt ist, kann hieraus abgeleitet werden:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{e^i T_i^1}{e^1} = \frac{e^i T_i^2}{e^2} = \frac{e^i T_i^3}{e^3} = \frac{T_i^i}{1 + \alpha}, \\ \frac{T_1^i E_i}{\alpha E_1} = \frac{T_2^i E_i}{\alpha E_2} = \frac{T_3^i E_i}{\alpha E_3} = \frac{T_i^i}{1 + \alpha}. \end{cases}$$

Sowohl aus der ersten, als aus der zweiten Dreizahl folgt:

$$e^i T_i^k E_k = 0,$$

³⁾ H. Beck, Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente auf Raumpunkte. Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 543—566.

weiter besteht aber zwischen diesen Gleichungen keine Abhängigkeit, so daß durch (2) ein in G_3 verlaufender linearer dreidimensionaler Raum G_4 bestimmt wird, der alle Bildpunkte enthält.

Die Koordinaten T_i^k erfüllen weiter die von α und (e', E) unabhängige Forderung⁴⁾:

$$\begin{vmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese ist auch zu erhalten, wenn man von (2) ausgeht, ebenso wie alle übrigen Relationen zwischen den Koordinaten T^k . Allerdings (wegen $\alpha(\alpha - 1) \neq 0$) entsprechen zwei voneinander und von (e', E) verschiedenen Linienelementen (a', A) und (b', B) im allgemeinen zwei verschiedene Punkte von G_4 . Es gibt also ∞^3 Bildpunkte, so daß eine von (2) unabhängige Gleichung in T_i^k ausgeschlossen ist. Zusammenfallen der Bildpunkte forderte:

$$\begin{aligned} (u' A) (a' E) (e' x) + \alpha (u' E) (e' A) (a' x) \\ \equiv e \{ (u' B) (b' E) (e' x) + \alpha (u' E) (e' B) (b' x) \} \quad \{u'; x\}, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{cases} (E B A) (a' E) (e' x) = 0, \\ \alpha (u' E) (e' A) (a' b' e') = 0, \\ (b' A) (a' E) (e' B) + \alpha (b' E) (e' A) (a' B) \\ \quad = (e' b' a') (E B A) + (\alpha - 1) (b' E) (e' A) (a' B) = 0, \end{cases}$$

oder für $(a' E) (e' A) \neq 0$:

$$(a' b' e') = (A B E) = (a' B) (b' E) = 0.$$

Dies wird deshalb nicht auftreten, weil (b', B) weder mit (e', E) noch mit (a', A) identisch ist.

§ 3.

Einem willkürlichen Punkte $T, (T_1^1, \dots, T_3^3)$ von G_4 ist im allgemeinen ein Linienelement (a', A) der Ebene R_2 zugeordnet. Dieses ist zu bekommen aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} u^i T_i^k x_k &\equiv (u' A) (a' E) (e' x) + \alpha (u' E) (e' A) (a' x) \quad \{u'; x\}, \\ (a' A) &= 0. \end{aligned}$$

⁴⁾ Wenn wir die rechte Seite von (1) gleich Null setzen, bekommen wir nur singuläre Kollineationen. Die Bildpunkte liegen auf einer Varietät v_1^3 (van Veen, l. c., § 3). G_4 gehört sowohl zu der $(e' x) = 0$ zugeordneten Varietät v_2^3 , als auch zu der $(u' E) = 0$ zugeordneten Varietät v_3^3 (van Veen, l. c., § 9). Unabhängig vom Elemente (a', A) befindet sich der singuläre Punkt $(u' a' e') = 0$ von (1) auf $(e' x) = 0$ und geht die singuläre Gerade $(A E x) = 0$ durch $(u' E) = 0$.

Demnach müssen die Koeffizienten von $(a'x) = 0$ die Bedingungen

$$(3) \begin{cases} e^i T_i^{m_1} = e^{m_1} (a'E) (e'A), \\ u^i T_i^k T_k^l x_l \equiv (a'E) (e'A) \{ (u'A) (a'E) (e'x) + \alpha^2 (u'E) (e'A) (a'x) \} \quad \{u'; x\} \end{cases}$$

und damit

$$u^i T_i^k T_k^l x_l - \frac{e^i T_i^{m_1}}{e^{m_1}} \cdot u^i T_i^k x_k \equiv \alpha (\alpha - 1) (u'E) (a'E) (e'A)^2 (a'x) \quad \{u'; x\}$$

befriedigen. Als Gleichung der Geraden folgt hieraus zum Beispiel

$$(a'x): \quad e^{m_1} T_{m_2}^i T_i^k x_k - e^i T_i^{m_1} T_{m_2}^k x_k = 0,$$

während, wie auf analoge Weise gezeigt werden kann, die Gleichung des Punktes ist

$$(u'A): \quad E_{m_2} u^i T_i^k T_k^{m_1} - u^i T_i^{m_1} T_{m_2}^k E_k = 0.$$

Unbestimmt ist dieses Linienelement nur, wenn entweder die Gerade oder der Punkt es ist. Für die Unbestimmtheit der Geraden ist notwendig:

$$e^{m_1} T_{m_2}^i T_i^k x_k - e^i T_i^{m_1} T_{m_2}^k x_k \equiv 0 \quad \{x\}$$

und also u. a., auch wegen (2):

$$e^{m_1} T_{m_2}^i T_i^k E_k - e^i T_i^{m_1} T_{m_2}^k E_k = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} \frac{e^{m_1}}{E_{m_2}} (T_{m_2}^k E_k)^2 = 0$$

oder

$$(4) \quad T_{m_2}^k E_k = 0.$$

Durch (2) und (4) wird immer (siehe § 4) ein linearer zweidimensionaler Raum G_3 bestimmt, der die nicht-kollinearen Punkte

$$\varrho_1 T_i^k = e^k E_i; \quad \varrho_2 T_i^k = e^k B_i; \quad \varrho_3 T_i^k = b^k E_i$$

enthält, wobei $b^1, b^2, b^3; B_1, B_2, B_3$ Konstanten sind, die die Relationen

$$(e'B) = (b'E) = 0; \quad (b'B) \neq 0$$

erfüllen. Von einem, einem willkürlichen Punkte in G_3

$$\varrho T_i^k = \varrho_1 e^k E_i + \varrho_2 e^k B_i + \varrho_3 b^k E_i$$

zugeordneten Linienelemente ist die Gerade

$$(a'x): \quad \varrho_2 \varrho_3 e^{m_1} E_{m_1} (b'B) (e'x) = 0$$

nur dann unbestimmt, wenn $\varrho_2 = 0$ oder $\varrho_3 = 0$ ist. Da Rechnungen, ausgehend vom Punkte $(u'A) = 0$, zu analogen Resultaten führen, dürfen wir aussprechen:

„Dann und nur dann ist das Linienelement (a', A) unbestimmt, wenn der Punkt T sich entweder auf der Geraden

$$(5) \quad \varrho T_i^k = e^k (\varrho_1 E_i + \varrho_2 B_i)$$

oder auf der Geraden

$$(6) \quad e T_i^k = (e_1 e^k + e_3 b^k) E_i$$

befindet.“

Eine einfache Parameterdarstellung dieser Geraden in G_3 ist noch

$$e T_i^k = e^k B_i \quad \text{und} \quad e T_i^k = b^k E_i,$$

wobei wieder $(e' B) = (b' E) = 0$. Die Punkte von G_3 außerhalb dieser Geraden ($e_1 e_3 \neq 0$) haben alle (e', E) als Bildelement. Auf (5) liegen die Bildpunkte der ∞^2 Elemente mit $(e' A) = 0$; während (6) die Bildpunkte der ∞^2 Elemente mit $(a' E) = 0$ enthält⁵⁾.

§ 4.

Ein willkürlicher siebendimensionaler Raum G_7 habe die Gleichung

$$p_k^i T_i^k = p^i T_i^k p_k = 0.$$

Wir definieren jetzt P_1 und P_2 folgendermaßen:

$$P_1 = e^i p_i^k E_k = (e' p) (p' E),$$

$$P_2 = e^i p_i^k p_k^l E_l,$$

wonach $P_1 = 0$ bedeutet, daß G_3 den Punkt

$$e T_i^k = e^k E_i$$

enthält. Ist $P_1 = P_2 = 0$, so geht G_3 durch eine der Geraden (5) oder (6) hindurch. Um dieses zu zeigen, führen wir die willkürlichen Konstanten $b^1, b^2, b^3; \bar{b}^1, \bar{b}^2, \bar{b}^3$ mit

$$(b' E) = 0; \quad (\bar{b}' E) \neq 0; \quad (b' \bar{b}' e') \neq 0$$

ein. Wir formen darauf das Produkt $(b' \bar{b}' e') P_2$ mit Hilfe der quadratischen Identitäten⁶⁾ um, benutzen dabei $P_1 = (b' E) = (e' E) = 0$ und bekommen

$$(b' \bar{b}' e') P_2 = b^i p_i^k E_k \cdot (e' p) (p' \bar{b}' e') = 0$$

oder, wenn wir

$$(\bar{b}' e')_{22} = B_1; \quad (\bar{b}' e')_{31} = B_2; \quad (\bar{b}' e')_{12} = B_3$$

setzen und damit die Konstanten $\bar{b}^1, \bar{b}^2, \bar{b}^3$ ersetzen durch die neuen B_1, B_2, B_3 , für die $(e' B) = 0$ gilt:

$$(b' \bar{b}' e') P_2 = b^i p_i^k E_k \cdot e^j p_j^l B_l = 0.$$

⁵⁾ Die Kollineation (1) ist für $(a' E) = 0$ und für $(e' A) = 0$ singular zweiter Art. Die Geraden (5) und (6) bilden also den Durchschnitt von G_4 und der Varietät v_4^2 (van Veen, I. c., § 5).

⁶⁾ Weitzenböck, I. c., S. 34—35 (Kap. I, § 19).

Zieht das Verschwinden des ersten Faktors $P_1 = 0$ nach sich, so geht G_3 durch (6). Ist dagegen $P_2 = 0$ wegen des Verschwindens des zweiten Faktors, so enthält G_3 die Gerade (5).

Der eindeutig bestimmte Punkt P :

$$\begin{aligned} \varrho T_{m_1}^{m_1} &= e^{m_1} E_{m_1} \neq 0; & \varrho T_{m_2}^{m_1} &= 0; & \varrho T_{m_3}^{m_1} &= 0; \\ \varrho T_{m_1}^{m_2} &= e^{m_2} E_{m_2} + \alpha e^{m_1} E_{m_1}; & \varrho T_{m_2}^{m_2} &= \alpha e^{m_1} E_{m_2}; & \varrho T_{m_3}^{m_2} &= \alpha e^{m_1} E_{m_3}; \\ \varrho T_{m_1}^{m_3} &= e^{m_3} E_{m_3}; & \varrho T_{m_2}^{m_3} &= 0; & \varrho T_{m_3}^{m_3} &= 0 \end{aligned}$$

liegt in G_4 , was daraus hervorgeht, daß seine Koordinaten (2) befriedigen. Aus der Tatsache, daß zwischen den Koordinaten von P nicht die Relation $T_{m_k}^k E_k = 0$ besteht, ergibt sich weiter, daß der siebendimensionale Raum mit dieser Gleichung G_4 nicht ganz enthält. (2) und (4) sind linear unabhängig und definieren immer G_3 (siehe § 3).

P liegt in G_3 , wenn

$$P_0 = p^{m_1} (e' p) E_{m_2} + \alpha e^{m_1} (p' E) p_{m_2} = 0.$$

Hinreichend und notwendig für das ganz innerhalb G_3 Liegen von G_4 ist, daß $P_0 = 0$ ist und daß G_3 sowohl die Gerade (5), als auch die Gerade (6) enthält. Für $\alpha \neq -1$ dürfen wir $T_{m_2}^k E_k = 0$ ersetzen durch

$$T_i^i = 0,$$

weil dieser Raum wohl die Geraden (5) und (6), aber nicht den Punkt P enthält. Für $\alpha = -1$ ist dieses nicht erlaubt, da jetzt G_4 völlig und damit auch P zu dem Raume $T_i^i = 0$ gehört.

§ 5.

Der Bildpunkt des Linienelementes (a', A) liegt in G_3 , wenn

$$p_k^i \{A_i (a' E) e^k + \alpha E_i (e' A) a^k\} = 0$$

oder

$$(a' E) (e' p) (p' A) + \alpha (a' p) (p' E) (e' A) = 0$$

erfüllt ist. Zusammen mit jedem Punkte $(u' A) = 0$ bildet eine einzige Gerade $(a' x)$:

$$(e' p) (p' A) (A E x) + \alpha (p' E) (e' A) (A p x) = 0$$

ein Linienelement der gewünschten Beschaffenheit. Deshalb ist dem G_3 das System der ∞^2 Linienelemente zugeordnet, die Tangentialelemente sind von den Kurven, die man beim Auflösen der totalen Differentialgleichung

$$(7) \quad (e' p) (p' x) (E x, dx) + \alpha (p' E) (e' x) (p x, dx) = 0$$

bekommt. Diese läßt sich für $P_1 \neq 0$ integrieren durch Multiplikation mit dem Faktor:

$$\frac{(1 - \alpha) P_1^2 [(p' E) (E p x)]^{\alpha-2}}{\{(1 - \alpha) P_1 (e' p) (p' x) + \alpha P_2 (e' x)\}^{\alpha+1}}$$

und führt zum System von W -Kurven erster Art:

$$\frac{(\epsilon' x) [(p' E) (E p x)]^{a-1}}{\{(1-\alpha) P_1 (\epsilon' p) (p' x) + \alpha P_2 (\epsilon' x)\}^a} = \text{Konstante.}$$

Im Falle

$$P_1 = 0; \quad P_2 \neq 0$$

berechnen wir $(u' E) = 0$ aus

$$(\epsilon' p) (p' E) = 0; \quad (\epsilon' E) = 0$$

und finden

$$(u' E): \quad (u' \epsilon' p') (\epsilon' p) = 0.$$

Substitution in (7) ergibt:

$$(\epsilon' p) (\epsilon' q) (\epsilon' x) (p' x) (q', dx) - (\epsilon' p) (\epsilon' q) (p' x) (q' x) (\epsilon', dx) + \alpha (\epsilon' q) (\epsilon' p' q') (\epsilon' x) (p x, dx) = 0.$$

Dabei sind $p'_i = p^k p_i$ und $q'_i = q^k q_i$ äquivalente Größen und Symbole. Die Differentialgleichung hat als Eulerschen Multiplikator:

$$\frac{2 \epsilon^{m_1}}{(\epsilon' x)^2}$$

und besitzt die Integralkurven

$$\frac{\epsilon^{m_1} [(\epsilon' p) (p' x)]^2 - 2 \alpha \operatorname{sign} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot (\epsilon' q) (\epsilon' p' q') (\epsilon' x) (p_{m_1} x_{m_2} - p_{m_2} x_{m_1})}{(\epsilon' x)^2} = \text{Konstante.}$$

Die Kurven zweiter Ordnung dieses Büschels berühren einander vierpunktig im Punkte $(u' E) = 0$ und haben als gemeinsame Tangente $(\epsilon' x) = 0$.

Ist $P_1 = P_2 = 0$ wegen

$$(b' p) (p' E) \equiv 0 \quad \{b'; (b' E) = 0\},$$

so gilt

$$p_{m_2} (p' E) \cdot (u' E) = E_{m_2} (u' p) (p' E)$$

und die zum Punkte $(u' A) = 0$ gehörende Gerade

$$(a' x): \quad E_{m_2} (\epsilon' p) (p' A) (A E x) + \alpha p_{m_2} (p' E) (\epsilon' A) (A E x) = 0$$

ist die Verbindungsgerade von $(u' A) = 0$ und $(u' E) = 0$, wenn nicht

$$E_{m_2} (\epsilon' p) (p' A) + \alpha p_{m_2} (p' E) (\epsilon' A) = 0$$

ist. Die Punkte der Linienelemente, die den nicht auf der Geraden (6) liegenden Punkten des Durchschnittes von G_3 und G_4 entsprechen, fallen auf die durch $(u' E) = 0$ gehende Gerade⁷⁾ (vgl. Ende § 7):

$$E_{m_2} (\epsilon' p) (p' x) + \alpha p_{m_2} (p' E) (\epsilon' x) = 0.$$

⁷⁾ Alle zugehörigen Kollineationen (1) besitzen diese Gerade als singuläre Gerade. Die Ebene ist der Durchschnitt von G_4 und R'_i (van Veen, l. c., § 3).

Dual mit dem letzten Resultat läßt sich zeigen, daß, wenn $P_1 = P_2 = 0$ ist wegen

$$(e'p)(p'B) \equiv 0 \quad \{B; (e'B) = 0\},$$

die Geraden der Elemente, die zu den nicht auf der Geraden (5) liegenden Punkten des Durchschnitts von G_3 und G_4 gehören, durch den auf $(e'x) = 0$ liegenden Punkt^{*)}

$$p^{m_1}(e'p)(u'E) + \alpha e^{m_1}(u'p)(p'E) = 0$$

gehen. Enthält G_3 den Raum G_3 und ist also

$$(b'p)(p'E) \equiv 0 \quad \{b'; (b'E) = 0\},$$

$$(e'p)(p'B) \equiv 0 \quad \{B; (e'B) = 0\}$$

und

$$p^{m_1}(e'p) \cdot (e'x) = e^{m_1}(e'p)(p'x),$$

so ist dem Punkte $(u'A) = 0$ die Gerade

$$(a'x): p^{m_1}(e'p)(e'A)E_{m_2}(AEx) + \alpha e^{m_1}(e'A)(p'E)p_{m_2}(AEx) = 0$$

oder

$$P_0(e'A)(AEx) = 0$$

zugeordnet. Demnach: Wenn G_4 nicht innerhalb G_3 liegt ($P_0 = 0$), so geht von den zugeordneten Linienelementen entweder die Gerade durch $(u'E) = 0$, oder es liegt der Punkt auf $(e'x) = 0$.

§ 6.

Mittels sechs willkürlicher Konstanten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3; \varrho^1, \varrho^2, \varrho^3$, von denen eine überzählig ist, läßt sich die Gleichung jedes siebendimensionalen Raumes, der mit G_4 dieselbe Ebene wie G_3 gemeinsam hat, auf die Gestalt bringen:

$$p_k^i T_i^k + e^i T_i^k \varrho_k + \varrho^i T_i^k E_k - \{(e'\varrho) + \alpha(\varrho'E)\} \frac{T_i^i}{1+\alpha} = 0.$$

Wenn $P_1 \neq 0$ ist, entspricht diesem Raume dasselbe Büschel W -Kurven wie G_3 . Da dieses Kurvensystem durch die Durchschnittsebene mit G_4 bestimmt ist, nennen wir in diesem Paragraphen

$$p_k^i T_i^k = 0$$

kurz die Gleichung einer willkürlichen Ebene V von G_4 .

Das Büschel bestimmt ein Dreieck, dessen eine Seite $(e'x) = 0$ ist, während die anderen

$$(p'x): (1-\alpha)P_1(e'p)(p'x) + \alpha P_2(e'x) = 0$$

^{*)} Alle zugehörigen Kollineationen (1) besitzen diesen Punkt als singulären Punkt. Die Ebene ist der Durchschnitt von G_4 und R_5 (van Veen, I. c., § 3).

und

$$(EFx): (p'E)(Ep x) = 0$$

sind. Gegenüber $(f'x) = 0$ liegt die Ecke $(u'E) = 0$, gegenüber $(e'x) = 0$ die Ecke

$$(u'F): (\alpha - 1) P_1(u'p)(p'E) + P_2(u'E) = 0.$$

Gleichzeitig mit dem Büschel W -Kurven ist also der Ebene V das Linien-element (f', F) eindeutig zugeordnet.

Der Stempelwert λ_{aef} , des nicht-entarteten Elemente-Tripels⁹⁾, das durch ein willkürliches Tangentialelement (a', A) einer der W -Kurven (siehe § 5) und die Linienelemente (e', E) und (f', F) gebildet wird, erfüllt wegen

$$\begin{aligned} (a'E) &= -\alpha (e'A)(p'E)(AEp), \\ (a'F) &= (q'E)(AEq) \{(\alpha - 1) P_1(e'p)(p'A) - \alpha P_2(e'A)\}, \\ (f'A) &= (1 - \alpha) P_1(e'p)(p'A) + \alpha P_2(e'A), \\ (f'E) &= (1 - \alpha) P_1^2 = -(e'F) \end{aligned}$$

die Bedingung¹⁰⁾

$$\lambda_{aef} = -\frac{(a'E)(e'F)(f'A)}{(a'F)(f'E)(e'A)} = \alpha.$$

Umgekehrt ist jedes Linienelement (a', A) , das mit (e', E) und (f', F) ein nicht-entartetes Tripel mit

$$\lambda_{aef} = \alpha$$

bildet, Tangentialelement von einer der W -Kurven. Denn aus

$$(a'E)(e'F)(f'A) + \alpha (a'F)(f'E)(e'A) = 0$$

oder nach Substitution der Koeffizienten von $(u'F) = 0$ und $(f'x) = 0$ und Teilung durch $(1 - \alpha)^2 P_1^2$ aus

$$(a'E)(e'p)(p'A) + \alpha (a'p)(p'E)(e'A) = 0$$

und $(a'A) = 0$ folgt, daß zu jedem Punkte $(u'A) = 0$ eine und nicht mehr als eine Gerade gehört, und zwar dieselbe wie in § 5.

Letztere Eigenschaft benutzen wir, um beim jetzt ganz willkürlichen Linienelement (f', F) mit

$$(e'F)(f'E) \neq 0; \quad (f'F) = 0$$

die zugeordnete Ebene V aufzufinden. Wenn wir A_1, A_2 und A_3 als Parameter betrachten und danach den Ort der Bildpunkte in G_4 der Linienelemente

$$\begin{cases} (u'A) = 0, \\ (e'f)(f'A)(AE x) + \alpha (f'E)(e'A)(AF x) = 0 \end{cases}$$

⁹⁾ $(a'E)(a'F)(e'A)(e'F)(f'A)(f'E) \neq 0$. Siehe G. H. A. Grosheide F. Wzn, *Flakke punt-lijn-figuren bepaald door invariantenwaarden*. Dissertation, Amsterdam 1937, S. 7—9 (Kap. I, § 1).

¹⁰⁾ Siehe Math. Enc. III D 4, S. 208, Eigenschaft (3).

suchen, erhalten wir

$$u^i T_i^* x_k = (u' A) (f' E) (A E F) (e' x) \\ - (u' E) (e' F) (f' A) (A E x) - \alpha (u' E) (e' A) (f' E) (A F x).$$

Multiplikation mit $(e' F)$ und danach identisches Umformen führt diese Parameterdarstellung über in

$$u^i T_i^* x_k = (e' A) (A E F) \{(u' F) (f' E) (e' x) + \alpha (u' E) (e' F) (f' x)\} \\ + (1 - \alpha) (e' A) (e' F) (f' A) \{(u' E) (E F x)\} + (A E F)^3 \{(u' e' f') (e' x)\}.$$

Die drei nicht-kollinearen Punkte

$$(u' F) (f' E) (e' x) + \alpha (u' E) (e' F) (f' x) = 0,$$

der Bildpunkt von (f', F) ,

$$(u' E) (E F x) = 0,$$

der auf der Geraden (6) liegende Bildpunkt des Linienelementes $(u' F) = 0$, $(E F x) = 0$ und

$$(u' e' f') (e' x) = 0,$$

der auf der Geraden (5) liegende Bildpunkt des Linienelementes $(u' e' f') = 0$, $(e' x) = 0$, wodurch V bestimmt ist, liegen alle im siebendimensionalen Raume $f^i T_i^* F_k = 0$, der wegen $(e' F) (f' E) \neq 0$ nicht G_4 in sich faßt. Deshalb dürfen wir verabredetermaßen

$$f^i T_i^* F_k = 0$$

die Gleichung der (f', F) entsprechenden Ebene V nennen.

§ 7.

Aus der Verwandtschaft von § 6 folgt sofort eine Relation zwischen den Punkten und den Ebenen in G_4 . Ist $P_1 \neq 0$, dann ordnen wir der Ebene V

$$p_k^i T_i^* = 0$$

den darin liegenden Punkt S , (S_1^1, \dots, S_3^3)

$$u^i S_i^* x_k = P_1 (u' p) (p' E) (e' x) + \alpha P_1 (u' E) (e' p) (p' x) \\ - (1 + \alpha) P_2 (u' E) (e' x)$$

zu, der Bildpunkt des der Ebene V entsprechenden Elementes (f', F) ist. Wenn

$$p_k^i = f^i F_k \quad [i, k = 1, 2, 3; (f' F) = 0]$$

ist, wird die Gleichung des Punktes

$$u^i S_i^* x_k = (u' F) (f' E) (e' x) + \alpha (u' E) (e' F) (f' x).$$

Umgekehrt gehört zum Punkte S , der nicht in G_3 liegt, so daß wegen $S_{m_2}^k E_k \neq 0$ für sein Bildelement (f', F) , $(e' F) (f' E) \neq 0$ gilt, die Ebene

$$(e^{m_1} S_{m_2}^i S_i^i - e^i S_{m_1}^{m_1} S_{m_2}^i) T_i^* (E_{m_1} S_{m_2}^i S_{m_1}^{m_1} - S_{m_2}^{m_1} S_{m_2}^i E_{m_1}) = 0.$$

Wir beantworten jetzt zuerst die Frage, ob die Bildebene eines willkürlichen Punktes R , (R_1^1, \dots, R_3^3) dieser letzten Ebene den Punkt S enthält. Hat R zum Bildelemente (g', G), so muß unabhängig von der Wahl von R aus

$$(f'G)(g'E)(e'F) + \alpha(f'E)(e'G)(g'F) = 0$$

die Gleichung folgen:

$$(g'F)(f'E)(e'G) + \alpha(g'E)(e'F)(f'G) = 0.$$

Dieses ist nur dann der Fall, wenn $\alpha^2 = 1$ oder wegen $\alpha \neq 1$, wenn $\alpha = -1$ ist (siehe § 9). Wohl können für $\alpha \neq -1$ Punkte gefunden werden, die mit S in involutorischer Beziehung stehen. Es sind, abgesehen von den Punkten, deren Bildelement bezüglich (e', E) eine spezielle Lage einnimmt und die also ebenfalls in G_3 liegen, die Punkte, für deren Bildelement gilt:

$$(f'G) = (g'F) = 0.$$

Was ist von den Punkten R und S zu sagen, wenn (f', F) und (g', G) den beiden letzten Bedingungen genügen, d. h. wenn entweder der Punkt ($u'G$) = 0 mit ($u'F$) = 0 oder die Gerade ($g'x$) = 0 mit ($f'x$) = 0 zusammenfällt?

Alle Geraden durch den Punkt ($u'F$) = 0 sind wie folgt darzustellen

$$(g'x): (EFx) + \varrho_1(f'x) = 0.$$

Denn es ist ($e'F$)($f'E$) $\neq 0$. Der Ort der Bildpunkte aller Elemente, wozu ($u'F$) = 0 gehört, ist

$$u^i R_i^k x_k = \alpha(u'E)(e'F)(EFx) + \varrho_1\{(u'F)(f'E)(e'x) + \alpha(u'E)(e'F)(f'x)\},$$

d. h. die Verbindungsgerade von S und dem Schnittpunkte der dem Punkte S zugeordneten Ebene mit der Geraden (6). Auf gleiche Weise ist jeder Punkt der Geraden ($f'x$) = 0 darzustellen durch

$$(u'G): (u'e'f') + \varrho_2(u'F) = 0$$

und der Ort der Bildpunkte aller Elemente, wozu ($f'x$) = 0 gehört, durch:

$$u^i R_i^k x_k = (u'e'f')(f'E)(e'x) + \varrho_2\{(u'F)(f'E)(e'x) + \alpha(u'E)(e'F)(f'x)\}.$$

Diese Gerade verbindet S und den Schnittpunkt seiner Bildebene mit der Geraden (5).

Sehr einfach ist noch zu beweisen, daß die Bildpunkte aller Elemente, deren Geraden durch ($u'F$) = 0 gehen, eine Fläche zweiter Ordnung bestimmen. Für ein solches Element ist nämlich:

$$(EFx) + \varrho_1(f'x) = 0,$$

$$(u'E)(e'F) + \varrho_1(u'e'f') + \varrho_2(u'F) = 0,$$

und für seinen Bildpunkt gilt:

$$\begin{aligned} \varrho_1^2(u'e'f')(f'E)(e'x) + \varrho_1\varrho_2\{(u'F)(f'E)(e'x) + \alpha(u'E)(e'F)(f'x)\} \\ + \varrho_1(u'E)(e'F)(f'E)(e'x) + \varrho_2\alpha(u'E)(e'F)(EFx) = 0. \end{aligned}$$

Die Bildpunkte aller Elemente

$$\begin{aligned}(u' e' f') + \varrho_2 (u' F) &= 0, \\ (f' E) (e' x) + \varrho_1 (f' x) + \varrho_2 (EFx) &= 0,\end{aligned}$$

deren Punkte auf $(f' x) = 0$ liegen, bilden die Fläche zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}\varrho_2^2 \alpha (u' E) (e' F) (EFx) + \varrho_1 \varrho_2 \{ (u' F) (f' E) (e' x) + \alpha (u' E) (e' F) (f' x) \} \\ + \varrho_2 \alpha (u' E) (e' F) (f' E) (e' x) + \varrho_1 (u' e' f') (f' E) (e' x) = 0.\end{aligned}$$

Die beiden Flächen schneiden sich längs der Geraden (5) und (6) und längs der soeben gefundenen Geraden, welche die mit S involutorischen Punkte enthalten. Sie zerfallen für $(f' E) = 0$ und $(e' F) = 0$ (vgl. in § 5 den Fall $P_1 = P_2 = 0$).

§ 8.

Jede Gerade L von G_4 ist zu bestimmen als Durchschnitt von zwei Ebenen

$$f' T_i^k F_k = 0 \quad \text{und} \quad g' T_i^k G_k = 0 \quad (f' F) = (g' G) = 0.$$

Falls die Gleichungen

$$f' T_i^k F_k = 0 \quad \text{und} \quad f' T_i^k G_k = 0 \quad (f' F) = (f' G) = 0$$

gelten, gehört L zum zweiten, falls

$$f' T_i^k F_k = 0 \quad \text{und} \quad g' T_i^k F_k = 0 \quad (f' F) = (g' F) = 0$$

gelten, zum ersten der in § 7 gefundenen Netze. Ist sowohl $(e' F) (f' E) \neq 0$, als $(e' G) (g' E) \neq 0$, dann muß (a', A) , soll es Bildelement eines Punktes der Geraden L sein, gemäß § 6 den Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}(a' A) &= 0, \\ \lambda_{aef} &= - \frac{(a' E) (e' F) (f' A)}{(a' F) (f' E) (e' A)} = \alpha, \\ \lambda_{aeg} &= - \frac{(a' E) (e' G) (g' A)}{(a' G) (g' E) (e' A)} = \alpha.\end{aligned}$$

Elimination von (A_1, A_2, A_3) ergibt für die Gerade $(a' x) = 0$ die Bedingung:

$$\begin{aligned}\alpha (a' F) (e' G) (f' E) (a' e' g') - \alpha (a' G) (e' F) (g' E) (a' e' f') \\ + (a' E) (e' F) (e' G) (a' f' g') = 0.\end{aligned}$$

Die Geraden aller Bildelemente bilden die Kurven zweiter Klasse:

$$\begin{aligned}(8) \quad \alpha (u' F) (u' e' g') (e' G) (f' E) - \alpha (u' G) (u' e' f') (e' F) (g' E) \\ + (u' E) (u' f' g') (e' F) (e' G) = 0\end{aligned}$$

und dual dazu ihre Punkte die Kurve zweiter Ordnung:

$$(9) \quad \alpha (f' E) (g' E) (e' x) (FGx) + (e' F) (g' E) (f' x) (EGx) \\ - (e' G) (f' E) (g' x) (EFx) = 0.$$

Beide Kurven zerfallen, wie Untersuchung ihrer Diskriminanten lehrt, wegen $\alpha \neq 1$ nur dann, wenn

$$\lambda_{efg} = 1$$

oder

$$(e' f' g') (EFG) = 0$$

ist. Ist der erste Faktor gleich Null, so gibt es zwei Konstanten ϱ_1 und ϱ_2 derart, daß

$$(f' x) = \varrho_1 (e' x) + \varrho_2 (g' x).$$

Die Gleichung der Ebene durch L und den Punkt $e' E_k$:

$$u^i T_i^k x_k = (e' G) (g' E) f^i T_i^k F_k - (e' F) (f' E) g^i T_i^k G_k$$

ist jetzt auf die Gestalt zu bringen:

$$\varrho_1 (e' G) e^i T_i^k F_k + \varrho_2 g^i T_i^k \{(e' G) F_k - (e' F) G_k\} = 0,$$

woraus hervorgeht, daß die Ebene die Gerade (5) enthält und also L diese Gerade schneidet. Auf gleiche Weise folgt aus $(EFG) = 0$, daß L die Gerade (6) schneidet.

Für $\lambda_{efg} \neq 1$ stellen (8) und (9) im allgemeinen nicht denselben Kegelschnitt dar. Dann war der Geraden L ein Linienelementverein zugeordnet. Ebenen Kurven ($P_1 \neq 0$) zugeordnete Linienelementvereine müssen, wie wir fanden, W -Kurven sein. Diese besitzen aber, einzelne Werte von α ausgenommen, nicht die Ordnung zwei.

Durch die Einschränkungen $(e' F) (f' E) \neq 0$ und $(e' G) (g' E) \neq 0$ werden nur die Geraden durch den Punkt $e' E_k$ ausgeschlossen. Jede nicht in G_3 liegende Gerade durch diesen Punkt ist wie folgt darzustellen:

$$\begin{cases} f^i T_i^k F_k = 0 & (f' E) = (f' F) = 0; (e' F) \neq 0, \\ g^i T_i^k G_k = 0 & (e' G) = (g' G) = 0; (g' E) \neq 0. \end{cases}$$

Wenden wir jetzt die in § 5 für $P_1 = P_2 = 0$ gefundenen Resultate an, so sehen wir, daß von den Bildelementen der nicht mit $e' E_k$ zusammenfallenden Punkte von L alle Geraden durch den auf $(e' x) = 0$ liegenden Punkt $(u' G) = 0$ gehen, während alle Punkte auf der durch $(u' E) = 0$ gehenden Geraden $(f' x) = 0$ liegen.

Gehört L zu G_3 , so entspricht jedem seiner Punkte außerhalb der Geraden (5) und (6) das Element (e', E) (vgl. § 3, Ende).

§ 9.

Die lineare Transformation

$$\varrho_1 x_i^* = d_i^k x_k = d_i (d' x)$$

und die dazu kontragrediente Transformation

$$\varrho_2 u_i^k = u^i D_i^k = (u' D) D^k$$

führen das Basiselement (e', E) über in

$$(u'_* d) (d' E) = 0; \quad (e' D) (D' x^*) = 0$$

und das willkürliche Linienelement (a', A) in

$$(u'_* d) (d' A) = 0; \quad (a' D) (D' x^*) = 0.$$

In G_9 wird jetzt die Transformation induziert:

$$\begin{aligned} u'_* T_i^{n*} x_k^* &= (u'_* d) (d' A) a^i D_i^k d_k^l E_l (e' D) (D' x^*) \\ &\quad + \alpha (u' d) (d' E) e^i D_i^k d_k^l A_l (a' D) (D' x^*), \end{aligned}$$

oder auch, wegen

$$d_k^l D_i^k = 0 \quad (i \neq l); \quad d_k^k D_i^k = 3 A,$$

nach Teilung durch $3 A$:

$$\begin{aligned} u'_* T_i^{n*} x_k^* &= (u'_* d) (d' A) (a' E) (e' D) (D' x^*) + \alpha (u'_* d) (d' E) (e' A) (a' D) (D' x^*) \\ &= u'_* d_i^k T_k^l D_l^m x_m^*. \end{aligned}$$

Wir wählen eine derartige Transformation, daß das Basiselement (e', E) nach Weglassung des Zeichens $*$ die Gleichungen

$$u'_3 = 0; \quad x_1 = 0 \quad (m_1 = 1; m_2 = 3; m_3 = 2)$$

bekommt. Die Gleichungen von G_4 sind im neuen Koordinatensystem:

$$T_1^2 = T_1^3 = T_2^2 = T_2^3 = 0; \quad \alpha T_1^1 = T_2^3,$$

so daß wir (p_0, p_1, p_2, p_3) folgendermaßen definieren können:

$$\varrho \alpha p_0 = \alpha T_1^1 = T_2^3; \quad \varrho p_1 = T_1^1; \quad \varrho (1 - \alpha) p_2 = T_2^2; \quad \varrho (1 - \alpha) p_3 = T_1^2.$$

Einem willkürlichen Punkte p von G_4 zugeordnet ist nach § 2 das Element

$$(a' x): \quad (p_1 p_2 + \alpha p_0 p_3) x_1 + (\alpha - 1) p_0 p_2 x_2 - \alpha p_0^2 x_3 = 0,$$

$$(u' A): \quad u^1 p_0^2 + u^2 p_0 p_1 + u^3 (p_0 p_3 + p_1 p_3) = 0$$

und einem willkürlichen Linienelemente (a', A) der Punkt

$$\{(1 - \alpha) a^3 A_1; (1 - \alpha) a^3 A_2; \alpha a^2 A_1; a^3 A_3 + \alpha a^1 A_1\}.$$

Der Fall $\alpha = -1$, wo unsere Abbildung übergeht in eine von Lie angegebene, ist ausführlich von Beck untersucht worden. Die Bedingung¹¹⁾ $2l_2m_1 = l_3m_0$, die $\alpha = -1$ äquivalent ist, erscheint bei Beck notwendig, weil er das zur Lieschen Abbildung gehörige Nullsystem voraussetzt. Die W -Kurven sind jetzt Kegelschnitte und der Raum

$$T'_i = 0,$$

der invariant ist für die induzierte Transformation, umfaßt G_4 .

¹¹⁾ Beck, l. c., S. 546 (Kap. I, § 4).

(Eingegangen am 30. 3. 1938.)

On the fundamental geometrical properties of Linearly measurable plane sets of points (III).*)

Von

A. S. Besicovitch in Cambridge (England).

The fundamental property of regular sets is the existence of the tangent at almost all points of the set. This paper is devoted to the study of irregular sets, and a general structural property is established, whose importance in the class of irregular sets is comparable to that of the existence of the tangent in the class of regular sets. This property is given by Theorem 4.

We shall recall first the notation and some definitions. We denote

by $c(a, r)$ the circle centre a and radius r ,

by (a, θ) the line (infinite in both directions) in the plane of coordinates through the point a and making an angle θ with the positive direction of the X -axis,

by (θ_1, θ_2) the angle between the directions θ_1, θ_2 ,

by $\{a, (\theta_1, \theta_2)\}$ the part of the plane with given coordinate axes included in the angle, whose vertex is a and whose sides make angles θ_1, θ_2 with the positive direction of the X -axis.

by $\{a, (\theta_1, \theta_2), r\}$ the part of $\{a, (\theta_1, \theta_2)\}$ included in $c(a, r)$, i. e. the set $\{a, (\theta_1, \theta_2)\} \times c(a, r)$,

by $\{a, ((\theta_1, \theta_2))\}$ the sum of the two opposite angles

$$\{a, (\theta_1, \theta_2)\} + \{a, (\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)\},$$

by $\{a, ((\theta_1, \theta_2)), r\}$ the sum of the two opposite sectors

$$\{a, (\theta_1, \theta_2), r\} + \{a, (\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi), r\}.$$

Let E be a plane linearly measurable set. The upper limit, the lower limit and the limit of the ratio

$$\frac{L[E \times \{a, (\theta_1, \theta_2), r\}]]}{2r}, \quad \text{as } r \rightarrow 0,$$

are called the upper density, the lower density and the density of the set E in the angle (θ_1, θ_2) at the point a and are denoted by

$$D^*\{a, (\theta_1, \theta_2), E\}, \quad D_*\{a, (\theta_1, \theta_2), E\} \quad \text{and} \quad D\{a, (\theta_1, \theta_2), E\}.$$

*) Paper (II) under the same title has been published in *Math. Annalen* 115 (1938). The literature to the question is given there.

Similarly the limits of

$$\frac{L[E \times \{a, ((\theta_1, \theta_2)), r\}]}{2r}, \quad \text{as } r \rightarrow 0,$$

are called densities in $((\theta_1, \theta_2))$ and are denoted by

$$D^*\{a, ((\theta_1, \theta_2)), E\}, \quad D_*\{\dots\}, \quad D\{\dots\}.$$

We have

$$D^*\{a, (\theta_1, \theta_2), E\} \leq D^*\{a, ((\theta_1, \theta_2)), E\}$$

$$D^*\{a, (\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi), E\} \leq D^*\{a, ((\theta_1, \theta_2)), E\}$$

and hence

$$(1) \quad \frac{1}{2} D^*\{a, (\theta_1, \theta_2), E\} + \frac{1}{2} D^*\{a, (\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi), E\} \leq D^*\{a, ((\theta_1, \theta_2)), E\}.$$

We have proved in paper (II) the

Theorem 1. *Given an irregular set E and an arbitrary angle (θ_1, θ_2) , $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$, the following inequality holds at almost all points of E :*

$$(2) \quad D^*\{a, (\theta_1, \theta_2), E\} + D^*\{a, (\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi), E\} \geq \frac{1}{3} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}.$$

From this theorem we conclude at once that (2) holds at almost all points of E for all rational $\theta_1, \theta_2 (> \theta_1)$ and hence for all real $\theta_1, \theta_2 (> \theta_1)$. This, together with (1) leads us to the following

Theorem 2. *Given an irregular set the following inequality*

$$(3) \quad D^*\{a, ((\theta_1, \theta_2)), E\} \geq \frac{1}{6} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

holds at almost all points a of E for all θ_1 and $\theta_2 > \theta_1$.

Definition 1. θ is said to be a condensation direction of the first kind of the set E at the point a if the line (a, θ) meets the set E at infinitely many points in the neighbourhood of a . (a, θ) is called a condensation line of the first kind of E at a .

Definition 2. θ is said to be a condensation direction of the second kind of the set E at the point a if given any positive numbers q, ϱ, ε there exist

$$0 < r < \varrho, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad \theta_2 - \theta_1 < \varepsilon,$$

such that

$$\frac{L[E \times \{a, ((\theta_1, \theta_2)), r\}]}{2r} > q(\theta_2 - \theta_1).$$

(a, θ) is called a condensation line of the second kind.

Definition 3. A point a is said to be a point of radiation of the set E if almost all directions are condensation directions (of either kind) of the set E at the point a .

Theorem 3. *Almost all points of an irregular set are points of radiation.*

For the proof of the theorem we have to consider certain sets of straight lines (a, θ) through the same point.

If A be such a set of lines (a, θ) we shall denote by $\langle A \rangle$ the set of the values of θ corresponding to the lines of A . Thus $\langle A \rangle$ is a numerical set. When speaking of the measurability and of the measure of a set A we shall always mean measurability and the Lebesgue measure of $\langle A \rangle$. Thus if A is the set of lines (a, θ) for all $\theta_1 < \theta < \theta_2$ then $\langle A \rangle$ is the open numerical interval (θ_1, θ_2) and $\text{meas } \langle A \rangle = \theta_2 - \theta_1$. Similarly if A is the set of lines (a, θ) where θ belongs to the set $I = \Sigma (\varphi'_i, \varphi''_i)$ of non-overlapping intervals then $\langle A \rangle = I$ and $\text{meas } \langle A \rangle = \Sigma (\varphi''_i - \varphi'_i)$.

Lemma 1. *The set of lines joining a point a to the points of an open set in the plane is measurable.*

Lemma 2. *The set of lines joining a point a to the points of a set, which is the intersection of an enumerable set of open sets, is measurable.*

Lemma 3. *If E is a bounded plane set of linear measure zero and a a point at a positive distance from E , then the set of lines joining a to the points of E is of measure zero.*

Lemma 4. *If E is any plane set of linear measure zero and a any point of the plane, then the set of lines joining a to the points of E is of measure zero.*

Lemma 5. *Any linearly measurable set E can be represented as the difference of two sets*

$$E = E_1 - E_2$$

where E_1 is the intersection of an enumerable set of open sets and E_2 a set of linear measure zero.

Lemma 6. *The set of lines joining a point a to the points of a linearly measurable set E , is measurable.*

Lemma 7. *At every point a of the plane the set of condensation directions, of the first kind, of a linearly measurable set E is measurable.*

For, the set $G(a, r)$ of the lines joining a to the points of $E \times c(a, r)$ is measurable and the set $G(a)$ of condensation directions of the first kind is

$$G(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G\left(a, \frac{1}{n}\right).$$

We pass now to the proof of the theorem. Let a be an arbitrary point of E at which (3) holds for all $\theta_1, \theta_2 (> \theta_1)$. If at every such point $\text{meas } \langle G(a) \rangle = \pi$ then the theorem is proved.

Suppose now that there exists a point a such that $\text{meas } \langle G(a) \rangle < \pi$. Then, given $\varepsilon > 0$, there exists $\rho > 0$ such that

$$\text{meas } \langle G(a, r) \rangle < \text{meas } \langle G(a) \rangle + \varepsilon \quad \text{for } r < \rho.$$

The set $\langle G(a, r) \rangle$ is everywhere dense on $(0, \pi)$. For if there were an interval (θ_1, θ_2) containing no number of $\langle G(a, r) \rangle$ then the pair of opposite sectors $\{a, ((\theta_1, \theta_2)), r\}$ would not contain any point of E and we should have

$$D^* \{a, ((\theta_1, \theta_2)), E\} = 0$$

contrary to (3).

We introduce now a new set.

Given positive numbers ϱ, δ, q the set $H(a, \varrho, \delta, q)$ of directions θ is defined in the following way.

Any direction θ belongs to or does not belong to the set $H(a, \varrho, \delta, q)$ according as there exist or do not exist numbers r, θ_1, θ_2 such that

$$(4) \quad \begin{aligned} \theta < r < \varrho, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad \theta_2 - \theta_1 < \delta, \\ L[E \times \{a, ((\theta_1, \theta_2)), r\}] \geq q(\theta_2 - \theta_1) 2r. \end{aligned}$$

We shall prove that *almost all lines* (a, θ) *which do not belong to* $G(a)$, *belong to* $H(a, \varrho, \delta, q)$.

Let θ be an arbitrary number of $(0, \pi)$ for which $D\{\theta, \langle G(a) \rangle\} = 0$. To any $0 < \eta < \delta$, however small, there exist θ_1, θ_2 such that

$$(5) \quad \begin{aligned} 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi, \quad \theta_2 - \theta_1 < \eta, \\ \text{meas } \{\langle G(a) \rangle (\theta_1, \theta_2)\} < \frac{1}{60} q^{-1} (\theta_2 - \theta_1). \end{aligned}$$

Take now a number $\varrho' < \varrho$ such that

$$(6) \quad \text{meas } \{\langle G(a, \varrho') \rangle - \langle G(a) \rangle\} < \frac{1}{60} q^{-1} (\theta_2 - \theta_1).$$

By (5), (6)

$$(7) \quad \text{meas } \{\langle G(a, \varrho') \rangle (\theta_1, \theta_2)\} < \frac{1}{30} q^{-1} (\theta_2 - \theta_1).$$

Now by (3) there exists $r < \varrho'$ such that

$$(8) \quad L[E \{a, ((\theta_1, \theta_2)), r\}] > \frac{1}{6} \left(\sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) 2r > \frac{1}{15} (\theta_2 - \theta_1) 2r$$

(δ is small enough for the last part of the inequality to be true).

If we have

$$L[E \{a, ((\theta_1, \theta_2)), r\}] > q(\theta_2 - \theta_1) 2r$$

then θ belongs to $H(a, \varrho, \delta, q)$. If not, then it follows from (7) that we can find a set $I = \Sigma (\varphi'_i, \varphi''_i)$ of non-overlapping intervals in $(0, \pi)$ such that

$$I \supset \langle G(a, \varrho') \rangle (\theta_1, \theta_2)$$

and that

$$(9) \quad \text{meas } I = \Sigma (\varphi''_i - \varphi'_i) < \frac{1}{30} q^{-1} (\theta_2 - \theta_1).$$

We write

$$I = I' + I''$$

where I' consists of those intervals $(\varphi'_i, \varphi''_i)$ for which

$$L[E\{a, ((\varphi'_i, \varphi''_i)), r\}] > q(\varphi''_i - \varphi'_i) 2r$$

and I'' of the remaining ones. Then

$$\begin{aligned} \sum_{I''} L[E\{a, ((\varphi'_i, \varphi''_i)), r\}] &\leq q 2r \sum_{I''} (\varphi''_i - \varphi'_i) \\ &< q 2r \text{ meas } I'' \leq q 2r \text{ meas } I \end{aligned}$$

and by (9)

$$(10) \quad \sum_{I'} L[E\{a, ((\varphi'_i, \varphi''_i)), r\}] < \frac{1}{30} (\theta_2 - \theta_1) 2r.$$

But all the points of $E\{a, ((\theta_1, \theta_2)), r\}$ lie on the lines of $G(a, r)$ and *a fortiori* of $G(a, \varrho')$, and consequently all lie in the set of pairs of opposite sectors

$$\sum_I \{a, ((\varphi'_i, \varphi''_i)), r\}.$$

Therefore by (8), (10)

$$(11) \quad \sum_I L[E \times \{a, ((\varphi'_i, \varphi''_i)), r\}] > \frac{1}{30} (\theta_2 - \theta_1) 2r.$$

The set I' can be included in a set J of non-overlapping intervals (ψ'_k, ψ''_k) , all in (θ_1, θ_2) , such that for each of them

$$(12) \quad L[E\{a, (\psi'_k, \psi''_k), r\}] = q(\psi''_k - \psi'_k) 2r.$$

By (11), (12)

$$\text{meas } J > \frac{1}{30} q^{-1} (\theta_2 - \theta_1).$$

From (12) it follows also that the direction θ , for any $\theta \in J$, belongs to $H(a, \varrho, \delta, q)$ and thus

$$\text{meas } \{\langle H(a, \varrho, \delta, q) \rangle (\theta_1, \theta_2)\} > \frac{1}{30} q^{-1} (\theta_2 - \theta_1).$$

As $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, and as $\theta_2 - \theta_1$ can be as small as we please we conclude that the Lebesgue density of $\langle H(a, \varrho, \delta, q) \rangle$ at θ is different from 0.

Thus for all θ for which the density of $\langle G(a) \rangle$ is 0, i. e. for almost all θ of $(0, \pi) - \langle G(a) \rangle$, the density of $\langle H(a, \varrho, \delta, q) \rangle$ is different from 0.

As now

$$D\{\theta, \langle H(a, \varrho, \delta, q) \rangle\} = 0$$

for almost all θ which do not belong to $\langle H(a, \varrho, \delta, q) \rangle$ we conclude that almost all θ of $(0, \pi) - \langle G(a) \rangle$ belong to $\langle H(a, \varrho, \delta, q) \rangle$.

An immediate corollary of this is that almost all points of $(0, \pi) - \langle G(a) \rangle$ belong to

$$(13) \quad \Pi H(a, \varrho, \delta, q)$$

where the product is extended over all systems of rational positive values of ϱ, δ, q . But by the definition any direction of the set (13) is a condensation direction of the second kind of the set E at the point a . Thus

almost all lines through a which do not belong to $G(a)$ are lines of condensation of the second kind of the set E .

From this the theorem follows at once.

Lemma 8. *Given measurable sets E_1, E_2, \dots, E_n, E on a line, such that every point of E belongs to at least k of the sets E_1, E_2, \dots, E_n , then*

$$\text{meas } E_1 + \text{meas } E_2 + \dots + \text{meas } E_n \geq k \text{ meas } E.$$

For let $f_i(x)$ be the characteristic function of E_i for $i = 1, 2, \dots, n$, and $f(x)$ the characteristic function of E , and let the interval (p, q) include all the sets. We have

$$f_1(x) + \dots + f_n(x) \geq kf(x).$$

Hence

$$\int_p^q \{f_1(x) + \dots + f_n(x)\} dx \geq k \int_p^q f(x) dx,$$

i. e.

$$\text{meas } E_1 + \text{meas } E_2 + \dots + \text{meas } E_n \geq k \text{ meas } E.$$

Lemma 9. *Given a linearly measurable set E of finite measure and E_x its orthogonal projection on the X -axis. If every point of E_x is the projection of infinitely many points of E , then $\text{meas } E_x = 0$.*

Suppose that the set E is included between the lines $y = c$ and $y = d$. Let N be a positive integer. Take the lines

$$y = c + k(d - c)2^{-N}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^N$$

and denote by $E(k, N)$ the part of E belonging to the strip

$$c + k(d - c)2^{-N} \leq y < c + (k + 1)(d - c)2^{-N}$$

and by $E_x(k, N)$ its projection. Take now another integer $n < 2^N$ and form the set

$$F(n, N) = \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^n E_x(k_i, N)$$

the summation being extended over all

$$0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq 2^N.$$

$F(n, N)$ is measurable and

$$F(n, N) \subset F(n, N + 1)$$

for any N . It is easy to see that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F(n, N) \supset \lim_{N \rightarrow \infty} F(n + 1, N)$$

and that

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} F(n, N) = E_x.$$

Now every point of $F(n, N)$ belongs to at least n of the sets $E_x(k, N)$. Therefore by Lemma 8

$$\sum_{k=0}^{2N} \text{meas } E_x(k, N) \geq n \text{ meas } F(n, N)$$

and as the measure of any set is \geq measure of its projection

$$\sum L E(k, N) \geq n \text{ meas } F(n, N)$$

and consequently

$$L E \geq n \text{ meas } F(n, N).$$

This being true for any N and n , we conclude from (14) that

$$\text{meas } E_x = 0$$

which proves the lemma.

If a be a point of the given plane and (a, θ) , $0 \leq \theta < \pi$, a line of this plane we shall represent it by the point on the perpendicular at a to the plane at a distance θ from a .

Any set of elements (a, θ) we shall always consider as the set of points representing every element. From this point of view we shall speak of closed sets, open sets, measurable sets of elements (a, θ) .

Lemma 10. *Let E be a (bounded) closed plane set of points. The set G of condensation directions of the first kind of E at all points of E (i. e. the set of (a, θ) where a runs through all points of E , and for a fixed a , θ runs through all condensation directions at a) is B -measurable.*

Given $\varrho > 0$ and $n > 1$ join every point α of E to all other points of E , whose distance from α is $\leq \varrho$ and $\geq \frac{1}{n} \varrho$. Denote by $L(\varrho, n)$ the set of all these lines. Obviously $L(\varrho, n)$ is closed. Writting

$$L(\varrho) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\varrho, n)$$

we have

$$G = \lim_{\varrho \rightarrow 0} L(\varrho)$$

and the B -measurability of G follows.

Lemma 11. *Let E be a B -measurable set of finite linear measure. The set Q of condensation directions of the second kind at all points of E is B -measurable.*

Let ϱ, δ, q be positive numbers. We define the set $k(\varrho, \delta, q)$ of elements (a, θ) in the following way. The element (a, θ) (a may or may not belong

to E) belongs to or does not belong to $k(\varrho, \delta, q)$ according as there exist or do not exist numbers

$$\theta_1 < \theta < \theta_2, \quad \theta_2 - \theta_1 < \delta, \quad r < \varrho$$

such that

$$LE\{a, ((\theta_1, \theta_2)), r\} > q \cdot 2r(\theta_2 - \theta_1).$$

Observe

- (i) that together with (a, θ) , also all (a, θ') , $\theta_1 < \theta' < \theta_2$, belong to $k(\varrho, \delta, q)$

and

- (ii) that the set E being irregular

$$L[E\{a, ((\theta_1, \theta_2)), r\}]$$

is a continuous function of a .

From these two remarks it follows that $k(\varrho, \delta, q)$ is an open set.

It is easy to see that the set Q_1 defined as the product

$$Q_1 = \prod k(\varrho, \delta, q)$$

extended over all systems of rational values for ϱ, δ, q is B -measurable. This is the set of all condensation directions of the second kind of E (not only at points of E , but at all points of the plane).

Denote by E_1 the set of elements (a, θ) where a runs through all points of E and θ takes, for every a , all values between 0 and π . The set E_1 is B -measurable and

$$Q = Q_1 \times E_1$$

from which the lemma follows.

With our new notation Theorem 3 can be expressed in the following way.

For almost every point a of E , (a, θ) belongs to $G + Q$ for almost all values of θ in $(0, \pi)$.

By an argument similar to that employed for proving the Fubini theorem on measurable sets of many dimensions and on multiple integration¹⁾ we can prove that for almost every θ the set of points a of E for which (a, θ) belongs to G and the set for which it belongs to Q are measurable and (a, θ) belongs to $G + Q$ for almost all points of E .

Let θ_0 be such a direction and assume E to be a closed set of finite linear measure. Write $E = E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(0)}$ where $E^{(1)}$ is the set of all points of E for which θ_0 is a condensation direction of the first kind, $E^{(2)}$ the set of those points of E for which θ_0 is a condensation direction of the second kind, but not of the first, and $E^{(0)}$ the remaining set of points, which is of measure 0.

¹⁾ S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, p. 169—175.

Project E from the direction θ_0 on a line X , perpendicular to θ_0 , and denote by $E_x^{(1)}, E_x^{(2)}, E_x^{(0)}$ the projections of $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(0)}$. Obviously

$$\text{meas } E_x^{(0)} = 0.$$

On $E_x^{(1)}$ is projected a measurable part of E and on each point of $E_x^{(1)}$ are projected infinitely many points of E . Consequently by Lemma 8

$$\text{meas } E_x^{(1)} = 0.$$

Now to every point a_x of $E_x^{(2)}$ and to an arbitrarily large q corresponds an interval $(a_x - h, a_x + h)$, as small as we please, on which is projected a part of the set E of measure $\geq 2qh$. From this we conclude that

$$\text{meas } E_x^{(2)} = 0.$$

This proves the

Theorem. *The projection of a closed irregular set of finite linear measure on almost all directions is of measure zero.*

But by Lemma 3 of my paper II any linearly measurable set E of finite measure can be represented in the form

$$E = E_1 + E_2$$

where E_1 is contained in a closed set of the same measure, and LE_2 is as small as we please. Then from the preceding theorem immediately follows

Theorem 4. *The Projection of an irregular linearly measurable set of finite measure on almost all directions is of measure zero²⁾.*

²⁾ Long ago I thought that this theorem was true and I suggested to Mr Gillis that he should investigate from this side sets of upper density $\frac{1}{2}$. By an ingenious method Gillis arrived at some partial results concerning this class of sets. He has also studied sets of directions from which an irregular set can be projected into a set of positive measure and he has constructed a set for which the set of such directions has the power of continuum in any angle, however small. I have quoted his papers in my paper II.

Study of extreme cases with respect to the densities of irregular linearly measurable plane sets of points.

Von

D. R. Dickinson in Cambridge (England).

Introduction.

§ 1.

We shall first recall some definitions. We denote by U a convex area, including or not including its boundary, and by $A(E, \varrho)$ a finite or enumerable set of convex areas including the plane set E , each area having diameter less than ϱ . Denoting generally by d the diameter of an area we write

$$L^*E = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \sum_{A(E, \varrho)} d,$$

and we call L^*E the *exterior linear measure* of the set E . We say that E is (linearly) measurable if, for every set W of finite exterior measure, the relation

$$L^*W = L^*\{E \times W\} + L^*\{W - E \times W\}$$

is satisfied, and we then denote the number L^*E by LE and call it the *linear measure* of E .

Now let E be a measurable set of points, and let a be any point of the plane, whether belonging to E or not. We denote by $c(a, r)$ the circle with centre a and radius r , and by $\{a, (\theta_1, \theta_2), r\}$ the part of $c(a, r)$ included in the angle with vertex a whose sides make angles θ_1, θ_2 ($\theta_1 < \theta_2$) with the positive direction of the x -axis. Consider the ratio

$$\frac{L\{E \times c(a, r)\}}{2r}.$$

The lower limit, the upper limit, and the limit (if it exists) of this ratio as $r \rightarrow 0$ are called the *lower density*, the *upper density*, and the *density* of E at the point a , and are denoted by

$$D_*(a, E), \quad D^*(a, E), \quad D(a, E).$$

Similarly, the limits of

$$\frac{L\{E \times \{a, (\theta_1, \theta_2), r\}\}}{2r}$$

as $r \rightarrow 0$ are called densities of E at the point a in the angle (θ_1, θ_2) , and are denoted by

$$D_*\{a, (\theta_1, \theta_2), E\}, \quad D^*\{a, (\theta_1, \theta_2), E\}, \quad D\{a, (\theta_1, \theta_2), E\}.$$

Any point of E at which the density exists and is equal to 1 is called a *regular point* of E , any other point of E is called an *irregular point*. If almost all points of E (i. e. all points with the exception of a subset of linear measure zero) are regular points, E is called a *regular set* and if almost all points are irregular points, E is an *irregular set*. It is known¹⁾ that the set of all regular points of a measurable set is a regular set, and the set of all irregular points is an irregular set, so that in dealing with measurable sets it is sufficient to consider only regular and irregular sets.

The purpose of this paper is to show that certain bounds obtained for the densities of an irregular set are the best possible. Considering first upper densities A. S. Besicovitch has given the following bounds²⁾.

Theorem A. *For almost all points a of an irregular set E ,*

$$\begin{aligned} 0 &\leq D^* \{a, (\theta, \theta + \varphi), E\} \leq \frac{1}{2} & \text{for } 0 < \varphi \leq \frac{1}{2} \pi, \\ 0 &\leq D^* \{a, (\theta, \theta + \varphi), E\} \leq \sin \frac{1}{2} \varphi & \text{for } \frac{1}{2} \pi < \varphi < \pi, \\ \frac{1}{2} &\leq D^* \{a, (\theta, \theta + \varphi), E\} \leq 1 & \text{for } \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

In Chapter I I consider an irregular set P such that, for any value of φ , the bounds given in Theorem A are attained for some value of θ , with the exception of the lower bound when $\varphi > \pi$. With regard to this excepted case, it should be added³⁾ that there exists a set E such that for almost all points of E ,

$$D^* (a, E) = \frac{1}{2}.$$

Turning now to lower densities, no lower bound is given for the lower density in an angle greater than π and in Chapter II I consider an irregular set Q which shows that

$$D_* \{a, (\theta, \theta + \varphi), E\}$$

can be zero for φ as near 2π as we please, while $D_* (a, E) > 0$. For an angle not exceeding π Gillis and Besicovitch have proved³⁾ that

$$D_* \{a, (\theta, \theta + \varphi), E\} = 0 \quad (\varphi \leq \pi),$$

and the results established in Chapter III for the set R show that π is the largest angle for which this is always true. They show, in fact, that

$$D_* \{a, (\theta, \theta + \varphi), E\}$$

can take the value $\frac{1}{2}$ (probably the largest possible value even for circular density) for $\varphi > \pi$ and as near π as we please.

¹⁾ A. S. Besicovitch, On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points (II), *Math. Annalen* 115 (1938), § 8, p. 304; § 9, p. 306.

²⁾ A. S. Besicovitch, On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points, *Math. Annalen* 98 (1927), § 11, pp. 431—434.

³⁾ A. S. Besicovitch, l. c. (II), § 14, p. 317.

The sets here discussed are slight modifications of the sets given in Chapter XII of Mr. Besicovitch's paper. The modifications introduced considerably simplify the calculations involved.

I should like to express my thanks to Mr. Besicovitch for the interest he has taken in this paper, and also for many helpful suggestions.

Chapter I.

§ 2.

Set P .

Take an isosceles triangle T_1 with vertices at the points

$$(\tfrac{1}{2}b, 0), \quad (-\tfrac{1}{2}b, 0), \quad (0, h),$$

and an integer n , greater than 1.

We shall construct inside T_1 $n \cdot 4^{n+1}$ isosceles triangles with their bases parallel to the base of T_1 and each of length $b/n \cdot 4^{n+1}$, and such that in each triangle the ratio of the height to the base is equal to half the corresponding ratio for T_1 . We proceed as follows. We first divide each sloping side of T_1 into $(2n-1)4^n$ equal segments and, taking each point of division with the exception of the vertex, we describe one of our triangles having this point as one of the end-points of its base. We shall refer to the $2(2n-1)4^n$ triangles thus obtained as the "side triangles" of T_1 . We now divide the middle-half of the base of T_1 into $2 \cdot 4^n$ equal segments and, taking the mid-point of each segment, we describe one of our triangles having this point as the mid-point of its base. We shall call the resulting $2 \cdot 4^n$ triangles the "base triangles" of T_1 .

We have now constructed $n \cdot 4^{n+1}$ triangles as required. Observe that the sum of all their bases is b , while the sum of the bases of the base triangles is only $b/2n$. The construction of all these triangles we shall call the operation O_n on the triangle T_1 .

Apply operation O_2 to T_1 , and denote by T_2 the set of triangles thus obtained. Next apply operation O_3 to each of the triangles of T_2 , and denote the set of all the resulting triangles by T_3 , and so on. We shall also denote by T_1, T_2, T_3, \dots the sets of points inside and on the boundaries of triangles of T_1, T_2, T_3, \dots . Let

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} T_n.$$

The set P is closed, being a product of closed sets.

§ 3.

We first give some results for the sets $\{T_n\}$ of triangles.

Let Δ_n be any triangle of T_n , and denote its base by b_n and its height by h_n . Then

$$b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)4^{n+1}} b_n,$$

$$h_n = \frac{b_n}{2^{n-1}} \cdot \frac{h}{b}.$$

(I) Observing that b_{n+1} is small in comparison with h_n , and that all base triangles are on the middle-half of the base, we conclude that, ε being an arbitrary fixed positive number, the distance between any side triangle and any base triangle of Δ_n is greater than

$$\frac{1}{2} h_n (1 - \varepsilon)$$

for all sufficiently large values of n .

(II) It is easily seen that the horizontal distance between consecutive side triangles of Δ_n is large in comparison with b_{n+2} .

(III) The distance between consecutive base triangles of Δ_n is seen to be large compared with b_{n+1} and, since h_n is also large compared with b_{n+1} , we conclude that the distance between a base triangle of Δ_n and any other triangle of T_{n+1} is large compared with b_{n+1} .

Now let U be a convex area of diameter d containing points of at least two of the triangles of T_{n+1} described in Δ_n , and denote by S the sum of the bases of triangles of T_{n+2} described in Δ_n which have points belonging to U . We shall show that for sufficiently large values of n ,

$$S < d(1 + \varepsilon).$$

Write

$$S = S' + S'',$$

where S' is the sum of the bases of triangles of T_{n+2} which are described in the base triangles of Δ_n and have points belonging to U , and S'' is the sum of the bases of triangles of T_{n+2} which are described in the side triangles of Δ_n and have points belonging to U . Observe that if U contains points of a single side triangle of Δ_n , then it contains points of at least one base triangle. We have immediately, by (III),

Lemma 1. For sufficiently large values of n ,

$$S' < \frac{\varepsilon}{2} d$$

and further, if U contains points of at most one side triangle of Δ_n ,

$$S'' < \frac{\varepsilon}{2} d.$$

Now write

$$d_x = u \cdot bd \cdot (|x_1 - x_2|)$$

for all pairs $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ of points of U .

Lemma 2. If U contains points of at least two side triangles of Δ_n , then for sufficiently large values of n ,

$$S'' < d_x \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Denote by U_x the vertical strip (of width d_x) bounding U . At most two of the side triangles of Δ_n having points in common with U will have points outside U_x . There are two cases to be considered according as to whether U_x does or does not contain points of any of the base triangles (triangles of T_{n+2}) of such triangles. In the latter case we have, by (II),

$$S'' < d_x,$$

and it follows that in the first case S'' cannot exceed d_x by more than the sum of the bases of the base triangles of two side triangles of Δ_n — i. e. by more than $b_{n+1}/(n+2)$. But in this case d_x is greater than $b_{n+1}/4$. This proves Lemma 2.

We now have immediately, from Lemmas 1 and 2,

Lemma 3. For sufficiently large values of n ,

$$S < d(1 + \varepsilon).$$

§ 4.

Theorem 1.

$$LP = b.$$

We have immediately, since T_n contains P for each value of n , and also the diameter of each triangle of T_n is equal to its base for sufficiently large values of n ,

$$(1) \quad LP \leq \sum_{T_n} d = b.$$

Now denote by ϱ_n the least distance between any two triangles of T_n , and let U be a convex area of diameter d less than ϱ_n , containing points of P as interior points. Then U contains points of only one of the triangles of T_n , and there exists an integer $N (\geq n)$ such that U contains points of only one triangle, Δ_N say, of T_N , but points of at least two of the triangles of T_{N+1} . By Lemma 3 we have, denoting by S the sum of the bases of triangles of T_{N+1} which have points belonging to U ,

$$(2) \quad S < d(1 + \varepsilon)$$

for sufficiently large values of N , and thus for sufficiently large values of n — say for $n \geq n_0$. Observe that we can choose n_0 independent of the particular convex area U , but that N depends on U .

Now let $A(P, \varrho_{n_0})$ be any set of convex areas covering P , each of which has diameter less than ϱ_{n_0} . Since P is closed it is contained in a finite selection,

$$U_1, U_2, \dots, U_r$$

say, of the areas of $A(P, \varrho_{n_0})$. Let M denote the greatest of the values of N for each of these areas, and let S_i denote the sum of the bases of triangles of T_{M+2} which have points belonging to U_i (diameter d_i). Then, in virtue of (2),

$$S_i < d_i(1 + \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

and, summing these inequalities, we have

$$b < (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^r d_i.$$

It follows that

$$(3) \quad LP \geq b$$

and comparing (1) and (3), we have

$$LP = b.$$

Corollary. *The measure of the subset of P contained in any triangle of any T_n is equal to the base of the triangle.*

§ 5.

Before proceeding to evaluate densities of the set P we shall define a certain subset $P^{(1)}$ of P and show that

$$L(P - P^{(1)}) = 0.$$

Each point a of P is determined uniquely by a sequence $\{\Delta_n\}$ of triangles such that, for every n ,

(i) Δ_n belongs to T_n ,

(ii) a is a point of Δ_n .

$P^{(1)}$ is defined to be the subset of all points a of P such that, in the sequence of triangles determining a , there is an infinity of values of n for which Δ_{n+1} is a base triangle of Δ_n .

Theorem 2. $L(P - P^{(1)}) = 0.$

Denote by P_m the subset of all points a of P such that, in the sequence of triangles determining a , Δ_{n+1} is never a base triangle of Δ_n if $n \geq m$. If $m' > m$ then the sum of the bases of triangles of $T_{m'}$ which contain points of P_m is

$$b \prod_{n=m}^{m'-1} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

and, since the infinite product

$$\prod_{n=m}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

diverges to zero, we conclude that

$$LP_m = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Now

$$P - P^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} P_m,$$

and is thus of measure zero.

§ 6.

Theorem 3. *For almost all points of P ,*

$$D_*(a, P) = 0.$$

Let a be any point of the set $P^{(1)}$, and choose n so that Δ_{n+1} is a base triangle of Δ_n . It follows from remark (III) of § 3 that we can describe a circle $c(a, r_n)$ containing points of none of the triangles of T_{n+1} with the exception of Δ_{n+1} , and such that

$$r_n \rightarrow 0, \quad \frac{b_{n+1}}{r_n} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Hence

$$D_*(a, P) = 0$$

for all points of $P^{(1)}$.

Corollary. *P is an irregular set.*

§ 7.

We now show that the lower bound, namely zero, given in Theorem A of the Introduction for the upper density in an angle less than π is the best possible.

Theorem 4. *If $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, then for all points of P ,*

$$D^*\{a, (\pi + \theta, 2\pi - \theta), P\} = 0.$$

Denote by ϱ_n , as before, the least distance between any two triangles of T_n , and let a be a point of P and $\{a, (\pi + \theta, 2\pi - \theta), r\}$ a sector containing points of P as interior points, and such that $r < \varrho_n$. Then, as in Theorem 1, there exists an integer $N (\geq n)$ such that the sector contains points of only one triangle, Δ_N , of T_N , but points of at least two of the triangles of T_{N+1} . For sufficiently large values of n , the point a will lie in one of the side triangles of Δ_N and the sector will contain points of no other side triangle. For it is easily seen that the gradient of a side of any triangle of T_{N+1} and the gradient of a line joining adjacent end-points of the bases of consecutive side triangles of Δ_N both tend to zero as n tends to infinity, and we have only to choose n so large that these gradients are both less than $\tan \theta$. It now follows, by Lemma 1 of § 3, that

$$L[P \times \{a, (\pi + \theta, 2\pi - \theta), r\}] < 2\epsilon r$$

for all sufficiently small values of r . This proves the theorem.

§ 8.

The theorem which follows shows that the upper bound, namely $\sin \frac{1}{2}\varphi$, given for the upper density in an angle φ when $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$ is the best possible.

Theorem 5. If $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, then for almost all points of P ,

$$D^* \{a, (\theta, \pi - \theta), P\} = \cos \theta.$$

After Theorem A,

$$D^* \{a, (\theta, \pi - \theta), P\} \leq \cos \theta$$

for $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ and for almost all points of P . Thus it is sufficient to prove that for almost all points of P ,

$$D^* \{a, (\theta, \pi - \theta), P\} \geq \cos \theta,$$

and we prove that this inequality is satisfied for all points of the subset $P^{(1)}$ considered in § 5.

Let a be a point of $P^{(1)}$, and let n be chosen so that, in the sequence of triangles determining a , Δ_{n+1} is a base triangle of Δ_n . Let y_n denote the distance of the point a from the nearer of the two sides of Δ_n . For large n

$$(1) \quad y_n > \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) h_n.$$

Consider the sector

$$\{a, (\theta, \pi - \theta), y'_n\}$$

where

$$y'_n = y_n \left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right) \operatorname{cosec} \theta.$$

Observe that, since the gradient of a side of Δ_n tends to zero as n tends to infinity, the bounding radii of the sector will both intersect the sides of Δ_n if n is sufficiently large. Let n be chosen so that this is true, and denote by x_n the horizontal distance between the points of intersection. These points are near the points of intersection of the bounding radii with the horizontal line distant y_n from a . The distance between these two points is obviously $2y_n \cot \theta$ and thus for sufficiently large values of n ,

$$x_n > 2y_n \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) \cot \theta.$$

Take a segment of a side of Δ_n whose length is great in comparison with b_{n+1} . The sum of bases of the side-triangles abutting upon such a segment is equal asymptotically to the length of the segment. Observing that by (1) x_n is large in comparison with b_{n+1} , and that for large values of n the bounding radii of the sector each intersect at most one of the side triangles of Δ_n , we conclude that, for sufficiently large values of n , the sum of the bases of the side triangles of Δ_n which lie inside the sector is greater than

$$x_n \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

We shall then have

$$\begin{aligned} L[P \times \{a, (\theta, \pi - \theta), y_n'\}] &> 2y_n \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^3 \cot \theta \\ &> 2y_n' (1 - \varepsilon) \cos \theta, \end{aligned}$$

which proves the theorem.

§ 9.

The following theorem shows that the upper bound, namely 1, given for the upper density in an angle $\geq \pi$ is the best possible.

Theorem 6. *For almost all points of P ,*

$$D^* \{a, (0, \pi), P\} = 1.$$

After Theorem A, it is sufficient to prove that for almost all points of P ,

$$D^* \{a, (0, \pi), P\} \geq 1,$$

and we prove that this inequality is satisfied for all points of the subset $P^{(1)}$.

Let a be a point of $P^{(1)}$, and denote by δ_n the distance of a from the end point of the base of Δ_n which is nearer to a . It is evident that, for all sufficiently large values of n ,

$$\frac{L[P \times \{a, (0, \pi), \delta_n\}]}{2\delta_n} > 1 - \varepsilon$$

whenever Δ_{n+1} is a base triangle of Δ_n . This proves the theorem.

§ 10.

Considering finally the upper bound, namely $\frac{1}{2}$, given for the upper density in an angle not exceeding $\frac{1}{2}\pi$, we have

Theorem 7. *If $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, then for almost all points of P ,*

$$D^* \{a, (-\theta, \theta), P\} = \frac{1}{2}.$$

After Theorem A, it is sufficient to prove that for almost all points of P ,

$$D^* \{a, (-\theta, \theta), P\} \geq \frac{1}{2},$$

and we prove that this inequality is satisfied for all points of $P^{(1)}$.

Let a be a point of $P^{(1)}$. Then, with the notation of § 9, it is evident that, for all sufficiently large values of n ,

$$L [P \times \{a, (-\theta, \theta), \delta_n\}] > \delta_n (1 - \varepsilon)$$

whenever Δ_{n+1} is a base triangle of Δ_n . This proves the theorem.

Chapter II.

§ 11.

Set Q .

We now alter slightly the operation O_n on the triangle T_1 considered in § 2 in forming the set P . The side triangles of T_1 remain the same, but the $2 \cdot 4^n$ base triangles are now placed symmetrically about the mid-point of the base in such a way that the distance between consecutive ones is equal to the base of any one of them — i. e. to $b/n \cdot 4^{n+1}$. The base triangles are thus much closer together than before. As before, we define sets T_1, T_2, T_3, \dots of triangles, and we write

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty} T_n.$$

§ 12.

Theorem 1.

$$LQ = \frac{1}{2}b.$$

Denote by ϱ_n the least distance between any two triangles of T_n , and let U be a convex area of diameter d less than ϱ_n , containing points of Q as interior points. Then, as in the case of the set P , there exists an integer $N (\geq n)$ such that U contains points of only one triangle, Δ_N say, of T_N , but points of at least two of the triangles of T_{N+1} . Let S' denote the sum of the bases of triangles of T_{N+1} which are described in the base triangles of Δ_n and have points belonging to U , and S'' the sum of the bases of triangles

of T_{N+2} which are described in the side triangles of Δ_N and have points belonging to U , and write

$$S = S' + S''.$$

If U contains points of at least one side triangle of Δ_N then, observing that if $S' \neq 0$, d is large in comparison with b_{N+1} , we conclude that for sufficiently large values of n ,

$$(1) \quad S' < \frac{1}{2} d (1 + \varepsilon).$$

We have also, by Lemma 2 of § 3,

$$(2) \quad S'' < d (1 + \varepsilon)$$

for sufficiently large values of n , and then, if (1) is also satisfied,

$$(3) \quad S < \frac{3}{2} d (1 + \varepsilon).$$

Further, if U contains points of only base triangles of Δ_N then

$$(4) \quad S < \frac{2}{3} d$$

for all values of n . It follows from (3) and (4), exactly as for the set P , that

$$(5) \quad LQ \geq \frac{2}{3} b.$$

Now, taking each triangle of T_n , describe a rectangle on its base of length b_n/n and height h_n (where b_n , h_n denote the base and height respectively of a triangle of T_n) so as to include all base triangles. Denote the set of all such rectangles by R_n . Next describe rectangles similarly on the bases of all triangles of T_{n+1} not entirely included in R_n , and denote this set of rectangles by R_{n+1} , and so on. Write

$$R^{(n)} = \sum_{p=0}^{\infty} R_{n+p}.$$

Observe that

$$L(Q - Q \times R_n) < \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) b,$$

$$L\{Q - Q \times (R_n + R_{n+1})\} < \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2(n+2)}\right) b,$$

and so on. Since the infinite product

$$\prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2(n+p)}\right)$$

diverges to zero we conclude that

$$L(Q - Q \times R^{(n)}) = 0,$$

so that the set $R^{(n)}$ of rectangles contains almost all points of Q . Now for large values of n the height of each rectangle of R_{n+p} is small in comparison

with its base, and thus its diameter is nearly equal to its base. Also the sum of the bases of triangles of T_{n+p+1} entirely included in a rectangle of R_{n+p} may be assumed to be greater than

$$\frac{2}{3}d(1-\varepsilon),$$

where d is the diameter of the rectangle. For the sum of the bases of side-triangles of T_{n+p+1} contained in a rectangle of R_{n+p} is asymptotically equal to the base of the rectangle, and the sum of the bases of the base-triangles to the half-base. As the sum of the bases of triangles of T_{n+1} entirely included in R_n and of triangles of T_{n+2} entirely included in R_{n+1} , and so on, is obviously $\leq b$ we conclude that

$$\sum_{R^{(n)}} d < \frac{2}{3}b(1-\varepsilon)^{-1},$$

and it follows that

$$(6) \quad LQ = L(Q \times R^{(n)}) \leq \frac{2}{3}b.$$

Comparing (5) and (6) we now have

$$LQ = \frac{2}{3}b.$$

§ 13.

We now give upper and lower bounds for the lower circular density of Q .
Theorem 2. *For almost all points of Q ,*

$$D_*(a, Q) \leq \frac{1}{3}.$$

Denote by $Q^{(1)}$ the subset of all points a of Q such that, in the sequence $\{\Delta_n\}$ of triangles determining a , there is an infinity of values of n for which Δ_{n+1} is a base triangle of Δ_n . We have (cf. § 5)

$$L(Q - Q^{(1)}) = 0.$$

Now let a be any point of $Q^{(1)}$, and consider the circle $c(a, b_{n+1})$. For sufficiently large values of n we have, whenever Δ_{n+1} is a base triangle of Δ_n ,

$$L\{Q \times c(a, b_{n+1})\} = L\{Q \times \Delta_{n+1}\} = \frac{2}{3}b_{n+1},$$

and hence

$$D_*(a, Q) \leq \frac{1}{3}$$

for all points of $Q^{(1)}$.

Corollary. Q is an irregular set.

Theorem 3. *For all points of Q ,*

$$D_*(a, Q) \geq \frac{1}{3}.$$

Let a be any point of Q , and consider a circle $c(a, r)$ such that

$$b_{n+1} \leq r < b_n.$$

It is easily seen⁴⁾ that, for sufficiently large values of n ,

$$L\{Q \times c(a, r)\} > \frac{1}{2} r (1 - \varepsilon),$$

and hence

$$D_*(a, Q) \geq \frac{1}{2}$$

for all points of Q .

§ 14.

We shall now show that, although the lower circular density of Q is positive, we can find an angle as near 2π as we please in which the lower density is zero for almost all points of Q .

Theorem 4. *If $0 < \eta < \pi$, then for almost all points of Q ,*

$$(1) \quad D_*(a, (\eta, 2\pi - \eta), Q) = 0.$$

Take a positive integer m , and let Q_m denote the subset of all points a of Q such that, in the sequence of triangles determining a , there is an infinity of values of n for which Δ_{n+1} is a side triangle of Δ_n whose horizontal distance from the left-hand-end-point of the base of Δ_n is less than b_n/mn . Let

$$Q^{(3)} = \prod_{m=1}^{\infty} Q_m.$$

We have (cf. § 5)

$$L(Q - Q_m) = 0, \quad (m = 1, 2, \dots),$$

and hence

$$L(Q - Q^{(3)}) = 0,$$

and we show that (1) holds for all points of $Q^{(3)}$.

Let a be a point of $Q^{(3)}$, and choose n so that Δ_{n+1} is a side triangle of Δ_n whose horizontal distance from the left-hand-end-point of the base of Δ_n is less than b_n/mn .

Consider the sector $\{a, (\eta, 2\pi - \eta), r_n\}$, where r_n is the least horizontal distance between consecutive side triangles of Δ_{n-1} . Thus

$$r_n = \frac{b_n}{2n-1}.$$

Observe that for sufficiently large values of n ,

(i) the sector contains points of none of the triangles of T_n other than Δ_n ,

(ii) it contains points of none of the base triangles of Δ_n ,

and (iii) its bounding radii intersect only one of the side triangles of Δ_n — viz. the triangle Δ_{n+1} .

⁴⁾ The most unfavourable case is when Δ_{n+1} is an end base triangle of Δ_n and $c(a, r)$ contains points of only base triangles of Δ_n .

We then have

$$L[Q \times \{a, (\eta, 2\pi - \eta), r_n\}] < \frac{1}{m} (b_n + b_{n+1}),$$

and therefore

$$\frac{L[Q \times \{a, (\eta, 2\pi - \eta), r_n\}]}{2r_n} < \frac{1}{m}$$

for sufficiently large values of n . This proves the theorem, since m is arbitrary.

Chapter III.

§ 15.

Set R .

Take a positive integer m , and define

$$\begin{aligned} f_m(x) &= +\frac{1}{m} 2^{-m^2} \text{ for } (2k-1)2^{-m^2} < x \leq 2k \cdot 2^{-m^2} \\ &= -\frac{1}{m} 2^{-m^2} \text{ for } 2k \cdot 2^{-m^2} < x \leq (2k+1)2^{-m^2}, \end{aligned}$$

for any integer k . Write

$$s_n(x) = \sum_{m=1}^n f_m(x)$$

and

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x). \end{aligned}$$

We denote by R_n the set of all points $\{x, s_n(x)\}$, and by R the set of all points $\{x, s(x)\}$. R differs from a closed set only by an enumerable set and is thus measurable.

§ 16.

Theorem 1. *The measure of the subset of R included between the ordinates $x = \alpha$, $x = \beta$ is $|\beta - \alpha|$.*

Since

$$2^{(n+1)^2} |s(x) - s_n(x)| \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

uniformly for all values of x , we can enclose the given subset of R in a finite set of rectangles, symmetrically placed about segments of some R_n , in each of which the ratio of the height to the base is arbitrarily small. Thus we can

enclose the given subset in a set of rectangles the sum of whose diameters is arbitrarily near $|\beta - \alpha|$, and we conclude from this that its measure cannot exceed $|\beta - \alpha|$. But its measure cannot be less than $|\beta - \alpha|$, the measure of its projection on the x -axis. This proves the theorem.

§ 17.

The theorem which follows shows that the lower density of an irregular set in any angle greater than π can take the value $\frac{1}{2}$.

Theorem 2. If $0 < \eta \leq \frac{1}{2}\pi$, then for almost all points of R ,

$$D_*\{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), R\} = \frac{1}{2}.$$

Let a be any point of R , and consider a sector $\{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), r\}$ such that

$$(1) \quad 2^{-(n+1)^2} \leq r < 2^{-n^2}.$$

Let ε be an arbitrary fixed positive number which is less than 1, and write

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + \cot \eta}.$$

Observing that for sufficiently large values of n ,

$$(2) \quad |s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot 2^{-(n+1)^2}$$

for all values of x , we conclude that

$$(3) \quad L[R \times \{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), r\}] > r(1 - \varepsilon)$$

for all sufficiently small values of r . For let n be chosen so that (2) is satisfied. Then if the circumference of the circle $c(a, r)$ intersects the (half-open) segment of R_n relevant to a (i. e. the segment of R_n above or below which the point a lies) we see that the sector $\{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), r\}$ certainly contains all points of R lying in a vertical strip of width

$$(r^2 - \varepsilon_1^2 2^{-2(n+1)^2})^{\frac{1}{2}} - \varepsilon_1 \cdot 2^{-(n+1)^2} \cot \eta,$$

and this width is greater than $r(1 - \varepsilon)$ by (1).

If, on the other hand, the circumference of $c(a, r)$ does not intersect the segment of R_n relevant to a we have, by similar reasoning, for sufficiently large values of n ,

$$L[R \times \{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), r\}] > 2^{-n^2}(1 - \varepsilon), \\ > r(1 - \varepsilon)$$

by (1). This proves (3) and it follows that

$$(4) \quad D_*\{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), R\} \geq \frac{1}{2}$$

for all points of R .

Now let ξ_n be the horizontal distance of the point a from the right-hand-end-point of the segment of R_n relevant to a , and denote by $R^{(1)}$ the subset of all points a of R for which there is an infinity of values of n such that

$$(5) \quad \xi_n < \frac{1}{n \log n} 2^{-n^2}.$$

Since the infinite product

$$\prod_{n=m}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n \log n}\right)$$

diverges to zero we conclude (cf. § 5) that

$$L(R - R^{(1)}) = 0.$$

Let a be a point of $R^{(1)}$, and let n be chosen so that (5) is satisfied and also

$$(6) \quad |s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-(n+1)^2} \quad (\text{all } x),$$

and

$$(7) \quad \log n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Consider the sector $\{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), r_n\}$, where

$$r_n = \frac{1}{\varepsilon n \log n} \cdot 2^{-n^2}.$$

By (7),

$$r_n < \frac{1}{n} 2^{-n^2},$$

and the sector contains points of R relevant to only one of the segments of R_n . We have therefore

$$L[R \times \{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), r_n\}] \leq r_n + \xi_n, \\ < r_n (1 + \varepsilon)$$

by (5). Hence

$$(8) \quad D_* \{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), R\} \leq \frac{1}{2}$$

for all points of $R^{(1)}$.

Comparing (4) and (8) we now have

$$D_* \{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), R\} = \frac{1}{2}$$

for almost all points of R . In particular, setting $\eta = \frac{1}{2}\pi$ we have

$$D_*(a, R) = \frac{1}{2}$$

for almost all points of R , and R is an irregular set.

The internal problems of two-dimensional potential theory.

Von

Rosa M. Morris in Cardiff (Wales).

Introduction.

1. In several recent papers I have developed a simple method of dealing with the boundary value problems of two dimensional potential theory, relating to the space outside a single cylindrical surface of very general and inclusive character. Professor Livens has pointed out to me that the corresponding problems for the spaces interior to the cylinder are also not without their practical bearing, whilst considerably less success appears to have attended attempts to solve them. Apart in fact from a number of isolated special solutions obtained in each case by a method appropriate only to the particular cylinder for which it has been obtained, nothing appears to have been achieved in the way of formulating definite solutions to such problems. A list of the hydrodynamical problems solved is given by Lamb (1906)¹⁾, and details of the elastic problems solved by Love (1906)²⁾, and later up to 1921 by Pöschl (1921)³⁾. A certain amount of recent work is referred to in the appropriate sections. The general method developed some years back by Bickley (1929)⁴⁾ for external spaces, does not appear suitable for application to the internal problem, so a general mode of attack is still lacking.

The internal problems have of course their own difficulties created by the presence in the field under investigation, of the singular points of the conformal transformation used, but it has not proved difficult to adopt my previous analysis to the extent of obtaining an explicit solution to two classes of internal boundary value problem, for the general cylinder with which we started. This cylinder is such that, referred to any rectangular axes (x, y) in a normal cross-section plane, its cross section curve is represented unicur-

$$z = x + iy = e^{-it} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n it} \right);$$

¹⁾ H. Lamb, „Hydrodynamics“, 3rd Ed., p. 81. Camb. Univ. Press.

²⁾ A. E. H. Love, The Mathematical Theory of Elasticity, 2nd Ed., p. 305. Camb. Univ. Press.

³⁾ T. Pöschl, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), p. 312.

⁴⁾ W. G. Bickley, Philos. Trans. A. 228 (1929), p. 235.

or by the same formula without the factor outside. As indicated in the appendix this general formula covers all cylinders for which solutions of any type of boundary problem have been obtained, and many others. And it not only includes all cylinders whose equations can be thrown into this form, but it includes all cylinders obtained as level surfaces (equipotentials, isothermals) $\eta = \alpha$ of the net defined by the conformal transformation

$$z = e^{-i\xi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n i \xi} \right), \quad \zeta = \xi + i \eta,$$

for any such level surface is defined by a similar formula

$$z = e^{-i\xi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a'_n e^{n i \xi} \right),$$

wherein $a'_n = a_n \exp(-n\alpha)$. In some cases it appears, in fact, easier to obtain the solution for the general level surface $\eta = \alpha$ than to obtain it for the original cylinder, for which the expansion of z in powers of $\exp(i\xi)$ is not always generally valid. The particular results for the original cylinder then have to be derived as the limiting value of the general results when $\alpha \rightarrow 0$.

2. The problems chosen for solution are of two types, one being taken from elementary hydrodynamical theory and the other from the theory of elasticity. The hydrodynamical problem involves an investigation of the instantaneous motion produced in liquid contained either inside the single general cylinder, or between two level surfaces of such a cylinder when the boundaries are in general motion perpendicular to the axis of the field. The elastic problem solved is the simple de St. Venant torsion problem for the single solid cylinder or for the cylinder with a hole in the shape of a level surface. The mathematics of the torsion problem and of the hydrodynamical problem with rotating boundaries are of course similar, as the same type of boundary value is involved, but the hydrodynamical problem actually solved is the more general one involving linear motions (and therefore also linear boundary values) as well, as these are required for investigations of the effect of a containing wall or boundary on the motion of an inner boundary. The method illustrated by these two problems can easily be generalised to apply whatever the complexity of the boundary values.

3. The single surface problem is solved only for those cylinders whose cross-sections can be defined unicursally by an equation of the type

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n i \xi}; \quad 0 < \xi < 2\pi;$$

but the problems involving two surfaces — an outer and an inner — are solved when these two surfaces are level surfaces of the cylinder whose cross-section is

$$z = e^{-i\xi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\xi} \right); \quad 0 < \xi < 2\pi;$$

as well as of the cylinder whose cross-section is

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\xi}.$$

The difference in these two types of equation can perhaps best be seen in those cases where they can both be obtained for the same cylinder. All closed polygonal boundaries in the z -plane can for example be represented*) on the unit circle $|t| = 1$ in the t -plane by a conformal transformation of the type

$$\frac{dz}{dt} = A \prod_{r=1}^n (t - t_r)^{-\mu_r}; \quad |t_r| = 1; \quad \sum_{r=1}^n \mu_r = 2;$$

mapping the space internal to the polygon in the z -plane on to the interior of the unit circle in the t -plane; and they are equally represented by the formula

$$\frac{dz}{dt} = \frac{A}{t^2} \prod_{r=1}^n (t - t_r)^{\mu_r}; \quad |t_r| = 1; \quad \sum_{r=1}^n \mu_r = 2;$$

mapping the space external to the polygon on to the interior of the circle. The substitution $t = \exp(i\xi)$, which on the unit circle becomes $t = \exp(i\xi)$, transforms then the first of these formulae into one of the type

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\xi},$$

mapping the interior of the polygon on to the rectangle $\eta > 0$, $0 < \xi < 2\pi$, whilst the second one becomes a formula of the type

$$z = e^{-i\xi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\xi} \right),$$

and maps the exterior of the polygon on to the same region. The latter transformation would then be used to obtain solutions pertaining to the space outside a single level surface external to the cylinder or between two such level surfaces, and the former to obtain solutions to the corresponding internal problems. Although the functional relation connecting z and ξ for the space external to the polygon "continues" in an analytical sense into the interior

*) We are here thinking of the representation of the one curve point for point on the other, as distinct from the representation of the surfaces bounded by the curves.

of the polygon it maps the region $\eta < 0$, $0 < \xi < 2\pi$, on to a more or less complex Riemann surface inside the polygon, so that the external transformation cannot be used for the internal spaces.

4. The present discussion is put forward in spite of an element of dissatisfaction with the results obtained. These are in fact, all in a very different form to those special solutions which have been obtained previously for particular cylinders, and the problem of verification has not so far been solved for any but the very simplest of these solutions. There is, of course, the consoling factor that the new results are far more general than any of the particular solutions, in that the special form relating to a particular type of cylinder section is simply a limiting case of a general result, which applies to the general cylinder section obtained as level surfaces in the particular conformal transformation involved. In some cases the difficulty of verification may be due to a slight doubt as to whether the results do in fact apply in the limit, when the level curves coincide with the particular curve from which they are derived, as some of the series employed in the discussion then cease to be formally convergent. Of course, the familiar solutions in many cases involve infinities in the physical magnitudes at the sharp corners in the surfaces, so this difficulty of divergence is not really peculiar to this present method, and it rather emphasizes the advantage of obtaining solutions, as we have done, for surfaces approximating closely to the ideal shapes, but without mathematically sharp corners.

The Liquid Motion between Two Cylinders in General Motion.

5. The two cylinders are defined as level surfaces in the general transformation

$$z = e^{-i\zeta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n i \zeta} \right); \quad \zeta = \xi + i \eta;$$

the cross section of the first cylinder being the curve $\eta = \alpha_1$, and that of the second the curve $\eta = \alpha_2$. The first cylinder is assumed to be moving with a velocity $w_1 = u_1 + i v_1$, and an angular velocity ω_1 , and the second with a velocity $w_2 = u_2 + i v_2$, and an angular velocity ω_2 .

In dealing with the conditions on the surfaces our method requires the transformation to be such that ζ is real on each surface in turn, so that when dealing with $\eta = \alpha_1$, we shall write $\zeta = \zeta_1 + i \alpha_1 = \xi_1 + i (\eta_1 + \alpha_1)$, and then $\eta_1 = 0$ on $\eta = \alpha_1$; and in dealing with the surface of the second cylinder we write $\zeta = \zeta_2 + i \alpha_2 = \xi_2 + i (\eta_2 + \alpha_2)$, so that $\eta_2 = 0$ on this surface.

We also write

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(n-1) i \zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n e^{(n-1) i \zeta_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n e^{(n-1) i \zeta_2},$$

so that

$$a'_n = a_n e^{-(n-1)\alpha_1}; \quad a''_n = a'_n e^{-(n-1)\alpha_1};$$

and α is used for $\alpha_2 - \alpha_1$, and throughout this section.

The stream function ψ , part of the complex potential function $\Omega (= \varphi + i\psi)$ of the motion of the liquid between the cylinders, must of course satisfy the usual condition

$$\psi = uy - vx - \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2),$$

on the first cylinder $\eta = \alpha_1$ and by the argument of previous papers⁵), this will be satisfied by the imaginary part of

$$\begin{aligned} \Omega &= \bar{w}_1 z(\zeta_1) - \frac{1}{2}i\omega z(\zeta_1)\bar{z}(\zeta_1) + F(\zeta_1) \\ &= \bar{w}_1 e^{-i\zeta_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a'_n e^{n i \zeta_1} \right) - \frac{1}{2}i\omega_1 \sum_{n=1}^{\infty} (b'_n e^{i \zeta_1} + \bar{b}'_n e^{-n i \zeta_1}) + F_1(\zeta_1), \end{aligned}$$

(bars as usual denoting the conjugate complex quantities) wherein

$$b'_n = \sum_{r=0}^{\infty} a'_r + r \bar{a}'_r,$$

and $F_1(\zeta_1)$ is a function of ζ_1 which is necessarily real when ζ_1 is real. Thus we can assume that

$$F_1(\zeta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{n i \zeta_1} + \bar{A}_n e^{-n i \zeta_1})$$

where the A 's are in general complex constants.

We must now try and choose the A 's to satisfy the conditions on the second cylinder, and at this stage we introduce the variable ζ_2 . In the above formula for Ω we write $\zeta_1 = \zeta_2 + i\alpha$ when it is simply

$$\begin{aligned} \Omega &= \bar{w}_1 e^{-i\zeta_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a''_n e^{n i \zeta_2} \right) - \frac{1}{2}i\omega_1 \sum_{n=1}^{\infty} (b'_n e^{-n\alpha + n i \zeta_2} + \bar{b}'_n e^{n\alpha - n i \zeta_2}) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-n\alpha + n i \zeta_2} + \bar{A}_n e^{n\alpha - n i \zeta_2}). \end{aligned}$$

But the argument relating to the stream function part of Ω applies also on this second surface, so that we may conclude that this value of Ω must also be of the form

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_2 + F_2(\zeta_2) \\ &= \bar{w}_2 e^{-i\zeta_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a''_n e^{n i \zeta_2} \right) - \frac{1}{2}i\omega_2 \sum_{n=1}^{\infty} (b''_n e^{n i \zeta_2} + \bar{b}''_n e^{-n i \zeta_2}) + F_2(\zeta_2), \end{aligned}$$

⁵) Rosa M. Morris, Proc. Roy. Soc. A 161, p. 406. See also Proc. Camb. Phil. Soc. 33, p. 474.

wherein

$$b_n'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_n'' + r \bar{a}_r'',$$

and $F_2(\zeta_2)$ is real when ζ_2 is real. It follows therefore that the difference between the first form for Ω and the quantity we have just designated as Ω_2 is a real quantity when ζ_2 is real. This means, of course, that in this difference the coefficients of the terms like $\exp(p i \zeta_2)$ and $\exp(-p i \zeta_2)$ are conjugate complex quantities. Expressing this we obtain at once the following equations for the coefficients A_n

$$2 A_1 \sinh \alpha = (\bar{w}_1 - \bar{w}_2) a_2'' - (w_1 - w_2) \bar{a}_0'' - i \omega_1 b_1' \cosh \alpha + i \omega_2 b_1'';$$

and then for $n > 1$

$$2 A_n \sinh n \alpha = (\bar{w}_1 - \bar{w}_2) a_{n+1}'' - i \omega_1 b_1' \cosh n \alpha + i \omega_2 b_n''.$$

Inserting these values we have finally the complete formula for the complex potential in the form

$$\Omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n e^{n i \zeta_1},$$

wherein

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \bar{w}_1 a_2' - \frac{1}{2} i \omega_1 b_1' + A_1 \\ &= \{(\bar{w}_1 e^{\alpha} - \bar{w}_2 e^{-\alpha}) - (w_1 - w_2) \bar{a}_0'' - i \omega_1 b_1' e^{\alpha} + i \omega_2 b_1''\} / 2 \sinh \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{-1} &= \bar{w}_1 a_0' - \frac{1}{2} i \omega_1 \bar{b}_1' + \bar{A}_1 \\ &= \{(w_1 - w_2) \bar{a}_2'' - \bar{a}_0' (\bar{w}_1 e^{-\alpha} - \bar{w}_2 e^{\alpha}) + i \omega_1 \bar{b}_1' e^{-\alpha} - i \omega_2 \bar{b}_1''\} / 2 \sinh \alpha, \end{aligned}$$

and for $n > 1$

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \bar{w}_1 a_{n+1}' - \frac{1}{2} i \omega_1 b_n' + A_n \\ &= \{(\bar{w}_1 e^{n \alpha} - \bar{w}_2 e^{-n \alpha}) a_{n+1}'' - i \omega_1 b_n' e^{n \alpha} + i \omega_2 b_n''\} / 2 \sinh n \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{-n} &= -\frac{1}{2} i \omega_1 \bar{b}_n' + \bar{A}_n \\ &= \{(w_1 - w_2) \bar{a}_{n+1}' e^{-n \alpha} + i \omega_1 b_n' e^{-n \alpha} - i \omega_2 \bar{b}_n''\} / 2 \sinh n \alpha. \end{aligned}$$

6. Having obtained the complete potential of the fluid motion we now derive the expression for the energy. This by the usual argument⁶⁾, is the imaginary part of

$$\frac{1}{2} \rho \left[\int_{c_1} \Omega d\bar{D} - \int_{c_2} \Omega d\bar{D} \right];$$

⁶⁾ Rosa M. Morris, Phil. Mag. 24 (1937), p. 47.

the first integral being taken round the contour of the first cylinder, and the second round the contour of the second cylinder. On the first cylinder, we have however

$$d\bar{\Omega} = -i \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \bar{\Omega}_n e^{-n i \zeta_1} \right\} d\zeta_1,$$

so that the first integral is

$$-\frac{1}{2} \varrho \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n e^{n i \zeta_1} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \bar{\Omega}_n e^{-n i \zeta_1} \right) d\zeta_1,$$

which reduces simply to

$$\frac{1}{2} \pi \varrho \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \Omega_n \bar{\Omega}_n.$$

On the second cylinder

$$\Omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n e^{-n\alpha} e^{n i \zeta_2},$$

and

$$d\bar{\Omega} = -i \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \bar{\Omega}_n e^{-n\alpha} e^{-n i \zeta_2} \right\} d\zeta_2,$$

so that the second integral is

$$-\frac{1}{2} \pi \varrho \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \Omega_n \bar{\Omega}_n e^{-2n\alpha}.$$

Thus ultimately for the kinetic Energy, we have

$$2T/\pi\varrho = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \Omega_n \bar{\Omega}_n (1 - e^{-2n\alpha})$$

or

$$\begin{aligned} T/\pi\varrho &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \Omega_n' \bar{\Omega}_n e^{-n\alpha} \sinh n\alpha \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \sinh n\alpha \{ \Omega_n \bar{\Omega}_n e^{-n\alpha} + \Omega_{-n} \bar{\Omega}_{-n} e^{n\alpha} \}. \end{aligned}$$

We can interpret this in terms of the velocities of the two cylinders. The process is long and tedious so we shall not give the full details.

The first terms in the formula for T involve

$$\sinh \alpha \{ \Omega_1 \bar{\Omega}_1 e^{-\alpha} + \Omega_{-1} \bar{\Omega}_{-1} e^{\alpha} \},$$

which on expansion proves to be

$$\begin{aligned} \sinh \alpha \{ w_1 \bar{w}_1 (a_0' \bar{a}_0' e^{\alpha} + a_2' \bar{a}_2' e^{-\alpha}) + \frac{1}{2} \omega_1^2 b_1' \bar{b}_1' \cosh \alpha + 2 A_1 \bar{A}_1 \cosh \alpha \\ + \frac{1}{2} \bar{w}_1 \omega_1 (a_2' \bar{b}_1' e^{-\alpha} + a_0' b_1' e^{\alpha}) - \frac{1}{2} w_1 \omega_1 (\bar{a}_2' b_1' e^{-\alpha} + \bar{a}_0' \bar{b}_1' e^{\alpha}) \\ + i \omega_1 (\bar{A}_1 b_1' \sinh \alpha - A_1 \bar{b}_1' \sinh \alpha) \}; \end{aligned}$$

in which the expression $2 A_1 \bar{A}_1 \sinh \alpha \cosh \alpha$ is the product of $\frac{1}{2} \coth \alpha$ and

$$\begin{aligned} & - (w_1 - w_2)^2 \bar{a}_2'' \bar{a}_0'' - (\bar{w}_1 - \bar{w}_2)^2 a_2'' a_0'' + \omega_1^2 b_1' \bar{b}_1' \cosh^2 \alpha + \omega_2^2 b_1'' \bar{b}_1'' \\ & + (w_1 - w_2) (\bar{w}_1 - \bar{w}_2) (a_2'' \bar{a}_2'' + a_0'' \bar{a}_0'') - \omega_1 \omega_2 \cosh \alpha (\bar{b}_1' \bar{b}_1'' + \bar{b}_1' b_1'') \\ & + i \omega_1 (\bar{w}_1 - \bar{w}_2) \cosh \alpha (a_2'' \bar{b}_1' + a_0'' \bar{b}_1') \\ & - i \omega_1 (w_1 - w_2) \cosh \alpha (\bar{b}_1' \bar{a}_2'' + \bar{a}_0'' \bar{b}_1') \\ & - i \omega_2 (\bar{w}_1 - \bar{w}_2) (\bar{b}_1'' a_2'' + \bar{b}_1'' a_0'') + i \omega_2 (w_1 - w_2) (b_1'' \bar{a}_2'' + \bar{b}_1'' \bar{a}_0''). \end{aligned}$$

The remaining terms in the formula for T involve

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \sinh n \alpha \{ \Omega_n \bar{\Omega}_n e^{-n \alpha} + \Omega_{-n} \bar{\Omega}_{-n} e^{n \alpha} \},$$

which on expansion proves to be

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n \sinh n \alpha [& w_1 \bar{w}_1 a_{n+1}' \bar{a}_{n+1}' e^{-n \alpha} + \frac{1}{2} i \omega_1 \bar{w}_1 a_{n+1}' \bar{b}_n' e^{-n \alpha} \\ & - \frac{1}{2} i \omega_1 w_1 \bar{a}_{n+1}' b_n' e^{-n \alpha} + A_n w_1 \bar{a}_{n+1} e^{-n \alpha} \\ & + \bar{A}_n \bar{w}_1 a_{n+1}' e^{-n \alpha} + \frac{1}{2} \omega_1^2 b_n' \bar{b}_n' \cosh n \alpha \\ & + 2 A_n \bar{A}_n \cosh n \alpha - i \omega_1 A_n \bar{b}_n' \sinh n \alpha + i \omega_1 \bar{A}_n b_n' \sinh n \alpha]. \end{aligned}$$

Here $2 A_n \bar{A}_n n \sinh n \alpha \cosh n \alpha$ is the product of $\frac{1}{2} n \coth n \alpha$ and

$$\begin{aligned} & (\bar{w}_1 - \bar{w}_2) (w_1 - w_2) a_{n+1}'' \bar{a}_{n+1}'' + \omega_1^2 b_n' \bar{b}_n' \cosh^2 n \alpha + \omega_2^2 b_n'' \bar{b}_n'' \\ & + i \omega_1 (\bar{w}_1 - \bar{w}_2) \cosh n \alpha b_n'' a_{n+1}'' - i \omega_1 (w_1 - w_2) \cosh n \alpha \bar{b}_n' \bar{a}_{n+1}' \\ & + i \omega_2 [(w_1 - w_2) b_n'' \bar{a}_{n+1}'' - (\bar{w}_1 - \bar{w}_2) \bar{b}_n' a_{n+1}'] \\ & - i \omega_2 \omega_1 \cosh n \alpha (b_n' \bar{b}_n'' + \bar{b}_n' b_n''). \end{aligned}$$

Putting these together we find that the final form for $2 T / \pi q$ now reduces to

$$\begin{aligned} & - \coth \alpha \{ a_0' a_2' (\bar{w}_2 - \bar{w}_1)^2 + \bar{a}_0' \bar{a}_2' (w_2 - w_1)^2 \} \\ & + A w_1 \bar{w}_1 + B w_2 \bar{w}_2 + C (w_1 \bar{w}_2 + \bar{w}_1 w_2) + D \omega_1^2 + E \omega_2^2 \\ & + F \omega_1 \omega_2 + (G w_1 + \bar{G} \bar{w}_1) \omega_1 + (H w_2 + \bar{H} \bar{w}_2) \omega_1 \\ & + (J w_1 + \bar{J} \bar{w}_1) \omega_2 + (K w_2 + \bar{K} \bar{w}_2) \omega_2; \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} A &= a_0' \bar{a}_0' \coth \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n+1}' \bar{a}_{n+1}' \coth n \alpha; \\ B &= a_0' \bar{a}_0' e^{2 \alpha} \coth \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n+1}' \bar{a}_{n+1}' e^{-2 n \alpha} \coth \alpha; \\ C &= - \frac{a_0' \bar{a}_0' e^{\alpha}}{\sinh \alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_{n+1}' \bar{a}_{n+1}' e^{-n \alpha}}{\sinh n \alpha}; \\ D &= \sum_{n=1}^{\infty} n b_n' \bar{b}_n' \coth n \alpha; \end{aligned}$$

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n'' \bar{b}_n'' \coth n\alpha;$$

$$F = - \sum_{n=1}^{\infty} n (b_n' \bar{b}_n'' + \bar{b}_n' b_n'') / \sinh n\alpha;$$

$$G = -i \bar{a}_0' \bar{b}_1' \coth \alpha - i \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_{n+1}' \bar{b}_n' \coth n\alpha;$$

$$H = \frac{i \bar{a}_0' \bar{b}_1' e^{\alpha}}{\sinh \alpha} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \bar{a}_{n+1}' \bar{b}_n' e^{-n\alpha}}{\sinh n\alpha};$$

$$J = \frac{i \bar{a}_0' \bar{b}_1''}{\sinh \alpha} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \bar{a}_{n+1}' b_n''}{\sinh n\alpha};$$

$$K = -i \bar{a}_0' \bar{b}_1'' e^{\alpha} \coth \alpha - i \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_{n+1}' b_n'' e^{-n\alpha} \coth \alpha.$$

As a verification we may notice that if we put $\alpha = \infty$ and $w_2 = \omega_2 = 0$ in the expression $2T/\pi\varrho$, it reduces to the form

$$-\bar{a}_0 \bar{a}_2 w_1^2 - a_0 a_2 \bar{w}_1^2 + A w_1 \bar{w}_1 + D \omega_1^2 + (G w_1 + \bar{G} \bar{w}_1) \omega_1,$$

where

$$A = a_0 \bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n+1} \bar{a}_{n+1};$$

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \bar{b}_n;$$

$$G = -i \bar{a}_0 \bar{b}_1 - i \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \bar{a}_{n+1};$$

which is the formula given in a previous paper⁷⁾ for the energy of the motion of an infinite liquid outside the one cylinder.

It was hoped to include also a determination of the forces acting on the internal cylinder and the containing shell either by applying the Lagrange-Kirchhoff equations or the generalised Blasius contour-integral expressions⁸⁾ but, as one of the referees has kindly pointed out, there are certain fundamental difficulties involved in the procedure which necessitate a more elaborate investigation than present circumstances permit.

The liquid motion in the space inclosed by a single cylindrical surface.

7. As stated above the internal problems can generally speaking be solved only by using the transformation

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n\zeta}$$

⁷⁾ Rosa M. Morris, Proc. Roy. Soc. A 161 (1937), p. 406.

⁸⁾ Rosa M. Morris, Phil. Mag. 24 (1937), p. 445.

mapping the part of the plane inside the polygon on to the rectangle $\eta > 0$; $0 < \xi < 2\pi$, so that the point at infinity in this rectangle corresponds to the point $z = a_0$ inside the polygon. The only singular point of the transformation inside the surface is then the point $z = a_0$, and to obtain a solution we must impose the condition that the motion there remains finite.

Supposing then that the cylinder has velocity components u, v and angular velocity ω . For the condition at the external boundary to be satisfied we know that the potential function must be given by

$$\Omega = \bar{w} z(\zeta) - \frac{1}{2} i \omega z(\zeta) \bar{z}(\zeta) + F(\zeta)$$

where $F(\zeta)$ is a real function of ζ . In terms of ζ this is

$$\Omega = \bar{w} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n i \zeta} - \frac{1}{2} i \omega \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n e^{n i \zeta} + \bar{b}_n e^{-n i \zeta}\} + F(\zeta)$$

where

$$b_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n+r} \bar{a}_r; \quad \bar{b}_n = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{a}_{n+r} a_r.$$

The other condition to be satisfied is, as above, that $(d\Omega/d\zeta) = 0$ at a_0 , i.e. $\eta = \infty$. We notice again as in other cases, that the first and known group of terms in Ω contain two types of terms which we call $F_1(\zeta)$ and $F_2(\zeta)$ and which are now distinguished by their behaviour at a_0 . $F_1(\zeta)$ is such that it tends to zero at a_0 and its conjugate diverges there, whilst $F_2(\zeta)$ diverges at a_0 , and its conjugate tends to zero there. To satisfy the conditions for Ω we must therefore take $-F_2(\zeta)$ at least as part of $F(\zeta)$. But $F(\zeta)$ must be a real function of ζ and to make it so, we must in addition subtract the conjugate of $F_2(\zeta)$. The value of Ω in this case is then given by

$$\Omega = \bar{w} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n i \zeta} - i \omega \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{n i \zeta}.$$

We can write this in the form

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n e^{n i \zeta},$$

wherein

$$\Omega_n = \bar{w} a_n - i \omega b_n; \quad n = 0, 1, \dots$$

8. The energy of the motion is then given by the integral

$$- \frac{1}{2} i \varrho \int_c \Omega d\bar{\Omega}$$

integrated round the curve of cross-section of the cylinder. In the usual way we have at once that

$$2 T / \pi \varrho = \sum_{n=1}^{\infty} n \Omega_n \bar{\Omega}_n.$$

Inserting the values of the Ω 's we get as the formula for $2 T / \pi \varrho$ the following

$$A w \bar{w} + B \omega^2 + i C \omega \bar{w} - i \bar{C} \omega w$$

wherein

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \bar{a}_n; \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \bar{b}_n;$$

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \bar{b}_n; \quad \bar{C} = \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n b_n;$$

and the forces due to the fluid pressures, which are really the reactions to the forces required to sustain the motion, are in the usual way given by

$$Y + iX = -2i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right) - 2\omega \frac{\partial T}{\partial \bar{w}};$$

and

$$\Gamma = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} + v \frac{\partial T}{\partial u} - u \frac{\partial T}{\partial v};$$

which give

$$(Y + iX)/\pi\varrho = -i\{A\dot{\bar{w}} - i\bar{C}\dot{\omega}\} - \omega\{A\bar{w} - i\bar{C}\omega\},$$

and $\Gamma/\pi\varrho$ as the real part of

$$-B\dot{\omega} - iC\dot{\bar{w}} - i\omega\{A\bar{w} - i\bar{C}\omega\}.$$

9. This solution, as we have stated, is suitable for the cases in which only one singular point of the transformation — corresponding to $\eta = \infty$ — is inside the surface. Various surfaces occur — the elliptic cylinder, for example, — whose simple definition really involves an external transformation which, if continued inside the surface, has more than one singular point. Thus, unless the alternative definition is available it seems impossible to include these cases in the above general analysis, although for some of them the solution of the relevant physical problem is known to exist in simple forms. After several unsuccessful attempts had been made to resolve the discrepancy another and somewhat different method of approach to these apparently outstanding cases was discovered. Details will be given in a subsequent communication.

The Torsion Problem — The Potentials.

10. The torsion problem has, on account of its practical importance, received considerably more attention than the previous hydrodynamical problems, although very little more success seems to have been achieved. A list of problems actually solved are given by Pöschl⁹⁾, since this, further details of the problem of a circular tube with an eccentric hole have been calculated by B. Grindberg and M. Paschoud¹⁰⁾. The solution of the solid

⁹⁾ T. Pöschl, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), p. 312.

¹⁰⁾ B. Grindberg und M. Paschoud, C. R. Paris 182 (1926), p. 750.

circular tube has been reexamined by E. Callandreau¹¹⁾; an approximate theory for cylinders with symmetrical airfoil sections has been formulated by W. J. Duncan¹²⁾, who has also treated later, certain problems connected with the prism with a triangular section. A general but rather involved method of dealing with beams of polygonal sections, was formulated by Trefftz¹³⁾, and applied in a few simple cases: the same method has also recently been applied by B. R. Seth¹⁴⁾, to one or two other cases of similar type, and also by H. Okubo¹⁵⁾.

We now show that the method developed in the previous part of this paper, leads to a formal solution of the problem for a cylinder with a perfectly general cross-section.

We shall suppose that the material of the cylinder is isotropic and homogeneous. Taking axes (x, y) in a normal cross-section plane, and using for the moment l as a length coordinate perpendicular to this plane, and (u, v, w) as the displacements in the direction of the axes and l , and T as the twist, we assume for the displacements the formulae

$$u = -Tly; \quad v = Tlx; \quad w = T\varphi$$

where φ is a function of x and y .

The strain components that do not vanish are then

$$e_{1z} = T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right); \quad e_{21} = T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right);$$

and the stress components that do not vanish are

$$X_1 = \mu T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right); \quad Y_1 = \mu T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right).$$

The equations of equilibrium when there are no body forces require

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} = 0,$$

or

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

The further condition that the cylindrical surface is free from applied traction is satisfied if

$$X_1 \frac{dx}{ds} - Y_1 \frac{dy}{ds} = \mu T \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} - y \frac{dy}{ds} - x \frac{dx}{ds} \right\} = 0,$$

¹¹⁾ E. Callandreau, C. R. Paris 194 (1932), p. 436.

¹²⁾ W. J. Duncan, Proc. Roy. Soc. A (1932), p. 95, see also Phil. Mag. 16 (1935), p. 201.

¹³⁾ E. Trefftz, Math. Annalen 82 (1921), p. 97.

¹⁴⁾ B. R. Seth, Proc. Camb. Phil. Soc. 30 (1934), p. 392.

¹⁵⁾ H. Okubo, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 16 (1934), p. 430.

holds at all points of the boundary curve of any cross-section. This boundary condition for φ simplifies in the familiar manner when we introduce the conjugate function ψ which is such that

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

The function ψ then satisfies the equation $\nabla^2 \psi = 0$; and the boundary condition reduces to

$$\psi = \text{const.} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

11. As other writers have also noticed, we see that the function ψ is mathematically identical with the stream function of the hydrodynamical problem of the motion of liquid, inside the same cylinder rotating with an angular velocity -1 . We can therefore proceed in the same manner as we did in the earlier sections dealing with such hydrodynamical cases. We notice first that if the curve of cross-section of the cylinder is unicursal and defined by

$$z = x + iy = z(\xi),$$

then this boundary condition is satisfied by the imaginary part of a complex potential Ω which is also necessarily a solution of the potential equation, and which is given by

$$\Omega = \varphi + i\psi = \frac{1}{2}iz(\zeta)\bar{z}(\zeta) + F(\zeta)$$

where (i) $\zeta = \xi + i\eta$, so that $\eta = 0$ is the particular level curve of the set defined by the transformation $z = z(\zeta)$, which corresponds to the cylinder, and (ii) $F(\zeta)$ is a real function of ζ to be so chosen that Ω is never infinite.

The determination of the function $F(\zeta)$ can be effected in the usual way once the equation of the cylinder cross-section is known. We take first the single solid cylinder whose external cross-section boundary is defined by

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n\zeta}$$

so that $\eta = +\infty$ is the point $z = a_0$ inside the surface. This transformation maps the interior of the polygon on to the interior of a circle, and the only singular point inside the surface is at $z = a_0$ ($\zeta = \infty$). Since Y_1 and X_1 can each be expressed in terms of $(d\Omega/dz)$, we cannot have $(d\Omega/dz)$ infinite at any point. To obtain a solution of the problem for the above cylinder we must therefore impose the further condition that $(d\Omega/dz)$ must be zero at $z = a_0$. With the above value for z the formula for Ω interpreted in terms of ζ is now

$$\Omega = \frac{1}{2}i \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{n\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n e^{-n\zeta} \right\} + F(\zeta),$$

wherein

$$b_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n+r} \bar{a}_r; \quad \bar{b}_n = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{a}_{n+r} a_r.$$

The condition that $(d\Omega/dz) = 0$ at $z = a_0$ requires that $(d\Omega/d\zeta) = 0$ at $\eta = +\infty$ and this enables us to determine $F(\zeta)$ in the usual way. We have finally

$$\Omega = i \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{n\zeta},$$

so that we can write down immediately, in a series form, the complex function Ω for any cylinder whose cross-section can be expressed unicursally in the required form.

12. The second problem we will consider is the one in which the cylinder is hollow, having a cross-section which is the space between two level surfaces defined by the general transformation

$$z = e^{-i\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n\zeta}.$$

The first level surface we take to be the curve $\eta = \alpha_1$ and the second to be $\eta = \alpha_2$. We may point out here that the method would apply equally well for a transformation of the other form, but we are not now restricted to cylinders for which only one singular point can be inside the outer curve $\eta = \alpha_2$, as long as such singular points as exist are inside the inner curve $\eta = \alpha_1$, i. e. external to the actual cylinder section.

In dealing with the conditions on the two surfaces our method requires the transformation to be such that ζ is real on each surface in turn, so that when dealing with $\eta = \alpha_1$ we shall as above write $\zeta = \zeta_1 + i\alpha_1 = \xi_1 + i(\eta_1 + \alpha_1)$, and then $\eta_1 = 0$ on $\eta = \alpha_1$, and in dealing with the surface $\eta = \alpha_2$ we write $\zeta = \zeta_2 + i\alpha_2 = \xi_2 + i(\eta_2 + \alpha_2)$ and again $\eta_2 = 0$ on this surface. We also write

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n e^{(n-1)i\zeta_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n e^{(n-1)i\zeta_2},$$

so that

$$a'_n = a_n e^{-(n-1)\alpha_1}; \quad a''_n = a'_n e^{-(n-1)\alpha}$$

and α is used for $\alpha_2 - \alpha_1$.

The function ψ , part of the complex function $\Omega (= \varphi + i\psi)$, must of course, satisfy the usual condition

$$\psi = \text{const.} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

on the first surface $\eta = \alpha_1$. We see immediately, as before, that this is satisfied by the imaginary part of

$$\Omega = \frac{1}{2} i z(\zeta_1) \bar{z}(\zeta_1) + F_1(\zeta_1),$$

or in terms of ζ_1

$$\Omega = \frac{1}{2} i \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b'_n e^{n i \zeta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}'_n e^{-n i \zeta_1} \right\} + F_1(\zeta_1),$$

wherein

$$b'_n = \sum_{r=0}^{\infty} a'_n + r \bar{a}'_r,$$

and $F_1(\zeta_1)$ is a function of ζ_1 which is necessarily real when ζ_1 is real. Thus we can assume that

$$F_1(\zeta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{n i \zeta_1} + \bar{A}_n e^{-n i \zeta_1}),$$

where the A 's are in general complex constants, and bars denote the usual conjugate complex quantities.

We must now try and choose the A 's to satisfy the conditions on the second surface, and at this stage we introduce the variable ζ_2 . In the above formula for Ω we write $\zeta_1 = \zeta_2 + i\alpha$ when it is simply

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{1}{2} i \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b'_n e^{-n\alpha} e^{n i \zeta_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}'_n e^{n\alpha} e^{-n i \zeta_2} \right\} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{-n\alpha} e^{n i \zeta_2} + \bar{A}_n e^{n\alpha} e^{-n i \zeta_2}). \end{aligned}$$

But the argument relating to ψ applies also on this cylinder, so that we may conclude that this value of Ω must also be of the form

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_2 + F_2(\zeta_2) \\ &= \frac{1}{2} i \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b''_n e^{n i \zeta_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}''_n e^{-n i \zeta_2} \right\} + F_2(\zeta_2), \end{aligned}$$

wherein

$$b''_n = \sum_{r=0}^{\infty} a''_n + r \bar{a}''_r,$$

and $F_2(\zeta_2)$ is real when ζ_2 is real.

It follows therefore that the difference between the first form for Ω and the quantity we have just designated as Ω_2 is a real quantity when ζ_2 is real. This means of course that in this difference the coefficients of the terms like $\exp(\varrho i \zeta_2)$ and $\exp(-\varrho i \zeta_2)$ are conjugate complex quantities. Expressing this we obtain at once the following equations for the coefficients A_n

$$2 A_n \sinh n\alpha = i b'_n \cosh n\alpha - i b''_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Inserting these values of the A 's we have finally the complete formula for Ω as

$$\Omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n e^{n\zeta_1},$$

where

$$\begin{aligned}\Omega_n &= (i b_n e^{n\alpha} - i \bar{b}_n'')/2 \sinh n\alpha; \\ \Omega_{-n} &= (-i \bar{b}_n' e^{-n\alpha} + i \bar{b}_n'')/2 \sinh n\alpha.\end{aligned}$$

The torsional constant.

13. Having found the complex function $\Omega (= \varphi + i\psi)$ we now proceed to interpret the couple which must be applied to the cylinder, in terms of Ω . It is easy to show that the tractions on any cross-section are statically equivalent to a couple, the moment of which is

$$T\mu \iint (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x}) dx dy.$$

This couple applied at the ends of the cylinder then holds the cylinder in the given displaced position.

The first part of the integral for the couple, viz.

$$\iint (x^2 + y^2) dx dy$$

can either be expressed directly as the moment of inertia of the cross-section of the prism, or its value can be interpreted in terms of the complex variable z in the following manner. We have

$$\iint (x^2 + y^2) dx dy = \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) + \frac{\partial}{\partial x} (x y^2) \right\} dx dy,$$

which by Green's lemma is converted into an integral round the boundary as

$$\int_c (-x^2 y dx + x y^2 dy) = \int_c x y (-x dx + y dy).$$

In terms of $z = x + iy$ this is then

$$\frac{1}{2} i \int_c (z^2 - \bar{z}^2) (z dz + \bar{z} d\bar{z}),$$

which is the real part of

$$\frac{1}{2} i \int_c (z^2 - \bar{z}^2) z dz,$$

which, since the first term gives zero, is the real part of

$$-\frac{1}{2} i \int_c \bar{z}^2 z dz.$$

The rest of the integral for the couple is

$$\iint \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (x \varphi) - \frac{\partial}{\partial x} (y \varphi) \right\} dx dy,$$

which again is converted into the integral

$$\int_c (-y \varphi dy - x \varphi dx),$$

round the boundary c of the cross-section. This integral is then the real part of

$$-\int_c \Omega (x dx + y dy) = -\frac{1}{2} \int_c \Omega d(z\bar{z}).$$

Integrating by parts we have this integral equal to

$$-\frac{1}{2} |\Omega z \bar{z}|_c + \frac{1}{2} \int_c z \bar{z} d\Omega,$$

and the integrated part being zero we are left with

$$\frac{1}{2} \int_c z \bar{z} d\Omega.$$

Thus finally we have the couple expressed in terms of Ω and z as the real part of

$$\frac{1}{2} T \mu \int_c \left(2 \frac{d\Omega}{dz} - i \bar{z} \right) z \bar{z} dz.$$

As a verification we see that this gives the usual result for the circular cylinder, when we have

$$\Omega = \text{const.} \quad z = a e^{i\zeta},$$

so that the couple is the real part of

$$\frac{1}{2} T \mu \int_0^{2\pi} a^4 d\zeta = \frac{1}{2} \pi T \mu a^4.$$

14. We can of course find the couple on the cylinder in the general case, and we take first the problem of the solid cylinder defined by the transformation

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n i \zeta}.$$

We have found in this case that the complex function Ω is given by

$$\Omega = i \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{n i \zeta},$$

so that

$$\frac{d\Omega}{d\zeta} = - \sum_{n=0}^{\infty} n b_n e^{n i \zeta}.$$

In the integral for the couple we also want $\bar{z} dz$ which is

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n e^{-n i \zeta} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n i a_n e^{n i \zeta} \right) d\zeta,$$

and which we write in the form

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{n i \zeta} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} e^{-n i \zeta} \right\} d\zeta,$$

where

$$c_n = \sum_{r=0}^{\infty} (n+r) a_{n+r} \bar{a}_r; \quad c_{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} r \bar{a}_{n+r} a_r.$$

We then find the couple to be the real part of

$$\frac{1}{2} T \mu \int_0^{2\pi} \left\{ -2 \sum_{n=1}^{\infty} n b_n e^{n i \zeta} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{n i \zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-n i \zeta} \right\} \\ \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{n i \zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n e^{-n i \zeta} \right\} d\zeta,$$

which gives immediately, picking out the constant terms,

$$\frac{1}{2} \pi T \mu \left[-2 \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \bar{b}_n + c_0 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \bar{b}_n + c_{-n} b_n) \right].$$

A simple example of this type of problem is the cylinder whose cross-section is a cardioid defined by the transformation

$$z = c(1 - e^{i\zeta})^2.$$

We have immediately

$$\begin{array}{lllll} a_0 = c; & a_1 = -2c; & a_2 = c; & n > 2 & a_n = 0; \\ b_0 = 6c^2; & b_1 = -4c^2; & b_2 = c^2; & n > 2 & b_n = 0; \\ c_0 = 6c^2; & c_1 = -6c^2; & c_2 = 2c^2; & n > 2 & c_n = 0; \\ & c_{-1} = -2c^2; & c_{-2} = 0; & n > 2 & c_{-n} = 0; \end{array}$$

so that the complex potential function is given by

$$\Omega = \text{const.} - 4ic^2 e^{i\zeta} + ic^2 e^{2i\zeta}$$

and the couple on the cylinder is

$$17 T \mu \pi c^4.$$

16. The couple on the cylinder in the second type of problem can also be found in the general case. The general transformation is

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(n-1)\epsilon} \zeta,$$

and the boundaries of the cylinder are the level surfaces $\eta = \alpha_1$ and $\eta = \alpha_2$ of this transformation. As before we write the transformation in the form

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n e^{(n-1)\epsilon} \zeta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n e^{(n-1)\epsilon} \zeta_2,$$

and we find the complex potential function Ω to be given by

$$\Omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n e^{n\epsilon} \zeta_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_n e^{-n\alpha + n\epsilon} \zeta_2,$$

where

$$\Omega_n = (i b'_n e^{n\alpha} - i b''_n)/2 \sinh n\alpha,$$

$$\Omega_{-n} = (-i \bar{b}'_n e^{-n\alpha} + i \bar{b}''_n)/2 \sinh n\alpha.$$

For cylinders of this type the couple is the real part of

$$\frac{1}{4} T\mu \int_{c_2} \left(2 \frac{d\Omega}{dz} - i\bar{z} \right) z \bar{z} dz - \frac{1}{4} T\mu \int_{c_1} \left(2 \frac{d\Omega}{dz} - i\bar{z} \right) z \bar{z} dz$$

where c_2 and c_1 are the two boundaries of the cylinder, and in the first integral we interpret Ω and z in terms of ζ_2 since η_2 is zero on the boundary c_2 , and similarly in the second integral we interpret Ω and z in terms of ζ_1 since η_1 is zero on c_1 .

The first integral is then

$$\frac{1}{4} T\mu \int_0^{2\pi} \left\{ 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n i \Omega_n e^{-n\alpha} e^{n\epsilon} \zeta_2 + \sum_{n=0}^{\infty} c''_n e^{n\epsilon} \zeta_2 + \sum_{n=1}^{\infty} c''_{-n} e^{-n\epsilon} \zeta_2 \right\} \\ \times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b''_n e^{n\epsilon} \zeta_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}''_n e^{-n\epsilon} \zeta_2 \right\} d\zeta_2$$

where

$$c''_n = \sum_{r=0}^{\infty} (n+r-1) a''_{n+r} \bar{a}''_r; \quad c''_{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} (r-1) \bar{a}''_{r-n} a''_r.$$

The above integral then gives

$$\frac{1}{4} \pi T\mu \left[\sum_{n=1}^{\infty} \{ 2n b''_n \bar{b}''_n \coth n\alpha - n(\bar{b}''_n b'_n + b''_n \bar{b}'_n)/\sinh n\alpha \} \right. \\ \left. + c''_0 b''_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c''_n \bar{b}''_n + c''_{-n} b''_n) \right].$$

The second integral is similarly

$$\frac{1}{2} T \mu \int_0^{2\pi} \left\{ 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n i \Omega_n e^{n i \zeta_1} + \sum_{n=0}^{\infty} c'_n e^{n i \zeta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} c'_{-n} e^{-n i \zeta_1} \right\} \\ \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b'_n e^{n i \zeta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}'_n e^{-n i \zeta_1} \right) d\zeta_1$$

where

$$c'_n = \sum_{r=0}^{\infty} (n+r-1) a'_{n+r} \bar{a}'_r; \quad c'_{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} (r-1) \bar{a}'_{n+r} a'_r,$$

so that the integral is

$$\frac{1}{2} \pi T \mu \left[\sum_{n=1}^{\infty} \{ -2n b'_n \bar{b}'_n \coth n\alpha + n (\bar{b}'_n b''_n + b'_n \bar{b}''_n) / \sinh n\alpha \} \right. \\ \left. + c'_0 b'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c'_n \bar{b}'_n + c'_{-n} b'_n) \right].$$

Thus finally the couple is the real part of

$$\frac{1}{2} \pi T \mu \left[\sum_{n=1}^{\infty} \{ 2n \coth n\alpha (\bar{b}'_n b''_n + b'_n \bar{b}''_n) - 2n (\bar{b}'_n b''_n + b'_n \bar{b}''_n) / \sinh n\alpha \} \right. \\ \left. - c'_0 b'_0 + c''_0 \bar{b}''_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c''_n \bar{b}'_n + c''_{-n} b''_n - c'_n \bar{b}'_n - c'_{-n} b'_n) \right].$$

A particular case of a problem of this kind is the one for which the surfaces of the cylinder are confocal ellipses. The transformation is then

$$z = c \cos \zeta = \frac{1}{2} c (e^{\zeta} + e^{-\zeta})$$

so that

$$\begin{aligned} a'_0 &= \frac{1}{2} c e^{\alpha_1}; & a'_2 &= \frac{1}{2} c e^{-\alpha_1}; \\ b'_0 &= \frac{1}{2} c^2 \cosh 2\alpha_1; & b'_1 &= 0; & b'_2 &= \frac{1}{2} c^2; \\ c'_0 &= -\frac{1}{2} c^2 \sinh 2\alpha_1; & c'_1 &= 0; & c'_2 &= \frac{1}{2} c^2; \\ & & c'_{-1} &= 0; & c'_{-2} &= -\frac{1}{2} c^2; \end{aligned}$$

with similar expressions in α_2 for $a''_0 \dots, b''_0 \dots, c''_0 \dots$

We find at once that

$$\Omega_1 = 0; \quad \Omega_{-1} = 0;$$

$$\Omega_2 = i c^2 (e^{2\alpha} - 1) / 8 \sinh 2\alpha; \quad \Omega_{-2} = i c^2 (1 - e^{-2\alpha}) / 8 \sinh 2\alpha,$$

so that

$$\Omega = \frac{i c^2 (e^{2\alpha} - 1) e^{2 i \zeta_1} + i c^2 (1 - e^{-2\alpha}) e^{-2 i \zeta_1}}{8 \sinh 2\alpha}$$

or

$$\Omega = i c^2 \cos \{ 2 \zeta - i (\alpha_1 + \alpha_2) \} / 4 \cosh \alpha$$

which gives the usual form for ψ the same as that given by Love¹⁸).

¹⁸) loc. cit. p. 374.

The couple in this case is then found to be

$$\frac{1}{16} \pi T \mu c^4 [4 \tanh \alpha + \sinh 4 \alpha_1 - \sinh 4 \alpha_2].$$

Another solution given by Love, actually obtained on lines used by us in the general case, is when the cylinder is a hollow shaft the inner and outer boundaries being circles which are not concentric. The transformation for such a cylinder is

$$z = c \tan \frac{1}{2} \zeta = c i \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n e^{n i \zeta} \right\},$$

where, since the transformation is of the other form, $\eta = \alpha_1$ on the outer boundary, and $\eta = \alpha_2$ on the inner. We have in this case

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; & a_1 &= c i; & n > 1 & & a_n &= 2 c i (-)^n e^{n i \zeta}; \\ a'_0 &= 0; & a'_1 &= c i; & n > 1 & & a'_n &= 2 c i (-)^n e^{-(n-1) \alpha_1}; \end{aligned}$$

and then

$$\begin{aligned} b'_0 &= c^3 + \frac{4 c^3 e^{-2 \alpha_1}}{1 - e^{-2 \alpha_1}}; & n > 0 & & b_n &= 2 c^3 (-)^n e^{-n \alpha_1} \coth \alpha_1; \\ c'_0 &= \frac{4 c^3 e^{-2 \alpha_1}}{(1 - e^{-2 \alpha_1})^2}; & n > 0 & & c'_n &= 2 c^3 (-)^n n e^{-n \alpha_1} \coth \alpha_1 + \frac{4 c^3 (-)^n e^{-(n+2) \alpha_1}}{(1 - e^{-2 \alpha_1})^2}; \\ c'_{-n} &= \frac{4 c^3 (-)^n e^{-(n+2) \alpha_1}}{(1 - e^{-2 \alpha_1})^2}; \end{aligned}$$

with similar expressions in α_2 for b'_0 , b'_n etc.

From these we get immediately

$$\begin{aligned} \Omega_n &= c^3 i (-)^n \{ e^{-n \alpha_1} + n \alpha \coth \alpha_1 - e^{-n \alpha_2} \coth \alpha_2 \} / \sinh n \alpha, \\ \Omega_{-n} &= -c^3 i (-)^n \{ e^{-n \alpha_1} - n \alpha \coth \alpha_1 + e^{-n \alpha_2} \coth \alpha_2 \} / \sinh n \alpha \end{aligned}$$

which gives

$$\Omega = \text{const.} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 c^3 (-)^n}{\sinh n \alpha} \{ e^{-n \alpha_2} \coth \alpha_2 \sin n(\zeta - i \alpha_1) - e^{-n \alpha_1} \coth \alpha_1 \sin n(\zeta - i \alpha_2) \},$$

which results in the same form for ψ as that given by Love.

The couple on the cylinder is then given by

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \pi T \mu c^4 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \{ 8 n \coth n \alpha (e^{-2 n \alpha_2} \coth^2 \alpha_2 + e^{-2 n \alpha_1} \coth^2 \alpha_1) \right. \\ \left. - 16 n (e^{-n(\alpha_1 + \alpha_2)} \coth \alpha_1 \coth \alpha_2) / \sinh n \alpha \right. \\ \left. + \frac{2}{\sinh^2 \alpha_2} + \frac{3}{\sinh^4 \alpha_2} - \frac{2}{\sinh^2 \alpha_1} - \frac{3}{\sinh^4 \alpha_1} \right]. \end{aligned}$$

The part of this which must be summed to infinity can be reduced to the form

$$-2\pi T\mu c^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-n(\alpha_1 + \alpha_2)}}{\sinh n\alpha} \{2(\coth \alpha_1 - \coth \alpha_2)^2 \\ + 2 \sinh^2 n\alpha (\coth^2 \alpha_1 + \coth^2 \alpha_2) \\ + \sinh 2n\alpha (\coth^2 \alpha_1 - \coth^2 \alpha_2)\}.$$

This can be summed in the following manner

$$-2\pi T\mu c^4 \left[\sum_{n=1}^{\infty} 4(\coth \alpha_1 - \coth \alpha_2)^2 n e^{-n(\alpha_1 + \alpha_2)} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-n\alpha - 2rn\alpha} \right. \\ + \sum_{n=1}^{\infty} n(e^{-2n\alpha_1} - e^{-2n\alpha_2})(\coth^2 \alpha_1 + \coth^2 \alpha_2) \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} n(e^{-2n\alpha_1} + e^{-2n\alpha_2})(\coth^2 \alpha_1 - \coth^2 \alpha_2) \right]$$

and summing for n we get the whole expression equal to

$$-2\pi T\mu c^4 \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\coth \alpha_1 - \coth \alpha_2)^2}{\sinh^2 \{(r+1)\alpha_2 - r\alpha_1\}} + \frac{\coth^2 \alpha_1}{4 \sinh^2 \alpha_1} - \frac{\coth^2 \alpha_2}{4 \sinh^2 \alpha_2} \right].$$

Thus finally the couple on the cylinder is given by

$$-\frac{1}{2}\pi T\mu c^4 \left[8(\coth \alpha_1 - \coth \alpha_2)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh 2\{(r+1)\alpha_2 - r\alpha_1\} - 1} \right. \\ \left. + \frac{2 \cosh^2 \alpha_1}{\sinh^4 \alpha_1} - \frac{2 \cosh^2 \alpha_2}{\sinh^4 \alpha_2} + \frac{2}{\sinh^2 \alpha_2} + \frac{3}{\sinh^4 \alpha_2} - \frac{2}{\sinh^2 \alpha_1} - \frac{3}{\sinh^4 \alpha_1} \right]$$

or

$$\pi T\mu c^4 [\operatorname{cosech}^4 \alpha_1 - \operatorname{cosech}^4 \alpha_2] \\ - 4\pi T\mu c^4 (\coth \alpha_1 - \coth \alpha_2)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{[\cosh 2\{(r+1)\alpha_2 - r\alpha_1\} - 1]}.$$

Now

$$d = c(\coth \alpha_1 - \coth \alpha_2)$$

is the distance between the axes of the inner and outer boundaries whilst

$$r_1 = c \operatorname{cosech} \alpha_1; \quad r_2 = c \operatorname{cosech} \alpha_2,$$

are the radii of these boundaries respectively. The above solution can therefore be written in a form analogous to that given by B. Grindberg and M. Paschoud¹⁷⁾.

¹⁷⁾ loc. cit. p. 384.

Appendix.

The general transformations we have used are:

$$(a) \quad z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(n-1)\zeta}, \quad \text{for external problems:}$$

$$(b) \quad z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n\zeta}, \quad \text{for internal problems.}$$

The following is a list of the surfaces which are particular cases of the above general surfaces.

1. Ellipse: this occurs as an external surface in the transformation

$$z = c \cos \zeta$$

transforming the plane bounded by the edges of the straight cut joining $(-c, 0)$ to $(c, 0)$, to the exterior of a circle. For such a surface

$$z = c \cos (\zeta + i\alpha)$$

is the appropriate external transformation.

There seems to be no appropriate internal transformation for the elliptic cylinder.

2. The more general cylinder treated by Dr. Wrinch¹⁸).

$$z = na e^{-\zeta} + b e^{n\zeta} \quad \text{for external problems;}$$

$$z = na e^{\zeta} + b e^{n\zeta} \quad \text{for internal problems.}$$

3. Circular sector: in this case the general transformation for internal space is

$$z = a e^{i \frac{(\alpha + \beta)}{2} \zeta} [V(1 - \tan^2 \zeta) - i \tan \frac{\beta - \alpha}{2} \zeta]^{\frac{\beta - \alpha}{\pi}}$$

where its radii are inclined to the x -axis at angles α and β . This is somewhat difficult to express in the required form, but the difficulties are merely analytical rather than fundamental. The transformation in the case of the semi-circular section, which is, of course, a particular case of the above, is

$$z = a [V(1 - \tan^2 \frac{1}{2} \zeta) - i \tan \frac{1}{2} \zeta]$$

or

$$z = a [V\{2(1 + e^{2i\zeta})\} + 1 - e^{i\zeta}]/(1 + e^{i\zeta})$$

which can be expressed in the required series form

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n\zeta}$$

¹⁸ D. M. Wrinch, *Phil. Mag.* 49 (1925), p. 240.

wherein

$$a_0 = a(\sqrt{2} + 1); \quad a_1 = -a(2 + \sqrt{2}); \quad a_2 = a\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\right);$$

$$a_3 = -a\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\right);$$

and for $n > 3$ and odd

$$a_n = -\left\{\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 + \sqrt{2} \sum_{r=3}^{n-1} (-)^{r+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots (2r-3)}{2^r r!}\right\};$$

and for $n > 3$ and even

$$a_n = \left\{\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 + \sqrt{2} \sum_{r=3}^{n/2} (-)^{r+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots (2r-3)}{2^r r!}\right\}.$$

4. Circular arc: the transformation for a circular arc subtending an angle 4α at the centre is

$$\frac{z - ae^{2i\alpha}}{z - ae^{-2i\alpha}} = \left\{ \frac{e^{-i\zeta} - ie^{i\alpha}}{e^{-i\zeta} + ie^{-i\alpha}} \right\}^2$$

or

$$z = a \cos 2\alpha + a \sin \alpha \cdot e^{-i\zeta} \{1 + 2e^{i\zeta} \sin \alpha + e^{2i\zeta} \cos 2\alpha\} \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \sin^n \alpha e^{n i \zeta}\right\} = e^{-i\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n i \zeta}$$

wherein

$$a_0 = a \sin \alpha; \quad a_1 = a$$

and for $n > 1$

$$a_n = (-)^{n-1} a \sin^{n-1} \alpha \cos^2 \alpha.$$

5. The circle itself is of course an identical transformation

$$z = ae^{-i\zeta}, \quad \text{for external problems,}$$

$$z = ae^{i\zeta}, \quad \text{for internal problems.}$$

When dealing with the space between non-concentric circles we use the transformation

$$z = c \tan \frac{1}{2} \zeta = ci \left\{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n e^{n i \zeta}\right\}.$$

6. Joukowski airfoil section: the transformation relating to the space external to cylinders with these sections is

$$z = z_0 + ae^{-i\zeta} + b^2/(z_0 + ae^{-i\zeta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(n-1)i\zeta}$$

where

$$a_0 = a; \quad a_1 = z_0; \quad a_2 = \frac{b^2}{a};$$

$$n > 2, \quad a_n = (-1)^n \frac{b^2}{a} \left(\frac{z_0}{a} \right)^{n-2}.$$

The internal transformation for these cylinders has not yet been obtained.

7. Polygonal sections: the transformation for external space for the general cylinder with a polygonal section is

$$z = A' \int \prod_{r=1}^n \left\{ \sin \frac{1}{2} (\zeta - \zeta_r) \right\}^{\frac{\alpha_r}{\pi} - 1} d\zeta$$

$$= A \int e^{-i\zeta} \prod_{r=1}^n \left\{ 1 - e^{i(\zeta - \zeta_r)} \right\}^{\frac{\alpha_r}{\pi} - 1} d\zeta$$

where the α_r 's are the external angles of the polygon so that $\sum_{r=1}^n \alpha_r = (n+2)\pi$ and the ζ 's are constants. To avoid the occurrence of a term in ζ in this integral we must, of course, choose the three arbitrary ζ_r 's so that the constant term in the integrand is zero. This can always be done.

For the internal space the corresponding transformation is

$$z = A \int e^{i\zeta} \prod_{r=1}^n \left\{ 1 - e^{i(\zeta - \zeta_r)} \right\}^{-\left(\frac{\alpha_r}{\pi} - 1\right)} d\zeta.$$

These can be expanded in terms of $e^{i\zeta}$ so long as $|e^{i\zeta}| < 1$, so that the expansions will only generally be valid up to the cylinder and not actually on it. As a matter of fact they will also be valid on the cylinder except in the neighbourhood of the corners, where the singularities occur. In practice we replace $e^{i\zeta}$ in the integrand by $e^{i(\zeta + i\alpha)} = e^{i\zeta - \alpha}$; obtaining thereby more general transformation formulae, which tend to those specified when $\alpha \rightarrow 0$.

Particular cases are given by

(i) Surfaces associated with a rectangle.

The external transformation is

$$z = A \int \sqrt{\{\cos 2(\zeta + i\alpha) - \cos 2\beta\}} d\zeta$$

$$= e^{-i\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} e^{2ni\zeta} + B,$$

where B is a constant of integration and

$$a_0 = \frac{A e^{\alpha}}{\sqrt{2}}; \quad a_2 = -\frac{A e^{-\alpha}}{\sqrt{2}} \cos 2\beta,$$

and for $n > 1$

$$a_{2n} = \frac{A e^{-(2n-1)\alpha}}{\sqrt{2}(2n-1)} [P_n(\cos 2\beta) - 2 \cos 2\beta P_{n-1}(\cos 2\beta) + P_{n-2}(\cos 2\beta)],$$

the P 's being Legendre functions.

The internal transformation is

$$z = A \int^{\zeta} \{\cos 2(\zeta + i\alpha) - \cos 2\beta\}^{-\frac{1}{2}} d\zeta \\ = e^{i\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} e^{2ni\zeta} + B,$$

where B is a constant of integration and

$$a_0 = A \sqrt{2} e^{-\alpha}; \quad n > 0 \quad a_{2n} = \frac{A \sqrt{2} e^{-(2n+1)\alpha}}{(2n+1)} P_n(\cos 2\beta).$$

(ii) Surfaces associated with the regular n -sided polygon. The external transformation is

$$z = A \int^{\zeta} e^{-i\zeta} \{1 - e^{n i (\zeta + i\alpha)}\}^{\frac{2}{n}} d\zeta \\ = e^{-i\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{ni\zeta}$$

where

$$a_0 = Ai; \quad a_1 = B; \quad a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = 0$$

$$a_n = \frac{2Ai}{n(n-1)} e^{-n\alpha}$$

and for $r > 1$

$$a_{rn} = - \frac{Ai 2(n-2) \dots \{(r-1)n-1\}}{n^r r! (rn-1)} e^{-rn\alpha}.$$

The internal transformation is

$$z = \int^{\zeta} e^{i\zeta} \{1 - e^{n i (\zeta + i\alpha)}\}^{-\frac{2}{n}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{ni\zeta};$$

where

$$a_0 = B; \quad a_1 = -Ai; \quad a_2 = a_3 = \dots a_n = 0; \quad a_{n+1} = - \frac{Ai e^{-n\alpha}}{n(n+1)};$$

and for $r > 1$

$$a_{rn+1} = - \frac{Ai 2(n+2) \dots \{(r-1)n+2\}}{n^r r! (rn+1)} e^{-rn\alpha}.$$

The equilateral triangle is a particular case of the above when $n = 3$.

(iii) One or two other cases explicitly employed involve the level surfaces of certain polygonal cuts of zero area. In these cases the external transformation is alone possible.

(a) the n -bladed propeller examined by Westwater¹⁹⁾

$$z = c \left\{ \cos \frac{1}{2} n (\zeta + i\alpha) \right\}^{\frac{2}{n}}$$

or

$$z = 2^{-\frac{2}{n}} c e^{-i(\zeta + i\alpha)} \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-)^{r+1} \frac{2(n-2) \dots \{(r-1)n-2\}}{n^r r!} e^{r n i (\zeta + i\alpha)} \right\}.$$

(b) the "keel and rudder" surface treated by S. D. Daymond and L. Rosenhead²⁰⁾

$$\begin{aligned} z &= A e^{-i(\zeta + i\alpha)} \{ e^{i(\zeta + i\alpha)} - e^{-i\alpha} \}^{1+k} \{ e^{i(\zeta + i\alpha)} - e^{i\alpha} \}^{1-k} \\ &= A e^{\alpha + 2k i \alpha - i \zeta} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r c_n(k) e^{r n i (\zeta + i\alpha)} \right\} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r c_n(-k) e^{r n i (\zeta - i\alpha)} \right\}, \end{aligned}$$

wherein

$$c_0(k) = 1; \quad c_0(-k) = 1$$

and for $n > 0$

$$\begin{aligned} c_n(k) &= \frac{(1+k)(k)(k-1) \dots (k-n+2)}{n!}, \\ c_n(-k) &= (-)^n \frac{(k-1)k(k+1) \dots (k+n-2)}{n!} \end{aligned}$$

which gives for the transformation

$$z = e^{-i\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n i \zeta}$$

wherein

$$a_0 = A e^{\alpha + 2k i \alpha};$$

and for $n > 0$

$$a_n = A e^{\alpha + 2k i \alpha} \sum_{r=0}^n (-)^r e^{(n-2r) i \alpha} c_{n-r}(k) c_r(-k).$$

¹⁹⁾ F. L. Westwater, Proc. Camb. Phil. Soc. **32** (1936), p. 676.

²⁰⁾ S. D. Daymond and L. Rosenhead, Proc. Camb. Phil. Soc. **33** (1937), p. 62.

Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet- reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I.

Von

Hans Petersson in Hamburg.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit untersuche ich die Wirkung der von Herrn Hecke eingeführten¹⁾ Operatoren T_n für beliebige natürliche n auf die zur vollen Modulgruppe gehörigen ganzen Modulformen von gerader Dimension. Zur Formulierung der Problemstellung bediene ich mich der vektoriellen Darstellung; dabei benutze ich die auf die Modulformen der Stufe 1 bezüglichen Bezeichnungen und die wichtigsten Ergebnisse von $(T_n I)$, § 1—3.

Es sei r eine gerade Zahl ≥ 4 , \mathfrak{S}_1 die lineare Schar der ganzen Modulformen von der Dimension $-r$, κ der Rang (die Maximalzahl linear unabhängiger Formen) von \mathfrak{S}_1 ; für die im folgenden auftretenden Modulformen wird stets die inhomogene Schreibweise gewählt. Einen Vektor

$$q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_\kappa(\tau)\},$$

dessen Komponenten $\varphi_j(\tau)$ ($1 \leq j \leq \kappa$) Formen aus \mathfrak{S}_1 sind, nenne ich einen Formenvektor über \mathfrak{S}_1 . Ist $\Gamma = (\gamma_{j,k})$ ($j, k = 1, 2, \dots, \kappa$) irgendeine Matrix mit komplexen konstanten Elementen, so verstehe man unter $\Gamma q(\tau)$ den Spaltenvektor, der als Matrizenprodukt der Matrix Γ mit der Spalte $q(\tau)$ erscheint. Einen Vektor $q(\tau)$, dessen Komponenten linear unabhängig sind, nenne ich einen Basisvektor über \mathfrak{S}_1 . Ist $q(\tau)$ ein Basisvektor, $p(\tau)$ ein beliebiger Formenvektor, so gilt stets eine Beziehung

$$(1) \quad p(\tau) = \Gamma q(\tau).$$

$p(\tau)$ ist dann und nur dann Basisvektor, wenn die Determinante $|\Gamma|$ von Γ nicht verschwindet.

Unter einer linearen Transformation in \mathfrak{S}_1 verstehen wir einen Operator T , der jeder Form $f(\tau)$ aus \mathfrak{S}_1 eine Form $f(\tau) | T$ aus \mathfrak{S}_1 eindeutig zuordnet und der die Relationen

$$(\alpha_1 f_1(\tau) + \alpha_2 f_2(\tau)) | T = \alpha_1 \cdot f_1(\tau) | T + \alpha_2 \cdot f_2(\tau) | T$$

¹⁾ E. Hecke, Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, II, Math. Annalen 114 (1937), S. 1—28, 316—351, im folgenden zitiert mit $(T_n I)$ und $(T_n II)$.

für beliebige f_1, f_2 aus \mathfrak{S}_1 und beliebige konstante α_1, α_2 erfüllt. Die Wirkung von T auf einen Formenvektor $q(\tau)$ über \mathfrak{S}_1 erklären wir durch

$$q(\tau) | T = \{\varphi_1(\tau) | T, \varphi_2(\tau) | T, \dots, \varphi_n(\tau) | T\}.$$

Ist $q(\tau)$ ein Basisvektor über \mathfrak{S}_1 , so wird die Wirkung von T auf \mathfrak{S}_1 durch eine Gleichung

$$(2) \quad q(\tau) | T = A q(\tau),$$

in der A eine konstante Matrix bezeichnet, vollständig beschrieben. Bedeutet $p(\tau) = \Gamma q(\tau)$ einen beliebigen anderen Basisvektor über \mathfrak{S}_1 , so gilt an Stelle von (2):

$$(3) \quad p(\tau) | T = \Gamma A \Gamma^{-1} p(\tau).$$

Es sei n eine natürliche Zahl, T_n der in $(T_n I)$ erklärte lineare Operator. Jedem Basisvektor $q(\tau)$ über \mathfrak{S}_1 entspricht nach (2) eine konstante Matrix $A = A(n)$ mit

$$(4) \quad q(\tau) | T_n = A(n) q(\tau).$$

In der vorliegenden Arbeit wird die Aufgabe behandelt, einen Basisvektor $q(\tau)$ über \mathfrak{S}_1 zu bestimmen, dessen Matrizen $A(n)$ für alle natürlichen n reine Diagonalgestalt haben. Nach (1), (2), (3) erfordert die Lösung dieser Aufgabe den Nachweis der Möglichkeit, die $A(n)$ für alle natürlichen n *simultan* auf Diagonalgestalt zu transformieren.

Dieser Nachweis gelingt in zwei Schritten. Zunächst wird die Existenz eines Basisvektors bewiesen, dessen $A(n)$ sämtlich Hermitesche Matrizen sind. Dadurch wird das Problem auf die Aufgabe reduziert, endlich viele Hermitesche und nach $(T_n I)$ paarweise vertauschbare Matrizen *simultan* auf Diagonalgestalt zu transformieren. Diese Teilaufgabe läßt sich auf Grund bekannter Sätze der linearen Algebra ohne Schwierigkeit lösen. Die transformierende Matrix erweist sich als unitär.

Die Eigenschaften des nach diesem Gedankengang zu konstruierenden Basisvektors werden durch die folgende Aussage beschrieben:

Satz 1. *Zu jeder geraden Dimension existiert ein volles System linear unabhängiger ganzer Modulformen $\varphi_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \dots, \kappa$) derart, daß die Gleichungen*

$$\varphi_j(\tau) | T_n = \omega_j(n) \varphi_j(\tau) \quad (j = 1, 2, \dots, \kappa)$$

mit geeigneten reellen algebraischen $\omega_j(n)$ für alle natürlichen n bestehen.

Dieser Satz ist offenbar gleichbedeutend sowohl damit, daß die Matrix $B(\tau)$ aus $(T_n I)$, § 3 mit Hilfe einer (konstanten) unitären Matrix auf reine Diagonalgestalt transformiert werden kann, als auch damit, daß die in $(T_n I)$, Satz 29 genannten Vielfachheiten v_i der charakteristischen Wurzeln von $B(\tau)$

sämtlich gleich 1 sind. Im übrigen sind diese charakteristischen Wurzeln natürlich nicht nur alle voneinander verschieden, sondern auch zusammen linear unabhängig. Da sie ferner unabhängig von der Wahl der Basis durch ihre Definition bis auf die Reihenfolge eindeutig festgelegt sind, stimmen sie mit den in Satz 1 genannten $\varphi_j(\tau)$ bis auf konstante Faktoren und die Reihenfolge überein. Daher sind auch die $\varphi_j(\tau)$ aus Satz 1 bis auf konstante Faktoren und die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Die Sätze 16, 23, 24 in (T_n I) und die Ergebnisse von (T_n II), § 9 führen danach zu der folgenden bemerkenswerten Aussage über Dirichletreihen mit Funktionalgleichung, die ich hier vollständig und ohne Benutzung des Begriffes „Modulform“ formuliere.

Satz 2. Für festes gerades $r \geq 4$ betrachte man alle (irgendwo konvergenten) Dirichletreihen

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- a) $(s - r) D(s)$ ist eine ganze Funktion von s von endlichem Geschlecht.
- b) Wird

$$R(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) D(s)$$

gesetzt, so gilt die Funktionalgleichung

$$R(s) = (-1)^{\frac{r}{2}} R(r - s).$$

Dann bestehen über die Lösungen dieses Problems die folgenden Tatsachen:

1. Es existieren höchstens endlich viele linear unabhängige Lösungen $D(s)$. Die Maximalzahl κ der linear unabhängigen Lösungen ist

$$\kappa = \left[\frac{r}{12} \right], \text{ wenn } r \equiv 2 \pmod{12}, \quad \kappa = \left[\frac{r}{12} \right] + 1, \text{ wenn } r \not\equiv 2 \pmod{12}.$$

2. Es gibt ein vollständiges System $H_j(s)$ ($1 \leq j \leq \kappa$) von κ linear unabhängigen Lösungen $D(s) = H_j(s)$ derart, daß jedes $H_j(s)$ eine Eulersche Produktentwicklung von der Gestalt

$$H_j(s) = \prod_p \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_j(p^v)}{p^{vs}} \quad \text{mit } c_j(1) = 1 \quad (1 \leq j \leq \kappa)$$

besitzt. (Das Produkt ist über alle Primzahlen > 1 zu erstrecken.)

3. Dieses Lösungssystem der $H_j(s)$ ist durch die lineare Unabhängigkeit und die Existenz der Produktentwicklung bis auf die Reihenfolge der $H_j(s)$ eindeutig bestimmt. Die Faktoren des Produkts haben bei geeigneter Wahl dieser Reihenfolge notwendig die Form

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_j(p^v)}{p^{vs}} = (1 - \omega_j(p) p^{-s} + p^{r-1-2s})^{-1} \quad (1 \leq j \leq \kappa).$$

4. Von den Dirichletreihen $H_j(s)$ ($1 \leq j \leq \kappa$) ist eine mit $\zeta(s)\zeta(s-\tau+1)$ identisch, wo $\zeta(s)$ die Riemannsche ζ -Funktion bezeichnet; alle übrigen sind ganze Funktionen von s .

Dieser Satz gestattet im Falle, daß τ durch 4 teilbar ist, eine bemerkenswerte arithmetische Interpretation; sie beruht auf einem neueren Ergebnis über quadratische Formen in 24 Variablen von der Determinante 1²⁾.

Ist τ durch 4 teilbar, so lassen sich alle ganzen Modulformen von der Dimension $-\tau$ als Polynome in G_4 und Δ schreiben (vgl. (T_n I), S. 6). Hier erweist sich zunächst G_4 bis auf einen konstanten Faktor als mit einer Thetareihe identisch, deren quadratische Form (in 8 Variablen) die Determinante 1 hat. Daher ist die Modulform G_4^3 von der Dimension -12 bis auf einen konstanten Faktor ebenfalls als Thetareihe mit einer quadratischen Form (in 24 Variablen) von der Determinante 1 darstellbar. Nach den genannten Untersuchungen existiert eine zu G_4^3 nicht proportionale weitere solche Thetareihe von der Dimension -12 . Man kann daher auch die Spitzenform $\Delta(\tau)$ als Linearkombination zweier solcher Thetareihen mit quadratischen Formen in 24 Variablen von der Determinante 1 schreiben. Hieraus folgt, daß alle ganzen Modulformen von der durch 4 teilbaren Dimension $-\tau$ durch Linearkombinationen von Thetareihen zu quadratischen Formen in 2τ Variablen von der Determinante 1 ausgedrückt werden können. Nach Satz 2 gibt es unter diesen Linearkombinationen eine Maximalzahl von linear unabhängigen ganzen Modulformen derart, daß jede der ihnen nach (T_n I) zugeordneten Dirichletreihen ein Eulerprodukt besitzt.

Diesen Sachverhalt besagt die folgende

Ergänzung zu Satz 2. Es sei τ durch 4 teilbar. Es bezeichne

$$Q(x) = \sum_{i,k=1}^{2\tau} a_{i,k} x_i x_k, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2\tau}\},$$

eine positiv-definite quadratische Form mit ganzen Koeffizienten $a_{i,k} = a_{k,i}$, geraden $a_{i,i}$ und der Determinante 1. Dann ist die zugehörige Epstein'sche Zetafunktion

$$E(s, Q) = \sum_m (\tfrac{1}{2} Q(m))^{-s},$$

in der über alle 2τ -dimensionalen Gittervektoren m summiert wird, stets eine Lösung des durch a), b) bestimmten Problems. Die Maximalzahl der linear unabhängigen unter diesen Reihen $E(s, Q)$, die sich bei festem τ für die verschiedenen Q der genannten Art ergeben, ist gleich κ . Daher ist jede Lösung jenes Problems eine Linearkombination der $E(s, Q)$, und es gibt also κ (und

²⁾ B. Schoeneberg, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen, im Druck bei den Math. Annalen [erscheint in Bd. 116 (1939)].

nicht mehr) linear unabhängige Linearkombinationen $Z_k(s)$ der $E(s, Q)$ ($1 \leq k \leq \kappa$), welche eine Eulersche Produktentwicklung von der Gestalt unter 3. besitzen. Diese $Z_k(s)$ ($1 \leq k \leq \kappa$) sind durch die genannten Eigenschaften, und darüber hinaus sogar als linear unabhängige Lösungen des obigen Problems mit irgend-einer Eulerschen Produktentwicklung (wie unter 2.) bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Zum Beweis aller dieser Sätze genügt, wie angedeutet, im wesentlichen die Kenntnis eines Basisvektors $q(\tau)$ über \mathfrak{S}_1 , dessen Matrizen $A(n)$ sämtlich Hermiteische Matrizen sind. Da nach $(T_n I)$, Satz 25 die Eisensteinreihe von der Dimension $-r$ bereits Eigenfunktion für alle Operatoren T_n ist, kann man sich auf die Untersuchung der Schar \mathfrak{S}_0 der ganzen Spitzenformen beschränken. Der Existenznachweis für einen Basisvektor dieser Teilschar \mathfrak{S}_0 von der genannten Beschaffenheit beruht auf einem neuen Prinzip, durch das eine unitäre Geometrie im Raum der ganzen Modulformen ermöglicht wird und das ich daher als *Metrisierung der Modulformen* bezeichne.

Neben den Eigenschaften dieses Begriffes werden die Heckeschen Ergebnisse aus $(T_n I)$, soweit sie sich auf die volle Modulgruppe beziehen, benutzt. Nicht benutzt beim Beweis von Satz 1 werden die Sätze 4, 5, 6 in $(T_n I)$, die hieran anschließenden Betrachtungen über den Zusammenhang zwischen Dirichletreihen und Modulformen in $(T_n I)$, § 1, sowie der Inhalt von $(T_n I)$, § 4 und $(T_n II)$. Die Symbole und Bezeichnungen, die in dem folgenden Text nicht erklärt werden, haben die in $(T_n I)$ angegebene Bedeutung.

Der vorliegenden ersten Mitteilung sollen einige weitere über den gleichen Gegenstand folgen. Zunächst beabsichtige ich, den Apparat zu entwickeln, der aus der bis jetzt aufgestellten Transformationstheorie entsteht, wenn man diese auf ein gewisses System von expliziten analytischen Ausdrücken anwendet; diese Ausdrücke stellen sämtlich Modulformen dar, und es lassen sich aus ihnen auf unendlich viele verschiedene Weisen Basisvektoren über \mathfrak{S}_0 bilden. Die Grundformeln dieser Theorie habe ich ohne Beweise an anderer Stelle bereits angegeben³⁾.

Sodann soll später die Verallgemeinerung auf die Stufe Q (= beliebige natürliche Zahl) vollzogen werden. Hier ist gegenwärtig folgendes bewiesen: Es bezeichne $S(t, \varepsilon, Q)$ eine beliebige der in $(T_n II)$, § 10 erklärten Teilscharen, n eine natürliche Zahl mit $(n, Q) = 1$, T_n den in $(T_n II)$, § 5 erklärten Operator, $q(\tau)$ einen Basisvektor über $S(t, \varepsilon, Q)$, $A(n)$ die $q(\tau)$ gemäß (4) zugeordnete Matrix. Dann existiert ein solcher Basisvektor $q(\tau)$ über $S(t, \varepsilon, Q)$, dessen Matrizen $A(n)$ für alle n mit $(n, Q) = 1$ reine Diagonalgestalt haben.

³⁾ H. Petersson, Die linearen Relationen zwischen den ganzen Poincaréschen Reihen von reeller Dimension zur Modulgruppe, Abhandl. aus d. Math. Seminar d. Hansischen Univ. 12 (1938), S. 415—472, siehe insbesondere S. 447.

Da ein Operator T_m^t mit $(m, \frac{Q}{t}) > 1$ die ganze Schar $S(t, \varepsilon, Q)$ in Null überführt, fehlt zur Aufstellung einer Normalform für die Matrizen $A(n)$ nur noch die Kenntnis der Wirkung der T_q^t , wo q einen Primteiler von t bezeichnet, der nicht in $\frac{Q}{t}$ aufgeht. Insbesondere ist also die volle Reduzibilität für alle Scharen $S(t, \varepsilon, Q)$ mit $t = 1$ und beliebigem Charakter ε bewiesen. Es sei hervorgehoben, daß der analytische Apparat, der durch Anwendung der Transformationstheorie auf die Reihen $g^*(\tau, \nu)$ aus³⁾ und ihre Analoga zur Stufe Q entsteht, einen bemerkenswerten Einblick in den expliziten Mechanismus der Transformationstheorie eröffnet.

Im folgenden werden alle Modulformen stets inhomogen geschrieben; r ist eine feste natürliche Zahl. Soweit Modulformen der Stufe 1 untersucht werden, kommen nur gerade $r \geq 12$ in Betracht. Ist $f(x, y, \dots)$ irgendeine komplexwertige Funktion von irgendwelchen Argumenten, so verstehen wir unter $\bar{f}(x, y, \dots)$ die zu $f(x, y, \dots)$ konjugiert komplexe Zahl. Die eingangs erklärte vektorielle Schreibweise denken wir uns sinngemäß auf die später auftretenden Scharen von Spitzenformen zu einer Untergruppe von endlichem Index der Modulgruppe übertragen.

Durchführung der Beweise.

1. *Metrisierung.* Es sei $\bar{\Gamma}$ eine Untergruppe von endlichem Index der Modulgruppe. Der Begriff einer Modulform (der Art) $\{\bar{\Gamma}, -r\}$ werde analog zum Begriff einer Modulform der Art $(-k, Q)$ nach $(T_n I)$, S. 3, 4 bestimmt; es ist hier also ausschließlich von ganzen Modulformen die Rede. Es seien $f(\tau)$ und $\varphi(\tau)$ Modulformen $\{\bar{\Gamma}, -r\}$, und es sei f oder φ Spitzenform.

Ist \mathfrak{B} ein Bereich in der oberen Halbebene der komplexen Variablen $\tau = x + iy$ (x reell, $y > 0$), der von der reellen Achse einen positiven Minimalabstand besitzt, von endlich vielen nicht-euklidischen Geradenstücken begrenzt wird und in einem Vertikalstreifen Platz hat, so existiert das Doppelintegral

$$(f(\tau), \varphi(\tau))_{\mathfrak{B}} = (f, \varphi)_{\mathfrak{B}} = \iint_{\mathfrak{B}} f(\tau) \overline{\varphi(\tau)} y^{r-2} dx dy.$$

Aus der Invarianzeigenschaft der Formen f und φ folgt für jedes S aus $\bar{\Gamma}$ nach kurzer Rechnung

$$(5) \quad (f, \varphi)_{S\mathfrak{B}} = (f, \varphi)_{\mathfrak{B}}.$$

Bezeichnet \mathfrak{K} irgendeinen aus höchstens endlich vielen getrennten Stücken bestehenden und von insgesamt endlich vielen nicht-euklidischen Geraden-

stücken begrenzten Fundamentalbereich von $\bar{\Gamma}$, so existiert das Doppelintegral $(f, \varphi)_{\bar{\Gamma}}$ und ist nach (5) von der speziellen Gestalt von \mathfrak{R} unabhängig. Wir schreiben deshalb

$$(6) \quad (f, \varphi) = (f, \varphi)_{\bar{\Gamma}} = (f, \varphi)_{\mathfrak{R}} = \iint_{\mathfrak{R}} f(\tau) \overline{\varphi(\tau)} y^{r-2} dx dy$$

und nennen diesen Ausdruck das Skalarprodukt von f und φ (in bezug auf die Gruppe $\bar{\Gamma}$). f und φ heißen zueinander orthogonal, wenn (f, φ) verschwindet.

Über diesen Begriff werden die folgenden Tatsachen benutzt:

Erstens:

$$(7) \quad (\varphi, f) = \overline{(f, \varphi)}.$$

Zweitens: Sind die $f_1, f_2, \dots, f_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ Modulformen $\{\bar{\Gamma}, -r\}$, die $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sämtlich Spitzenformen und die $x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ beliebige komplexe Zahlen, so gilt

$$(8) \quad \left(\sum_{m=1}^n x_m f_m, \sum_{m=1}^n \xi_m \varphi_m \right) = \sum_{i,k=1}^n x_i \bar{\xi}_k (f_i, \varphi_k).$$

Drittens: Es sei $\bar{\Gamma}_0$ eine Untergruppe von endlichem Index in $\bar{\Gamma}$, und es seien Γ_0, Γ die zugehörigen Substitutionsgruppen. Ist g der Index von Γ_0 in Γ , so gilt mit der angegebenen Bedeutung von f und φ :

$$(9) \quad (f, \varphi)_{\bar{\Gamma}} = \frac{1}{g} (f, \varphi)_{\bar{\Gamma}_0}.$$

Viertens: Es seien $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ zwei Untergruppen von endlichem Index in $\bar{\Gamma}$, und es sei $\bar{\Gamma}_0$ sowohl Untergruppe von endlichem Index in $\bar{\Gamma}_1$, als auch Untergruppe in $\bar{\Gamma}_2$. Es seien ferner f und φ Modulformen sowohl von der Art $\{\bar{\Gamma}_1, -r\}$, als auch von der Art $\{\bar{\Gamma}_2, -r\}$, und es sei f oder φ Spitzenform. Wenn die Fundamentalbereiche von $\bar{\Gamma}_1$ und $\bar{\Gamma}_2$ den gleichen nicht-euklidischen Flächeninhalt haben, dann folgt aus (9):

$$(10) \quad (f, \varphi)_{\bar{\Gamma}_1} = (f, \varphi)_{\bar{\Gamma}_2}.$$

(10) gilt also insbesondere dann, wenn $\bar{\Gamma}_2 = S \bar{\Gamma}_1 S^{-1}$ mit einem reellen $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, für welches $ad - bc \neq 0$.

Fünftens: Es bezeichne wie zu Anfang $\bar{\Gamma}$ eine Untergruppe von endlichem Index in $\bar{\Gamma}(1)$. Für jede Spitzenform φ von der Art $\{\bar{\Gamma}, -r\}$ ist $(\varphi, \varphi) \geq 0$. Das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn φ identisch verschwindet. Daraus ergibt sich für die Schar \mathfrak{S}_0 der Spitzenformen $\{\bar{\Gamma}, -r\}$ nach dem üblichen Verfahren die Existenz einer orthogonal-normierten Basis, d. h. eines Basisvektors

$$q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)\}$$

über \mathfrak{S}_0 mit der Eigenschaft

$$(11) \quad (\varphi_i, \varphi_k)_F = \delta_{i,k} \quad (= 0 \text{ oder } 1, \text{ je nachdem } i \neq k \text{ oder } i = k) \\ (i, k = 1, 2, \dots, \mu; \mu \text{ ist der Rang von } \mathfrak{S}_0).$$

2. *Arithmetische Hilfssätze.* Es sei n eine natürliche Zahl, \mathfrak{D}_n die Menge der Matrizen $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit ganzen a, b, c, d und $ad - bc = n$. Zwei Matrizen S, S' aus \mathfrak{D}_n heißen links- bzw. rechtsäquivalent (nach $\bar{F}(1)$), wenn sie sich um einen linken bzw. rechten Faktor aus \mathfrak{D}_1 unterscheiden. Die durch diese Einteilungen entstehenden Klassen nennen wir Links- bzw. Rechtsklassen und bezeichnen entsprechend die vollen (einfach besetzten) Repräsentantensysteme dieser Klassen als Vertretersysteme der Links- bzw. Rechtsklassen (von \mathfrak{D}_n nach $\bar{F}(1)$). Durchlaufen die Matrizen S ein Vertretersystem der Linksklassen, so durchlaufen die Matrizen nS^{-1} ein Vertretersystem der Rechtsklassen und umgekehrt. Wir behaupten:

Hilfssatz 1. Für jede Primzahlordnung $n = p$ existiert ein gemeinsames Vertretersystem der Links- und der Rechtsklassen von \mathfrak{D}_p nach $\bar{F}(1)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß jede Rechtsklasse Matrizen aus jeder Linksklasse enthält. Die Rechtsklassen werden von den $R = \begin{pmatrix} s & r \\ 0 & t \end{pmatrix}$ mit $st = p, t > 0, r \bmod s$, vertreten, die Linksklassen dagegen von den $W = \begin{pmatrix} \mu & v \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda\mu = p, \lambda > 0, v \bmod \lambda$. Wenn

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = L'W = RL \text{ mit } L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ und } L' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \text{ aus } \bar{F}(1),$$

so ist offenbar $\mu = (a, c) = (s\alpha + r\gamma, t\gamma)$, also entweder $= (\alpha, p\gamma)$ oder $= (p\alpha, \gamma)$. In jedem Falle kann durch Wahl von L ein vorgegebenes $\mu = 1$ oder p erreicht werden. Es sei $\mu = 1$. Man ersieht die Behauptung aus den Identitäten

$$L'W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & p \end{pmatrix} = RL = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 1 & v+1 \end{pmatrix}, \\ L'W = \begin{pmatrix} r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & p \end{pmatrix} = RL = \begin{pmatrix} p & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & v \end{pmatrix}.$$

Bei den späteren Integralumformungen werden noch die folgenden mengentheoretischen Relationen benutzt: Für jedes natürliche n und jedes S in \mathfrak{D}_n gilt, wie man durch einfache Kongruenzbetrachtungen erschließt,

$$(12) \quad S^{-1} \bar{F}(n) S \subset \bar{F}(1), \quad S^{-1} \bar{F}(1) S \supset \bar{F}(n), \quad \bar{F}(n^2) \subset S^{-1} \bar{F}(n) S.$$

3. *Beweis der Grundformel.* Es sei n eine natürliche Zahl und \mathfrak{B} ein Vertretersystem der Linksklassen von \mathfrak{D}_n nach $\bar{F}(1)$. Wir ordnen jedem S

aus \mathfrak{D}_n die Matrix $S^* = \frac{1}{\sqrt{n}} S$ mit $\sqrt{n} > 0$ zu. Durch diese Abänderung entstehe \mathfrak{B}^* aus \mathfrak{B} . Es seien $f(\tau)$, $\varphi(\tau)$ zwei Spitzenformen $\{\bar{\Gamma}(1), -r\}$. In den Bezeichnungen von $(T_n \text{ II})$, § 5, S. 317 ist

$$f(\tau) | T_n = n^{r-1} \sum_{S \in \mathfrak{B}} f(\tau) | S = n^{\frac{r}{2}-1} \sum_{S^* \in \mathfrak{B}^*} f(\tau) | S^*.$$

Man hat nun mit $g(n) = [\Gamma(1) : \Gamma(n)]$ nach (9) und (6):

$$\begin{aligned} (f(\tau) | T_n, \varphi(\tau))_{\Gamma(1)} &= \frac{1}{g(n)} (f(\tau) | T_n, \varphi(\tau)) \bar{\Gamma}(n) \\ &= n^{\frac{r}{2}-1} \sum_{S^* \in \mathfrak{B}^*} \frac{1}{g(n)} \iint_{\mathfrak{R}_n} f(\tau) | S^* \cdot \overline{\varphi(\tau)} y^{r-2} dx dy, \end{aligned}$$

wenn \mathfrak{R}_n einen Fundamentalbereich von $\bar{\Gamma}(n)$ angibt. Hier ersieht man aus (12): Da die Formen $f(\tau) | S^*$ und $\varphi(\tau)$ zu den Gruppen $S^{-1} \bar{\Gamma}(1) S$ bzw. $\bar{\Gamma}(1)$ gehören, so gehören sie einerseits beide zu $\bar{\Gamma}(n)$, andererseits beide zu $S^{-1} \bar{\Gamma}(n) S$. Da ferner $\bar{\Gamma}(n^2)$ Untergruppe von endlichem Index in $\bar{\Gamma}(n)$ und in $S^{-1} \bar{\Gamma}(n) S$ ist, liegt der bei (10) konstatierte Sachverhalt vor. Da schließlich $S^{-1} \mathfrak{R}_n$ ein Fundamentalbereich von $S^{-1} \bar{\Gamma}(n) S$ ist, gilt mithin

$$\iint_{\mathfrak{R}_n} f(\tau) | S^* \cdot \overline{\varphi(\tau)} y^{r-2} dx dy = \iint_{S^{-1} \mathfrak{R}_n} f(\tau) | S^* \cdot \overline{\varphi(\tau)} y^{r-2} dx dy.$$

Hier gestattet der Integrand, wenn

$$S^* = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}, S^* \tau = \tau' = x' + iy' \quad (x' \text{ reell, } y' > 0)$$

gesetzt wird, die Umformung

$$\begin{aligned} f(\tau') (-c^* \tau' + a^*)^r \overline{\varphi(S^{*-1} \tau')} \frac{y'^{r-2}}{|-c^* \tau' + a^*|^{2r-4}} \frac{dx' dy'}{|-c^* \tau' + a^*|^4} \\ = f(\tau') \cdot \overline{\varphi(\tau')} | S^{*-1} y'^{r-2} dx' dy', \end{aligned}$$

so daß

$$(f(\tau) | T_n, \varphi(\tau))_{\Gamma(1)} = \frac{1}{g(n)} \iint_{\mathfrak{R}_n} f(\tau) \left\{ n^{\frac{r}{2}-1} \sum_{S^* \in \mathfrak{B}^*} \overline{\varphi(\tau) | S^{*-1}} \right\} y^{r-2} dx dy.$$

Jetzt sei n eine Primzahl p und \mathfrak{B} ein gemeinsames Vertretersystem der Links- und Rechtsklassen von \mathfrak{D}_p nach $\bar{\Gamma}(1)$. Dann ist die geschweifte Klammer unter dem letzten Integral gleich $\varphi(\tau) | T_p$, und es gilt also bei Fortlassung des Index $\bar{\Gamma}(1)$ an den Skalarprodukten:

$$(f(\tau) | T_p, \varphi(\tau)) = (f(\tau), \varphi(\tau) | T_p).$$

Hieraus folgt sofort für jedes natürliche k :

$$(f(\tau) | T_p^k, \varphi(\tau)) = (f(\tau), \varphi(\tau) | T_p^k).$$

Da T_{p^k} nach $(T_n I)$, Satz 10 ein Polynom mit reellen Koeffizienten in T_n ist, ergibt sich weiter

$$(f(\tau) | T_n, \varphi(\tau)) = (f(\tau), \varphi(\tau) | T_n)$$

für jede Primzahlpotenz n und dann nach dem genannten Satz für alle natürlichen n . Dies ist die Grundformel:

Satz 3. Für zwei beliebige ganze Spitzenformen $f(\tau)$, $\varphi(\tau)$ von der Art $\{\bar{T}(1), -r\}$ und für beliebiges natürliches n gilt

$$(f(\tau) | T_n, \varphi(\tau)) = (f(\tau), \varphi(\tau) | T_n).$$

Die Skalarprodukte sind in bezug auf die volle Modulgruppe zu bilden.

4. Beweis des Hauptsatzes. Es sei \mathfrak{S}_0 die Schar der Spitzenformen $\{\bar{T}(1), -r\}$, μ ihr Rang,

$$q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_\mu(\tau)\}$$

eine normierte Orthogonalbasis von \mathfrak{S}_0 . Für natürliches n sei $A(n) = (\lambda_{i,k}(n))$ ($i, k = 1, 2, \dots, \mu$) die durch (4) erklärte Matrix. Dann ist

$$\varphi_i(\tau) | T_n = \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_{i,k}(n) \varphi_k(\tau) \quad (1 \leq i \leq \mu),$$

also nach (8), (11), (7) und Satz 3

$$\begin{aligned} \lambda_{i,k}(n) &= (\varphi_i(\tau) | T_n, \varphi_k(\tau)), \quad \overline{\lambda_{i,k}(n)} = (\varphi_k(\tau), \varphi_i(\tau) | T_n) = (\varphi_k(\tau) | T_n, \varphi_i(\tau)) \\ (13) \quad \lambda_{k,i}(n) &= \overline{\lambda_{i,k}(n)} \quad (i, k = 1, 2, \dots, \mu). \end{aligned}$$

Daher ist $A(n)$ eine Hermitesche Matrix.

Der Beweis dafür, daß endlich viele paarweise vertauschbare Hermite-sche Matrizen durch eine unitäre Matrix simultan auf Diagonalgestalt transformiert werden können, soll nachgetragen werden. Unter der Voraussetzung dieses Satzes und weil nur endlich viele linear-unabhängige $A(n)$ existieren, gibt es eine unitäre Matrix Y von folgender Beschaffenheit: Die den $A(n)$ in der Basis

$$v(\tau) = \{v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_\mu(\tau)\} = Y q(\tau)$$

entsprechenden Matrizen

$$\Omega(n) = Y A(n) Y^{-1} = (\omega_{i,k}(n)) \quad (i, k = 1, 2, \dots, \mu)$$

haben für alle natürlichen n reine Diagonalgestalt. Im übrigen überzeugt man sich leicht davon, daß $v(\tau)$ eine normierte Orthogonalbasis ist. Ferner läßt sich zeigen, daß die Matrizen $\Omega(n)$ für alle natürlichen n Diagonalgestalt haben, wenn dies nur für die Primzahlen $n = p$ mit $2 \leq p \leq \mu$ zutrifft.

Den oben angekündigten nachzutragenden Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Matrizen. Es sei der Satz für s Matrizen bewiesen, und es seien $s + 1$ paarweise vertauschbare Hermitesche Matrizen

$$(14) \quad A_1, A_2, \dots, A_s, B$$

von μ Zeilen und Spalten vorgelegt. Da die unitären Matrizen eine Gruppe bilden, da weder die Vertauschbarkeit der Matrizen (14), noch ihre Eigenschaft, Hermitesche Matrizen zu sein, durch die simultane Transformation mit einer unitären Matrix zerstört wird, kann nach Induktionsannahme vorausgesetzt werden, daß die Matrizen A_1, A_2, \dots, A_s bereits Diagonalgestalt haben und daß die folgende Anordnungsbeziehung erfüllt ist: Wir schreiben

$$A_m = (\delta_{i,k} a_i(m)), \quad a_i = \{a_i(1), a_i(2), \dots, a_i(s)\} \quad (1 \leq m \leq s).$$

Dann zerfallen die Vektoren a_i ($1 \leq i \leq \mu$) auf solche Weise in Systeme von untereinander gleichen Vektoren, daß alle Angehörigen eines vollständigen Systems konsekutive Indizes haben. Da B mit allen A_m ($1 \leq m \leq s$) vertauschbar ist, hat B „Kästchenform“. Die quadratischen Kästchen sind längs der Hauptdiagonale von B aufgereiht, ihre Zeilen- und Spaltenindizes stimmen mit den Indizes eines der genannten vollständigen Vektorensysteme überein. Außerhalb der Kästchen stehen lauter Nullen. Jedes Kästchen ist eine Hermitesche Matrix. Eine nach dem gleichen Besetzungsschema aufgeteilte Kästchenmatrix, deren Kästchen geeignete unitäre Matrizen sind, ist erstens selbst unitär, transformiert zweitens B auf Diagonalgestalt und ändert drittens die A_m ($1 \leq m \leq s$) nicht, wenn man diese mit ihrer Hilfe transformiert.

Der Vollständigkeit halber werde der in diesem Abschnitt bewiesene Satz nochmals formuliert:

Satz 4. Die Schar \mathfrak{S}_0 der Spitzenformen $\{\bar{F}(1), -r\}$ besitzt eine normierte Orthogonalbasis

$$v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_\mu(\tau)$$

von der Art, daß die Gleichungen

$$v_i(\tau) | T_n = \rho_i(n) v_i(\tau) \quad (1 \leq i \leq \mu)$$

für alle natürlichen n mit geeigneten reellen algebraischen $\rho_i(n)$ gelten. Die Formen $v_i(\tau)$ sind durch die genannten Eigenschaften bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren des Betrages 1 eindeutig bestimmt.

Die Eindeutigkeit folgt aus den Eigenschaften der charakteristischen Wurzeln der zu der betreffenden Basis gehörigen Matrix $B(\tau)$.

Die Behauptung über die algebraische Natur der $\rho_i(n)$ läßt sich am einfachsten auf folgende Weise erhärten:

Die Fourierentwicklung des Formenvektors $q(\tau)$ über \mathfrak{S}_0 :

$$q(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{2\pi i m \tau}$$

mit den Koeffizientenvektoren b_m ist durch die „Anfangsmatrix“ A , d. h. die Matrix mit den Spaltenvektoren b_1, b_2, \dots, b_μ eindeutig bestimmt. Der Formenvektor $p(\tau) = \Gamma q(\tau)$ hat offenbar die Anfangsmatrix ΓA . Bildet man nach $(T_n I)$, S. 6 den Basisvektor $q(\tau)$ mit den Komponenten

$$(15) \quad \pi^{12h-r} G_{r-12h} \Delta^h \quad (0 \leq h \leq \frac{r}{12}, r-12h \neq 2),$$

so sind seine Koeffizientenvektoren b_m sämtlich rational. Daher ist die Anfangsmatrix A_n von

$$q(\tau) | T_n = A(n) q(\tau)$$

rational, also auch $A(n) = A_n A^{-1}$.

Bildet man das Skalarprodukt von zwei Spitzenformen f und φ zur vollen Modulgruppe nach (6) durch Integration über das Elementardreieck der Modulfigur, so ergibt die Symmetrie dieses Bereiches zur imaginären Achse die Realität des Skalarprodukts, wenn die Fourierkoeffizienten von f und φ sämtlich reell sind. Geht man also von der Basis (15) aus, so verläuft der oben dargestellte Prozeß ganz im Reellen, und der entstehende Basisvektor $v(\tau)$ aus Satz 4 hat reelle Koeffizientenvektoren. Die Komponenten $v_i(\tau)$ eines solchen Basisvektors sind durch die in Satz 4 genannten Eigenschaften einzeln bis auf das Vorzeichen und zusammen bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

(Eingegangen am 31. 10. 1938.)

Die Lösung der Fuchsschen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch hypergeometrische Polynome.

Von

N. Svartholm in Stockholm.

§ 1.

Einleitung.

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dz^2} + p(z) \frac{du}{dz} + q(z) u = 0,$$

die zum Fuchsschen Typus gehört, wenn ihre Lösungen in der ganzen komplexen Ebene, den unendlich fernen Punkt mit eingeschlossen, keine Unbestimmtheitsstelle (wesentliche Singularität) besitzen und wenn ihre Koeffizienten $p(z)$ und $q(z)$ eindeutig sind¹⁾. Es sei daran erinnert, daß $p(z)$ und $q(z)$ dann rational, und zwar von der Form

$$(2a) \quad p(z) = \frac{g(z)}{\psi(z)}$$

$$(2b) \quad q(z) = \frac{h(z)}{[\psi(z)]^2}$$

sind, wo

$$\psi(z) = \prod_{r=1}^n (z - a_r), \quad a_i \neq a_k \quad \text{für} \quad i \neq k$$

und $g(z)$ sowie $h(z)$ ganze rationale Funktionen sind, die erste höchstens vom $(n-1)$ -ten, die zweite höchstens vom $(2n-2)$ -ten Grade. Die Stellen $z = a_1, a_2, \dots, a_n$, nebst $a_{n+1} = \infty$, nennt man bekanntlich die Stellen der Bestimmtheit (unwesentliche Singularitäten) der Differentialgleichung (1). Zur Stelle $z = a_r$ ($r = 1, 2, \dots, n$) gehören die Exponenten α_r, β_r , die durch die sogenannte Fuchssche Relation

$$(3) \quad \alpha + \beta + \sum_{r=1}^n (\alpha_r + \beta_r) = n - 1$$

¹⁾ Vgl. z. B. L. Schlesinger, Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage, Berlin und Leipzig 1922.

verknüpft sind, wobei α, β die Exponenten der Stelle $z = \infty$ bezeichnen. Ferner können sämtliche n Koeffizienten des Polynoms $g(z)$ und n von den $2n - 1$ Koeffizienten des Polynoms $h(z)$ durch die Größen $\alpha_r, \beta_r, \alpha, \beta$ ausgedrückt werden:

$$(4a) \quad g(z) = \psi(z) \sum_{r=1}^n \frac{1 - \alpha_r - \beta_r}{z - a_r},$$

$$(4b) \quad h(z) = \psi(z) \left(\alpha \beta z^{n-2} + k_{n-3} z^{n-3} + \dots + k_0 + \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r \beta_r \psi'(a_r)}{z - a_r} \right).$$

Durch eine Transformation der abhängigen Variablen

$$u = v \prod_{r=1}^n (z - a_r)^{\varrho_r}$$

werden die Exponenten α_r und β_r je um ϱ_r vermindert. Wird $\varrho_r = \beta_r$ gewählt, so verschwindet in der neuen Gleichung der letzte Summenausdruck in $h(z)$. Das kommt aber damit auf eins heraus, daß wir schon in der ursprünglichen Gleichung alle β_r (β aber nicht) gleich Null setzen. Außerdem wollen wir eine lineare Transformation der unabhängigen Variablen vornehmen derart, daß etwa

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1$$

wird.

Unsere Differentialgleichung lautet nun

$$(5) \quad \frac{d^2 u}{dz^2} + \sum_{r=1}^n \frac{1 - \alpha_r}{z - a_r} \cdot \frac{du}{dz} + \frac{P_{n-2}(z)}{\psi(z)} u = 0,$$

worin der höchste Koeffizient im Polynome $P_{n-2}(z)$ gleich $\alpha\beta$ ist. In jedem Punkte der z -Ebene kann diese Gleichung durch Potenzreihen gelöst werden, deren Konvergenzkreise sich bis an die nächste singuläre Stelle erstrecken. Unter Umständen, d. h. wenn eine gewisse Relation zwischen den Koeffizienten des Polynoms $P_{n-2}(z)$, den sogenannten akzessorischen Parametern, erfüllt ist, können Lösungen konstruiert werden, die sich gleichzeitig in den Umgebungen von zwei der singulären Stellen regulär verhalten. Solche Lösungen sollen hier durch Entwicklung nach hypergeometrischen Polynomen ermittelt werden.

Satz. Von der Differentialgleichung (5) werde vorausgesetzt, daß keine der singulären Stellen a_3, a_4, \dots, a_n auf der reellen Achse zwischen 0 und 1 liegt. Bezeichnet dann y , das hypergeometrische Polynom

$$(6) \quad y_r = F(-r, r+1-\alpha_1-\alpha_2, 1-\alpha_1; z),$$

so erhält man für die Koeffizienten c_r der formellen Entwicklung

$$(7) \quad y = \sum_{r=0}^{\infty} c_r y_r,$$

einer Lösung y von (5) eine Rekursionsformel (nämlich die Differenzengleichung (10)).

Es wird gezeigt:

1. Falls

$$(8) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} c_r = 0$$

ist, so stellt (7) tatsächlich eine Lösung von (5) dar, die in einer Umgebung der singulären Stellen $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ regulär ist. Die Bedingung (8) ist gleichbedeutend mit dem Erfülltsein einer bestimmten Relation zwischen den akzessorischen Parametern der Differentialgleichung.

2. Der Regularitätsbereich der Lösung y ist das Innere der größten Ellipse mit den Brennpunkten in 0 und 1, welche keine der übrigen singulären Stellen a_3, a_4, \dots, a_n im Innern enthält.

3. Falls auf dem Rande E der Konvergenzellipse nur eine singuläre Stelle, etwa $z = a_3$, liegt, so wird das Integral auf E

für $\operatorname{Re}(\alpha_3) > 0$ absolut konvergent,

dagegen für $\operatorname{Re}(\alpha_3) < 0$ absolut divergent.

§ 2.

Entwicklung nach hypergeometrischen Polynomen.

Jetzt gehen wir von Polynomen (6) aus und stellen zuerst einige Eigenschaften derselben zusammen. Sie genügen der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(I) \quad \left[z(z-1) \frac{d^2}{dz^2} + z(z-1) \left(\frac{1-\alpha_1}{z} + \frac{1-\alpha_2}{z-1} \right) \frac{d}{dz} - v(v+1-\alpha_1-\alpha_2) \right] y_r = 0,$$

der Differentiationsformel

$$(II) \quad -z(z-1) \frac{d}{dz} y_r = v \frac{v-\alpha_1-\alpha_2+1}{2v-\alpha_1-\alpha_2+1} \left[\frac{v-\alpha_1+1}{2v-\alpha_1-\alpha_2+2} y_{r+1} + \frac{(\alpha_2-\alpha_1)(2v-\alpha_1-\alpha_2+1)}{(2v-\alpha_1-\alpha_2)(2v-\alpha_1-\alpha_2+2)} y_r - \frac{v-\alpha_2}{2v-\alpha_1-\alpha_2} y_{r-1} \right]$$

und der Rekursionsformel

$$(III) \quad -zy_r = \frac{(v-\alpha_1+1)(v-\alpha_1-\alpha_2+1)}{(2v-\alpha_1-\alpha_2+1)(2v-\alpha_1-\alpha_2+2)} y_{r+1} - \frac{2v(v-\alpha_1-\alpha_2+1) + (\alpha_1-1)(\alpha_1+\alpha_2)}{(2v-\alpha_1-\alpha_2)(2v-\alpha_1-\alpha_2+2)} y_r + \frac{v(v-\alpha_2)}{(2v-\alpha_1-\alpha_2)(2v-\alpha_1-\alpha_2+1)} y_{r-1}.$$

Dann betrachten wir den Differentialoperator $D = D_1 + D_2 + D_3$ mit

$$(9a) \quad D_1 = \varphi(z) \left[z(z-1) \frac{d^2}{dz^2} + z(z-1) \left(\frac{1-\alpha_1}{z} + \frac{1-\alpha_2}{z-1} \right) \frac{d}{dz} \right],$$

$$(9b) \quad D_2 = \left[\varphi(z) \sum_{r=3}^n \frac{1-\alpha_r}{z-a_r} \right] z(z-1) \frac{d}{dz},$$

$$(9c) \quad D_3 = P_{n-2}(z) = \alpha\beta z^{n-2} + k_{n-3} z^{n-3} + \dots + k_0,$$

worin

$$\varphi(z) = \prod_{r=3}^n (z-a_r),$$

so daß

$$\psi(z) = z(z-1)\varphi(z)$$

ist. Auf die Funktionen y_r angewandt, wird der Operator

$$z(z-1) \frac{d^2}{dz^2} + z(z-1) \left(\frac{1-\alpha_1}{z} + \frac{1-\alpha_2}{z-1} \right) \frac{d}{dz}$$

durch eine Diagonalmatrix mit den Elementen $d_r = \nu(\nu+1-\alpha_1-\alpha_2)$ dargestellt. Die Operatoren $z(z-1) \frac{d}{dz}$ und z haben Matrizes mit drei schrägen Reihen. Der ganze Operator D hat sodann eine Matrixdarstellung in den Funktionen y_r , die insgesamt $1+2(n-2) = 2n-3$ schräge Reihen besitzt.

Schreiben wir eine Lösung der Differentialgleichung (5) in der Form (7), so müssen die Koeffizienten c_r einer Differenzengleichung der Ordnung $2n-4$ genügen:

$$(10) \quad \sum_{\mu=-(n-2)}^{n-2} K_\mu(\nu) \cdot c_{\nu+\mu} = 0.$$

Für die folgenden Entwicklungen ist es nicht nötig, in irgendeiner Weise die Koeffizienten $K_\mu(\nu)$ explizit auszudrücken. Nur sollen hier die Lösungen der Gleichung (10) für große ν betrachtet werden, d. h. wir wollen die Konvergenz der Entwicklung (7) untersuchen.

§ 3.

Konvergenzbeweis.

Zuerst bemerken wir, daß die Koeffizienten $K_\mu(\nu)$ für $\nu \rightarrow \infty$ wie ν^2 unendlich werden. Wir dividieren jetzt durch $\nu^2 c_\nu$ und setzen

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = t, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{K_\mu(\nu)}{\nu^2} = A_\mu.$$

und erhalten im Grenzfall $\nu \rightarrow \infty$

$$(11) \quad \sum_{\mu=-(n-2)}^{n-2} A_{\mu} t^{\mu} = 0,$$

d. h. eine algebraische Gleichung vom Grade $2n - 4$, die sogenannte charakteristische Gleichung der Differenzengleichung (10). Nach einem Satze von Poincaré²⁾ geht für die allgemeine Lösung der Gleichung (10) das Verhältnis $\frac{c_{\nu+1}}{c_{\nu}}$ für $\nu \rightarrow \infty$ in diejenige Wurzel der Gleichung (11) über, die den größten

absoluten Betrag hat. Die Berechnung der Wurzeln t wird durch den Umstand ermöglicht, daß nur der erste Operator zu den Koeffizienten A_{μ} endliche Beiträge liefert. Für $\nu \rightarrow \infty$ verhalten sich nämlich die Matrixelemente des Operators D_2 wie ν . Der Operator z hat für $\nu \rightarrow \infty$ nur endliche Matrixelemente, die Diagonalelemente haben den Grenzwert $\frac{1}{2}$, während die benachbarten Elemente je nach $-\frac{1}{2}$ streben. In der Gleichung (11) mögen wir also

nur das Ergebnis der Operation $\varphi(z) = \prod_{r=3}^n (z - a_r)$ berücksichtigen:

$$(12) \quad \prod_{r=3}^n \left(-\frac{1}{4}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{4t} - a_r \right) = 0.$$

Die $2(n-2)$ Wurzeln dieser Gleichung werden mit $t_3, t_4, \dots, t_n, \tau_3 = 1/t_3, \tau_4 = 1/t_4, \dots, \tau_n = 1/t_n$ bezeichnet, wobei t_r und τ_r die beiden Wurzeln der Gleichung

$$(12a) \quad t^2 - 2(1 - 2a_r)t + 1 = 0$$

sind. Ferner wird angenommen, daß $|t_r| < 1$ ist, wodurch $|\tau_r| > 1$ wird. Den Fall $|t_r| = |\tau_r| = 1$ wollen wir außer Betracht lassen, was mit der Voraussetzung zusammenfällt, daß keine der singulären Stellen auf der reellen Achse zwischen 0 und 1 liegen soll. Ganz natürlich müssen die Lösungen τ_r außer Betracht gelassen werden, d. h. es wird nur eine partikuläre Lösung der Gleichung (10) betrachtet. Das ist aber eine Festsetzung, die die Gleichung

$$(8) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} c_{\nu} = 0$$

mit sich führt, was eben die vorausgesetzte Zusatzbedingung zwischen den akzessorischen Parametern bedeutet. Auch wollen wir betreffs der übrigen Wurzeln voraussetzen, daß gerade t_3 den größten absoluten Betrag besitzt, so daß

$$(13) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{c_{\nu+1}}{c_{\nu}} = t_3$$

wird.

²⁾ Siehe Guldberg und Wallenberg, Theorie der linearen Differenzengleichungen, Leipzig und Berlin 1911, S. 202.

Andererseits folgt aus der Rekursionsformel (III) für y_r , wenn man

$$(14) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{y_{r+1}}{y_r} = s$$

setzt,

$$(15) \quad -\frac{1}{4} \left(s + \frac{1}{s} \right) = z - \frac{1}{2}.$$

Diese Formel (15) drückt die bekannte Tatsache aus, daß eine Entwicklung nach hypergeometrischen Polynomen

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r y_r$$

im Innern einer Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{1}{4} \left(R + \frac{1}{R} \right), \quad \frac{1}{4} \left(R - \frac{1}{R} \right)$$

und mit den Brennpunkten in 0 und 1 absolut konvergent ist, wenn

$$R = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{b_r}{b_{r+1}},$$

d. h. der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r,$$

größer als Eins ist. Da in unserem Falle die Ausdehnung der Konvergenzellipse durch die Gleichung

$$(16) \quad |st| = 1$$

bedingt wird, so ergibt sich aus den Gleichungen

$$(17a) \quad -\frac{1}{4} \left(t_3 + \frac{1}{t_3} \right) = a_3 - \frac{1}{2},$$

$$(17b) \quad -\frac{1}{4} \left(s_3 + \frac{1}{s_3} \right) = z - \frac{1}{2},$$

daß die Ellipse durch den Punkt $z = a_3$ geht. Damit ist der Beweis der Nr. 2 unseres Satzes erbracht.

§ 4.

Das Verhalten der Lösung auf dem Rande der Konvergenzellipse.

Ob Konvergenz auch im Punkte $z = a_3$ oder allgemeiner auf dem Rande E der Konvergenzellipse stattfindet, kann hieraus nicht gefolgert werden und muß deshalb den Gegenstand einer besonderen Untersuchung bilden. Zu diesem Zwecke versuchen wir das Verhältnis $\frac{c_{r+1} y_{r+1}}{c_r y_r}$ asymptotisch darzu-

stellen in der Form

$$\frac{c_{r+1} y_{r+1}}{c_r y_r} = 1 + \frac{x}{v} + O\left(\frac{1}{v^2}\right),$$

oder einfacher geschrieben

$$\frac{c_{r+1} y_{r+1}}{c_r y_r} \sim 1 + \frac{x}{v}.$$

Das asymptotische Verhalten von $\frac{c_{r+1}}{c_r}$ läßt sich aus der Rekursionsformel (10) berechnen, wobei es diesmal notwendig ist, die vom Operator D_2 herrührenden Matrixelemente auch in Betracht zu ziehen. Wenn man $\varphi(z) = (z - a_3) \chi(z)$ setzt, wo $\chi(z) = \prod_{r=4}^n (z - a_r)$ ist, so kann der Operator $D_1 + D_2$ wie folgt geschrieben werden

$$(18) \quad D_1 + D_2 = \chi(z) \left[(z - a_3) v(v+1 - \alpha_1 - \alpha_2) + (1 - \alpha_3) z(z-1) \frac{d}{dz} \right] \\ + (z - a_3) \chi(z) \sum_{r=4}^n \frac{1 - \alpha_r}{z - a_r} z(z-1) \frac{d}{dz}.$$

Da wir eben den Operator z durch a_3 approximiert haben, ist nunmehr der Operator $z - a_3$ von der Größenordnung $\frac{1}{v}$ und der Operator $D_1 + D_2$ von der Ordnung Eins in v , wobei das letzte Glied von (18) von der nullten Ordnung ist und daher außer Betracht gelassen werden kann. Es genügt dann die Operation des Klammerausdrucks in (18) zu berücksichtigen, da eben diese in der fraglichen Approximation das Ergebnis Null geben soll. Wir erhalten nun nach den Formeln (II) und (III)

$$(19) \quad \left[(z - a_3) v(v+1 - \alpha_1 - \alpha_2) + (1 - \alpha_3) z(z-1) \frac{d}{dz} \right] y_r \sim \left[-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\alpha_1 - \frac{1}{2}}{v} \right) y_{r+1} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} - a_3 \right) y_r - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\alpha_1 - \frac{1}{2}}{v} \right) y_{r-1} \right] v(v+1 - \alpha_1 - \alpha_2) - (1 - \alpha_3) \left[\frac{v}{4} y_{r+1} - \frac{v}{4} y_{r-1} \right].$$

Setzen wir dann

$$(20) \quad \frac{c_{r+1}}{c_r} \sim t_3 \left(1 + \frac{\lambda}{v} \right),$$

so ergibt sich zur Bestimmung von λ die folgende Gleichung

$$\frac{1}{4t_3} \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} + \lambda + 1 + \alpha_3 \right) - \frac{t_3}{4} \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} + \lambda + 1 + \alpha_3 \right) = 0$$

mit der Lösung

$$(21) \quad \lambda = -\alpha_3 - \alpha_1 - \frac{1}{2}.$$

Ebenso gibt eine einfache Rechnung nach Formel (III) die asymptotische Darstellung

$$(22) \quad \frac{y_{r+1}}{y_r} \sim s \left(1 + \frac{\alpha_1 - \frac{1}{2}}{r} \right).$$

Wir erhalten dann aus den Gleichungen (20) und (22) unter Berücksichtigung der Gleichung (21)

$$(23a) \quad \frac{c_{r+1} y_{r+1}}{c_r y_r} \sim s t_3 \left(1 - \frac{\alpha_3 + 1}{r} \right),$$

oder, da $|st_3| = 1$ für $s = s_3$,

$$(23b) \quad \left| \frac{c_{r+1} y_{r+1}}{c_r y_r} \right| \sim 1 - \frac{\Re e(1 + \alpha_3)}{r}.$$

Nach dem Konvergenzkriterium von Raabe folgt dann, daß unsere Lösung (7) für $|s_3 t_3| = 1$, d. h. auf dem Rande E , absolut konvergent ist, wenn $\Re e(\alpha_3) > 0$ ist, dagegen absolut divergent, wenn $\Re e(\alpha_3) < 0$ ist.

§ 5.

Spezialfall.

Das einfachste Beispiel der hier betrachteten Gleichung (5) ist die sogenannte Heunsche Differentialgleichung, für welche n gleich 3 ist. Wir schreiben sie in der Form

$$(24) \quad z(z-1)(z-a) \frac{d^2 u}{dz^2} + [\gamma(z-1)(z-a) + \delta z(z-a) + \varepsilon z(z-1)] \frac{du}{dz} + \alpha\beta(z-h)u = 0,$$

worin h der einzige akzessorische Parameter ist. Hier können wir leicht die Rekursionsformel (10) explizit berechnen:

$$(25) \quad \frac{(v+1)(v+\delta)[(v-\varepsilon+1)(v+\gamma+\delta)+\alpha\beta]}{(2v+\gamma+\delta)(2v+\gamma+\delta+1)} c_{v+1} \\ - \left[\frac{\frac{1}{2}(\gamma-\delta)[v(v+\gamma+\delta-1)(\gamma+\delta+2\varepsilon-2) + (\gamma+\delta-2)\alpha\beta]}{(2v+\gamma+\delta-2)(2v+\gamma+\delta)} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} - a \right) v(v+\gamma+\delta-1) + \alpha\beta \left(\frac{1}{2} - h \right) \right] c_v \\ + \frac{(v+\gamma-1)(v+\gamma+\delta-2)[(v-1)(v+\gamma+\delta+\varepsilon-2) + \alpha\beta]}{(2v+\gamma+\delta-3)(2v+\gamma+\delta-2)} c_{v-1} = 0.$$

Zuletzt wollen wir bemerken, daß u. a. die Lamésche Differentialgleichung als Spezialfall in die Heunsche eingeht.

§ 6.

Verallgemeinerungen.

Die Möglichkeit, die obigen Ergebnisse zu verallgemeinern, liegt auf der Hand. Vor allem gilt dies von den Forderungen, die den singulären Stellen a_3, a_4, \dots, a_n aufgelegt sind. Auch hat der Fall ein besonderes Interesse, daß eine der hauptsächlich betrachteten singulären Stellen, die wir oben nach 0 und 1 transformierten, ins Unendliche rückt. Die Ergebnisse bleiben sinngemäß erhalten, wobei die Konvergenzellipse in eine Parabel übergeht und an Stelle von (6) die Laguerreschen Polynome $y_v = L_v^u(z)$ treten.

(Eingegangen am 14. 5. 1938.)

Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren*).

Von

Franz Wecken in Marburg a. d. Lahn.

Einleitung.

Von Hellinger [4]¹⁾ und Hahn [3] sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die unitäre Äquivalenz zweier linearer selbstadjungierter und beschränkter Operatoren im Hilbertschen Raum angegeben worden; durch Stone [14], Kap. 7, § 2 wurde das Ergebnis auf nichtbeschränkte selbstadjungierte Operatoren ausgedehnt. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der entsprechenden Frage für selbstadjungierte Operatoren in einem *nichtseparablen* vollständigen Euklidischen Raume, d. h. in einem Raum, in dem alle Axiome des Hilbertschen Raumes²⁾ gelten mit Ausnahme des Axiomes der Separabilität. Solche Räume, in denen es nichtabzählbare Systeme von Orthogonalelementen gibt, sind u. a. deshalb von Interesse, weil die fastperiodischen Funktionen einen nichtseparablen Raum bilden (vgl. Rellich [11], [12]). Während nun der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren im Hilbertschen Raum nahezu unverändert auch im nichtseparablen Raum gilt (Rellich [11], Löwig [6]), treten für die Theorie der unitären Invarianten beim Übergang von abzählbarer zu nichtabzählbarer Dimension die im folgenden angedeuteten neuen Verhältnisse ein.

Der unitärinvariante Charakter eines Hermiteschen Operators im endlichdimensionalen Raum ist bekanntlich bereits festgelegt durch Angabe der (endlich vielen) *Eigenwerte* und ihrer (endlichen) *Vielfachheiten*; es wird also bei gegebenem Operator H jeder reellen Zahl λ eine Vielfachheit $\mathfrak{B}(H, \lambda)$ zugeordnet³⁾, und die sämtlichen Zahlen $\mathfrak{B}(H, \lambda)$ bilden ein vollständiges Invariantensystem von H . Für einen selbstadjungierten Operator H im

*) Diese Arbeit wurde von der philosophischen Fakultät der Philipps-Universität zu Marburg a. d. Lahn preisgekrönt und als Dissertation angenommen.

¹⁾ Die Zahlen in [] verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

²⁾ Für die den Hilbertschen Raum definierenden Axiome vgl. v. Neumann [8], S. 64—66; v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin 1932, S. 19—24; Stone [14], S. 3. Die Ausdrucksweise bezieht sich in dieser Arbeit auf komplexe Euklidische Räume, doch gelten alle Überlegungen auch für die entsprechenden reellen Räume.

³⁾ Eine Zahl μ , die nicht Eigenwert ist, soll die Vielfachheit $\mathfrak{B}(H, \mu) = 0$ erhalten.

Hilbertschen Raum § fand Hahn [3] folgendes Ergebnis: Jeder reellen Zahl λ werden zwei Vielfachheiten zugeschrieben, nämlich je eine für das Punkt- und Streckenspektrum; aber diese Vielfachheiten bilden noch kein vollständiges Invariantensystem, sondern es müssen zur unitären Äquivalenz zweier Operatoren außer der Übereinstimmung dieser Vielfachheiten noch gewisse weitere Bedingungen erfüllt sein. Um diesem Mangel abzuweichen, kann man mit Friedrichs [2] jeder abgeschlossenen Punktmenge α der reellen λ -Achse eine Vielfachheit $\mathfrak{B}(H, \alpha)$ zuordnen und erhält dann den Satz: *Die Zahlen $\mathfrak{B}(H, \alpha)$ bilden ein vollständiges Invariantensystem des Operators H .* Von hier aus wurde in dieser Arbeit versucht, eine auch für den nicht-separablen Raum gültige Formulierung zu finden; dem stellten sich zwei Schwierigkeiten entgegen.

Zunächst erwies sich die im Hilbertschen Raum übliche *Definition der Vielfachheit* als revisionsbedürftig. Nach ihr würde nämlich in einem nicht-separablen Raum ein Operator mit einfachem Spektrum nicht möglich sein; nun hat aber z. B. der Operator $\frac{1}{i} \frac{d}{dt}$ im (nichtseparablen) Räume der fast-periodischen Funktionen als Eigenwerte alle reellen Zahlen λ mit den Eigen-elementen $\varphi_\lambda(t) = \text{const} \cdot e^{i\lambda t}$, man wird also sein Spektrum jedenfalls als einfach bezeichnen. Es mußte daher eine neue Definition der Vielfachheit und insbesondere des einfachen Spektrums aufgestellt werden, die natürlich im separablen Räume mit der alten Definition übereinstimmt.

Sodann zeigte sich, daß die (neu definierten) Vielfachheiten $\mathfrak{B}(H, \alpha)$, selbst wenn man den Kreis der zugelassenen Punktmengen α auf der λ -Achse möglichst erweitert, im allgemeinen *kein vollständiges Invariantensystem* von H bilden. Um trotzdem eine analoge Formulierung zu erhalten, war es notwendig, die λ -Achse überhaupt zu verlassen. Sie wurde durch eine andere „universelle Spektralmannigfaltigkeit“ A ersetzt, nämlich die Menge aller für $-\infty < \lambda < \infty$ definierten reellen beschränkten monoton nicht fallenden stetigen bei $-\infty$ verschwindenden Funktionen $\varrho(\lambda)$; gewissen ausgezeichneten Teilmengen s von A , den „Spektralbereichen“, lassen sich nun Vielfachheiten $\mathfrak{B}(H, s)$ zuordnen, die ein vollständiges Invariantensystem von H bilden. Zur Definition der Vielfachheiten $\mathfrak{B}(H, s)$ findet eine „erweiterte Spektralschar“ P_s Verwendung, in demselben Sinne wie nach Friedrichs die Zahlen $\mathfrak{B}(H, \alpha)$ mit Hilfe verallgemeinerter Spektralprojektoren $P(\alpha)$ definiert werden.

Durch Aufstellung einer *Normalform* für beliebige selbstadjungierte Operatoren wird die Frage beantwortet, inwiefern man zu einem willkürlich vorgegebenen Invariantensystem einen Operator finden kann.

Im einzelnen ist die Anordnung diese: Nachdem in § 1 Bezeichnungen eingeführt und die (bekannten) Ergebnisse der für den Hilbertschen Raum

gültigen Invariantentheorie im Anschluß an Stone [14] und Friedrichs [2] dargestellt sind, wird das Punktspektrum besprochen (§ 2) und der Begriff der Vielfachheit geklärt (§ 3). In § 4 werden, ohne Bezugnahme auf Operatoren, die Menge \mathcal{A} und die Spektralbereiche eingeführt und ihre Eigenschaften untersucht; mit ihrer Hilfe gelingt in § 5 die Charakterisierung der Operatoren mit einfachem Spektrum. In § 6 wird die Erweiterung der Spektralschar vorgenommen, die dann in § 7 zur Aufstellung einer Normalform und zweier gleichwertiger Invariantensysteme führt. Im Anhang I wird an einem Beispiel gezeigt, daß eine solche Erweiterung wirklich notwendig ist, daß also die durch die Friedrichssche Spektralschar geleistete Zerlegung des Operators im nicht-separablen Fall nicht fein genug ist, um alle seine unitärinvarianten Eigenschaften ans Licht zu bringen. Im Anhang II wird eine in gewissem Sinne willkürfreie Realisation selbstadjungierter Operatoren mit einfachem Spektrum angegeben, die eine Illustration zu den Sätzen von § 5 bedeutet.

§ 1.

Unitärinvarianten im Hilbertschen Raum.

1. Bezeichnungen. Es wird zunächst ein Hilbertscher Raum \mathfrak{H} (später ein vollständiger Euklidischer Raum \mathfrak{R}) mit Elementen u, v, x, y, \dots zugrunde gelegt; mit *Unterraum* oder *Teilraum* ist stets ein abgeschlossener Teilraum gemeint. Sind die Teilräume \mathfrak{F} und \mathfrak{G} zueinander orthogonal — in Zeichen: $\mathfrak{F} \perp \mathfrak{G}$ —, so wird mit $\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$ der von \mathfrak{F} und \mathfrak{G} aufgespannte Teilraum bezeichnet; in ähnlichem Sinne ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$ gemeint. Wird der selbstadjungierte Operator H durch den Teilraum \mathfrak{F} *reduziert* — d. h. ist der zu \mathfrak{F} gehörige *Projektor* ⁴⁾ P mit H vertauschbar, in Zeichen $P \circ H =$, so sei mit $H_{\mathfrak{F}}$ der in \mathfrak{F} *liegende Teil* oder *Abschnitt* von H bezeichnet ⁵⁾. Ist $\mathfrak{H} = \Sigma \oplus \mathfrak{F}_n$ und wird H durch alle Teilräume \mathfrak{F}_n reduziert, so schreibe ich auch $H = \Sigma \oplus H_{\mathfrak{F}_n}$. Unitäre Äquivalenz von zwei Operatoren R und S wird durch $R \sim S$ ausgedrückt.

Die linksstetige Spektralschar des betrachteten Operators wird im allgemeinen mit P_{λ} bezeichnet. Funktionen von λ , wie sie in der Form $|P_{\lambda}x|^2$ erhalten werden, also linksstetige, monoton nicht fallende, beschränkte, bei $-\infty$ verschwindende Funktionen werden *M-Funktionen* genannt und mit $\varrho(\lambda)$, $\sigma(\lambda)$, τ , φ , χ , ψ bezeichnet. Einer *M-Funktion* $\varrho(\lambda)$ läßt sich in bekannter Weise eine nichtnegative totaladditive *Mengenfunktion* zu-

⁴⁾ „Projektor“ bedeutet Projektionsoperator, vgl. [1], S. 54.

⁵⁾ Vgl. v. Neumann [8], S. 78.

ordnen⁶⁾, die wieder $\varrho(m)$ genannt werde. Sie ist erklärt für alle ϱ -meßbaren Mengen m der λ -Achse, das sind solche, die durch die Abbildung $\varrho = \varrho(\lambda)$ in Lebesgue-meßbare („ L -meßbare“) Mengen der ϱ -Achse überführt werden, und bei stetigem $\varrho(\lambda)$ ist $\varrho(m)$ das L -Maß der Bildmenge. Alle Borelschen Mengen („ B -Mengen“) sind ϱ -meßbar. Für gewisse ϱ -meßbare Funktionen $f(\lambda)$ läßt sich das Lebesgue-Stieltjes-Integral $\int_m f(\lambda) d\varrho(\lambda)$ erklären⁷⁾ (m ϱ -meßbar); es ist $\int_m d\varrho(\lambda) = \varrho(m)$.

Die Relation $\sigma < \varrho$ („ σ liegt unter ϱ “) oder $\varrho > \sigma$ besagt, daß σ sich als $\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) d\varrho(\mu)$ schreiben läßt⁸⁾, oder auch, daß aus $\varrho(b) = 0$ für jede B -Menge b folgt $\sigma(b) = 0$ ⁹⁾. $\sigma \sim \varrho$ („äquivalent“) ist durch $\sigma < \varrho < \sigma$ erklärt; dies ist eine Äquivalenzrelation, die eine Klasseneinteilung der betrachteten Funktionen erzeugt. Statt $|P_\lambda y|^2 < |P_\lambda x|^2$ bzw. $|P_\lambda y|^2 \sim |P_\lambda x|^2$ wird auch $y < x$ ($x > y$) bzw. $y \sim x$ geschrieben.

Der von allen Elementen $P_\lambda x$ ($-\infty < \lambda < \infty$) bei festem x aufgespannte Unterraum heiße $\mathfrak{M}(x)$ ¹⁰⁾.

2. Unitärinvarianten nach Hellinger und Hahn. (Formulierung nach Stone [14], Kap. VII.)

Satz 1a. R sei ein selbstadjungierter Operator in dem Hilbertschen Raume \mathfrak{H} . Dann gibt es

1. eine leere, endliche oder abzählbar unendliche Menge reeller Zahlen („Eigenwerte“), soweit vorhanden, mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ bezeichnet ($\lambda_k \neq \lambda_l$ für $k \neq l$),

2. zu jedem k , zu dem λ_k definiert ist, eine Menge von Raumelementen u_{k1}, u_{k2}, \dots der Mächtigkeit n_k („Vielfachheit von λ_k “, $0 < n_k \leq \aleph_0$),

3. Raumelemente x_1, x_2, \dots

mit folgenden Eigenschaften: $Ru_{kl} = \lambda_k u_{kl}$, $|u_{kl}| = 1$; $\mathfrak{M}(u_{kl}) \perp \mathfrak{M}(u_{k'l'})$ außer, wenn $k = k'$, $l = l'$; $\mathfrak{M}(u_{kl}) \perp \mathfrak{M}(x_n)$; $|P_\lambda x_k|^2$ stetig in λ ; $x_k > x_{k+1}$; $\mathfrak{M}(x_k) \perp \mathfrak{M}(x_l)$ für $k \neq l$; $\mathfrak{H} = \sum_{k,l} \oplus \mathfrak{M}(u_{kl}) \oplus \sum_k \oplus \mathfrak{M}(x_k)$.

Satz 1b. Die in Satz 1a genannten Eigenwerte λ_k sind mit ihren Vielfachheiten n_k (bis auf die Reihenfolge) durch R eindeutig bestimmt. Die Elemente x_k sind (einschließlich Reihenfolge) bis auf Äquivalenz $x_k \sim x'_k$ durch R bestimmt. Die Eigenwerte mit Vielfachheiten und die Äquivalenzklassen der x_k bilden zusammen ein vollständiges System von Unitärinvarianten des Operators R .

⁶⁾ [14], S. 200ff.

⁷⁾ [14], Kap. VI, § 1.

⁸⁾ [14], S. 213–214.

⁹⁾ [14], Lemma 6.5 (2), S. 215.

¹⁰⁾ [14], Satz 7.2, S. 243.

3. Umformung. Diese wohlbekannten Sätze sollen zunächst so umgeformt werden, daß die Trennung von Punkt- und Streckenspektrum verschwindet. Dazu sei $y_i = \sum_k 2^{-k} u_{ki}$ (die nicht erklärten Terme sind zu unterdrücken). Dann ist offenbar $\mathfrak{M}(y_i) = \sum_k \oplus \mathfrak{M}(u_{ki})$ und $y_i > y_{i+1}$. Die y_k haben für das Punktspektrum dieselbe Bedeutung wie die x_k für das Streckenspektrum: durch die λ_k und n_k sind die Sprungstellen der Funktionen $\varphi_k(\lambda) = |P_\lambda y_k|^2$ und damit die Äquivalenzklassen der y_k festgelegt und diese gestatten wiederum die Ermittlung der λ_k und n_k , bilden also ein vollständiges Invariantensystem für das Punktspektrum.

Nun sei $z_k = x_k + y_k$. Es ist $|P_\lambda z_k|^2 = \varrho_k(\lambda) = |P_\lambda x_k|^2 + |P_\lambda y_k|^2$; es folgt $z_k > z_{k+1}$, $\mathfrak{M}(z_k) = \mathfrak{M}(x_k) \oplus \mathfrak{M}(y_k)$ und $\mathfrak{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}(z_k)$. Die Äquivalenzklasse von z_k ist durch diejenigen von x_k und y_k bestimmt und umgekehrt. Die beiden Sätze können jetzt folgendermaßen ausgesprochen werden:

Satz 2a. Ist R ein selbstadjungierter Operator im Hilbertschen Raum \mathfrak{H} , so gibt es Elemente $z_k \in \mathfrak{H}$ ($k = 1, 2, \dots$) mit $z_k > z_{k+1}$, $\mathfrak{M}(z_k) \perp \mathfrak{M}(z_l)$ für $k \neq l$, $\mathfrak{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}(z_k)$.

Satz 2b. Die in Satz 2a genannten Elemente z_k sind bis auf Äquivalenz $z_k \sim z'_k$ durch R bestimmt und die Äquivalenzklassen der z_k bilden ein vollständiges System von Unitärinvarianten des Operators R .

Diese vorläufige Formulierung soll jetzt als Ausgangspunkt dienen.

4. Erweiterte Spektralschar^{10a)}. Die von Friedrichs ([1] und [2]) angegebenen verallgemeinerten Spektralprojektoren, die linearen Punktmengen zugeordnet sind, lassen sich zwar ohne Schwierigkeit in der dort angegebenen Weise als totaladditive Mengenfunktionen einführen, doch kann man unter Benutzung der Theorie der Funktionen $F(R)$ eines selbstadjungierten Operators R (von Neumann [10] und Stone [14], Kap. VI) ihre Definition und ihre Eigenschaften unmittelbar angeben.

Es sei R ein selbstadjungierter Operator in \mathfrak{H} . Diejenigen Funktionen $F(R) (= \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) dP_\lambda$, vgl. S. 431, insbes. Anm.^{10b)}), die Projektoren sind, können

sämtlich in folgender Weise erhalten werden: man setze $F(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda \in b \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

wo b eine B -Menge der reellen λ -Achse ist¹¹⁾. Der Projektor $F(R)$ soll mit $P(b)$ und die Gesamtheit der $P(b)$ als *erweiterte Spektralschar* von R bezeichnet werden. $P(b)$ ist mit jedem mit R vertauschbaren Operator ver-

^{10a)} Vgl. § 6.

¹¹⁾ [14], Satz 6.6 (3), S. 232, und Satz 6.8, S. 234.

tauschbar. Nach [10] ist diese letzte Eigenschaft, wenn sie einem Projektor P zukommt, auch hinreichend für das Bestehen einer Gleichung $P = F(R)$, also $P = P(b)$, was hier nicht benutzt wird, aber in anderem Zusammenhange (§ 6, Satz 23) von Interesse ist.

Nach [14] (Satz 6.1, S. 221) ist weiter $P(b_1)P(b_2) = P(b_1b_2)$ und, wenn $b_1b_2 = 0$ ist, $P(b_1) + P(b_2) = P(b_1 + b_2)$; ferner $|P(b)x|^2 = \int d\varrho(\lambda) = \varrho(b)$, wenn $|P_\lambda x|^2 = \varrho(\lambda)$ ist.

Nach Satz 2b ist insbesondere die Anzahl $\mathfrak{B}(R)$ der nicht verschwindenden z_k eine Invariante; sie werde als *Vielfachheit des Spektrums von R* bezeichnet. Ist R_b der im Unterraum $P(b)\mathfrak{H}$ liegende Teil von R , so ist auch jede Unitärinvariante von R_b eine solche von R , insbesondere die Vielfachheit $\mathfrak{B}(R_b) = \mathfrak{B}(R, b)$, die als *Vielfachheit von R über b* bezeichnet werde¹²⁾.

5. Unitärinvarianten nach Friedrichs.

Satz 3. Die Vielfachheiten $\mathfrak{B}(R, a)$ eines selbstadjungierten Operators R in \mathfrak{H} über allen abgeschlossenen Punktmengen a bilden ein vollständiges Invariantensystem von R .

Beweis. Es ist offenbar nur noch zu zeigen, daß die in Satz 2b genannten Invarianten sich durch die Zahlen $\mathfrak{B}(R, a)$ ausdrücken lassen. Da die Äquivalenzklasse von z_k , d. h. von $\varrho_k(\lambda) = |P_\lambda z_k|^2$, charakterisiert ist durch die B -Mengen b , für die $\int_b d\varrho_k(\lambda) = 0$ bzw. $P(b)z_k = 0$ ist, ist also aus den $\mathfrak{B}(R, a)$ zu ermitteln, ob $\varrho_k(b) = 0$ ist oder nicht. Nun gibt es bekanntlich zu ϱ_k und b abgeschlossene Punktmengen a_1, a_2, \dots mit $a_1 \subseteq a_2 \subseteq \dots \subseteq b$ und $\varrho_k(a_l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \varrho_k(b)$; es ist also $\varrho_k(b) = 0$ dann und nur dann, wenn für jede abgeschlossene Menge $a \subseteq b$ $\varrho_k(a) = 0$ ist, d. h. man kann sich auf abgeschlossene Mengen beschränken. Es wird nun behauptet: es ist $\varrho_k(a) = 0$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{B}(R, a) < k$ ist.

Es seien z_1, z_2, \dots nach Satz 2a gewählt, a abgeschlossen und $v_k = P(a)z_k$. Dann werden die v_k (anstatt z_k) für R_a (statt R) in $\mathfrak{H}_a = P(a)\mathfrak{H}$ (statt \mathfrak{H}) die Bedingungen von Satz 2a erfüllen. $z_k > z_{k+1}$ bedeutet: $P(b)z_k = 0$ zieht $P(b)z_{k+1} = 0$ nach sich; folglich zieht $0 = P(b)v_k = P(b)P(a)z_k = P(ab)z_k$ nach sich $0 = P(ab)z_{k+1} = P(b)v_{k+1}$, also ist $v_k > v_{k+1}$. Aus $\mathfrak{M}(z_k) \perp \mathfrak{M}(z_l)$ folgt $\mathfrak{M}(v_k) \perp \mathfrak{M}(v_l)$. Wegen $\mathfrak{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}(z_k)$ kann jedes $x \in \mathfrak{H}$ durch endliche Linearkombinationen von Elementen $P_\lambda z_k$ approximiert werden, hat also die Gestalt

$$x = \lim \sum_k (\sum_l \varkappa_{kl} P_{\lambda_{kl}} z_k) \quad (\varkappa_{kl} \text{ komplexe Zahlen}),$$

¹²⁾ Im Falle $P(b) = 0$ werde sinngemäß $\mathfrak{B}(R, b) = 0$ gesetzt.

jedes $y \in \mathfrak{H}_a$ also die Gestalt

$$y = P(a) x = \lim_k P(a) \sum_l (\sum_i \kappa_{k,l} P_{i,k,l} z_k) \\ = \lim_k \sum_l (\sum_i \kappa_{k,l} P_{i,k,l} v_k),$$

d. h. es ist $\mathfrak{H}_a = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}(v_k)$.

Somit ist $\mathfrak{B}(R, a)$ die Zahl der nicht verschwindenden v_k . Da $v_k = 0$ $v_{k+1} = 0$ impliziert und $|v_k|^2 = \varrho_k(a)$ ist, gibt es entweder ein ganzes $N \geq 0$, so daß $\varrho_k(a) = |v_k|^2 \neq 0$ für $k \leq N$ ist, und es ist dann $N = \mathfrak{B}(R, a)$, oder es ist $\mathfrak{B}(R, a) = \infty$ und stets $\varrho_k(a) \neq 0$. In beiden Fällen ist die Behauptung bestätigt und damit der Satz 3 bewiesen.

Die gewonnene Formulierung wird offenbar auch dem Punktspektrum gerecht, da man, für a die nur aus der Zahl μ bestehende Menge einsetzend, in $\mathfrak{B}(R, a)$ sofort die Vielfachheit des Punkteigenwertes μ erhält¹³⁾. — Sie hat gegenüber der Formulierung in Satz 1 oder 2 den Nachteil, daß sich an ihr nicht gut übersehen läßt, inwieweit man die Invarianten willkürlich vorschreiben kann, sie also keinen Überblick über die Gesamtheit der möglichen Typen von Operatoren und keine Normalform liefert.

§ 2.

Punktspektrum.

Den durch ein bestimmtes vollständiges Invariantensystem gekennzeichneten unitärinvarianten Charakter eines Operators bezeichne ich als seinen *Typ*; m. a. W.: ich teile sämtliche Operatoren in Klassen unitär äquivalenter ein und ordne jeder Klasse einen Typ zu. Die Aufsuchung der Unitärinvarianten, die Aufgabe dieser Arbeit, ist dann gleichbedeutend mit der *Kennzeichnung sämtlicher Typen selbstadjungierter Operatoren*. — Besteht zwischen den Operatoren A_1, A_2, A_3 mit den zugehörigen Typen E_1, E_2, E_3 die Beziehung $A_1 = A_2 \oplus A_3$ oder $A_1 \sim A_2 \oplus A_3$, so ist offenbar E_1 durch E_2 und E_3 in bestimmter Weise festgelegt, was ich durch die Schreibweise $E_1 = E_2 \oplus E_3$ andeute. Durch $A \sim E$ drücke ich aus, daß A dem Typ E angehört; man kann sich hierbei unter E auch eine bestimmte, ein für allemal gewählte „Realisation“ des betreffenden Typs vorstellen; vgl. Anhang II.

¹³⁾ Die in [3] und [14] (S. 267) definierten Vielfachheiten „eines Punktes hinsichtlich des kontinuierlichen Spektrums“ haben hiermit nichts zu tun. Sie bilden ein unvollständiges Invariantensystem, vgl. die Einleitung.

Im Hilbertschen Raum ist, wie gezeigt, eine gemeinsame Behandlung des Punkt- und Streckenspektrums möglich und liefert eine für beide Teile angemessene Formulierung (Satz 3). Im nichtseparablen Raume bietet das Punktspektrum nichts Neues, während das kontinuierliche Spektrum einen umständlicheren Apparat erfordert. Zwar wäre es auch hier durchaus möglich, beides gemeinsam zu behandeln^{12a)} und die Hauptsätze ohne Fallunterscheidung auszusprechen, doch würde dies einerseits eine für das Punktspektrum unsachgemäße (weil zu umständliche) Formulierung des Endergebnisses bedeuten (genau so wie die Formulierung von Satz 2 für das Punktspektrum unsachgemäß war), andererseits die Diskussion des Streckenspektrums undurchsichtig machen. Es erschien deshalb geraten, das Punktspektrum kurz vorweg zu behandeln.

Es sei also R ein selbstadjungierter Operator in einem Raume $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^n$ von beliebiger Dimension n . Ist P_λ die linksstetige, $P_{\lambda+}$ die rechtsstetige Spektralschar von R , so ist bekanntlich $Q_\lambda = P_{\lambda+} - P_\lambda$ der Projektor des zum Eigenwert λ gehörigen Eigenraumes; wird $Q = \sum_\lambda Q_\lambda$, $P = 1 - Q$ gesetzt, so hat $R_Q \mathfrak{R}$ reines Punktspektrum, $R_P \mathfrak{R}$ reines kontinuierliches Spektrum. Der allgemeine Operator R hat also die Gestalt $R = A \oplus H$, der allgemeine Typ die Form $F \oplus E$, wo A bzw. F reines Punktspektrum, H bzw. E reines Streckenspektrum haben und im übrigen ganz unabhängig sind. Ich betrachte also zunächst einen Operator A mit reinem Punktspektrum.

Die bekannten Tatsachen können hier in sinngemäßer Übertragung ohne Beweis ausgesprochen werden. Ein vollständiges Invariantensystem erhält man durch Angabe der sämtlichen Eigenwerte, d. h. der λ mit $Q_\lambda \neq 0$, und ihrer Vielfachheit $\mathfrak{B}(A, \lambda)$, d. h. der Dimensionszahl des Raumes $Q_\lambda \mathfrak{R}$. Setzt man $\mathfrak{B}(A, \lambda) = 0$ für $Q_\lambda = 0$, so gewinnt man die Formulierung: *Der Typ von A ist gekennzeichnet durch eine Funktion $\mathfrak{B}(A, \lambda)$, die jeder reellen Zahl λ eine Kardinalzahl zuordnet. Die Typen F von reinem Punktspektrum entsprechen eineindeutig den sämtlichen Funktionen dieser Art.*

Als *Vielfachheit des gesamten Spektrums von A* , $\mathfrak{B}(A)$, wird man sinngemäß die kleinste von keiner Vielfachheit eines Eigenwertes übertroffene Kardinalzahl bezeichnen.

Im Hinblick auf spätere Sätze über das Streckenspektrum (Satz 27, 29) ist es wünschenswert, eine bestimmte *Normalform* für F zu gewinnen. Ist Z die Menge der reellen Zahlen, c eine Teilmenge davon, so sei mit F_c der Typ bezeichnet, der jede Zahl $\lambda \in c$ und nur diese als Eigenwert hat, und zwar mit der Vielfachheit 1. Ist die Vielfachheit $\mathfrak{B}(A, \lambda) = n \neq 0$ für $\lambda \in c$

^{12a)} Vgl. Anhang II.

und sonst Null, so schreibe ich $A \sim n \times F_c$ (also $1 \times F_c = F_c$, $2 \times F_c = F_c \oplus F_c$) und sage: A hat das Punktspektrum c und auf c durchweg die Vielfachheit n ¹⁴⁾. Dann gilt

Satz 4. Man zerlege die Menge der reellen Zahlen in eine Menge \mathfrak{C} paarweise fremder, nicht leerer Teilmengen $c: Z = \sum_{c \in \mathfrak{C}} c$, und ordne jeder Menge $c \in \mathfrak{C}$ eine Kardinalzahl $\mathfrak{z}(c)$ zu, jedoch so, daß $\mathfrak{z}(c) \neq \mathfrak{z}(c')$ für $c \neq c'$ ist. Dann ist

$$F = \sum_{c \in \mathfrak{C}, \mathfrak{z}(c) \neq 0} \oplus (\mathfrak{z}(c) \times F_c)$$

ein selbstadjungierter Typ mit reinem Punktspektrum; man erhält auf diese Art jeden solchen Typ, und zwar jeden genau einmal.

Die Zahl der verschiedenen wirklich auftretenden Vielfachheiten kann jede Kardinalzahl $\leq \aleph$ sein. Ein Operator A mit einfachem Spektrum ist in jedem Raum mit einer Dimensionszahl $\leq \aleph$ möglich.

§ 3.

Vielfachheit.

Eine Definition der Vielfachheit des Spektrums, insbesondere auch die Erklärung, wann das Spektrum eines Operators einfach ist, wurde oben (§ 1, 4, S. 427) wie auch bei Stone ([14], Def. 7. 1, S. 267; Def. 7. 2, S. 275) erst ausgesprochen, nachdem ein vollständiges Unitärinvariantensystem bereits vorhanden war. Der Satz 3 ist deshalb auch wenig anwendbar, solange es nicht gelingt, die Vielfachheit einfacher zu definieren. Das ist in der Tat möglich; es ist aber zweckmäßig, zunächst für einfaches Spektrum eine andere Definition aufzustellen. Die für den Hilbertschen Raum wohlbekannte

Definition 1a: Der selbstadjungierte Operator R in \mathfrak{H} hat einfaches Spektrum, wenn es ein $x \in \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}(x)$ gibt —,

erfaßt in gleicher Weise Punkt- und Streckenspektrum; sie ist auch im \mathfrak{R}^n gültig, und man ist versucht, sie auch auf den nichtseparablen Raum anzuwenden. Nun wird aber $\mathfrak{M}(x)$ schon durch die abzählbar vielen Elemente $P_\lambda x$ mit rationalem λ aufgespannt und ist daher stets separabel. Ein einfaches Spektrum wäre demnach nur in einem separablen Raume möglich, im Widerspruch zu der Bemerkung am Schluß von § 2. Das einfache Spektrum ist also anders zu erklären.

Um zu einer allgemeingültigen sachgemäßen Definition zu kommen, gehe ich von folgender Überlegung aus. Der Operator R gestatte eine Zerlegung $R = \sum_{i \in \mathfrak{I}} \oplus R_i$ (\mathfrak{I} eine Indizesmenge); dann entsteht das Spektrum

¹⁴⁾ Vgl. Definition 12, S. 445.

von R durch Superposition der Spektren der R_i . Treten unter den Summanden R_i zwei unitär äquivalente auf, so wird gewiß das Spektrum von R mehrfach sein; hat umgekehrt R ein mehrfaches Spektrum, so ist jedenfalls im Falle des Punktspektrums eine Zerlegung möglich, in der zwei unitär äquivalente Summanden vorkommen. Dies führt zu folgender Formulierung:

Definition 1b. Das Spektrum von H ist einfach, wenn es nicht zwei zu einander orthogonale, H reduzierende, nicht nulldimensionale Teilräume \mathfrak{F} , $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$ mit $H_{\mathfrak{F}} \sim H_{\mathfrak{G}}$ gibt.

Satz 5. Im separablen Räume sind Def. 1a und 1b gleichwertig.

Beweis. Im \mathfrak{H}^* ist die Behauptung trivial. Sei R ein selbstadjungierter Operator in \mathfrak{H} und der Tatbestand von Def. 1a, aber nicht von Def. 1b erfüllt. Es sei also $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}(x)$ und $R_{\mathfrak{F}} \sim R_{\mathfrak{G}}$. Sei $y \in \mathfrak{F}$ beliebig mit $y \neq 0$; es gibt dazu ein entsprechendes $z \in \mathfrak{G}$ mit $|P_{\lambda}y| = |P_{\lambda}z|$ ($-\infty < \lambda < \infty$)¹⁵). Seien im Sinne von [14], Satz 6.2 die Elemente y und z bzw. den Funktionen $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ zugeordnet [wofür man nach F. Rieß¹⁶]

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dP_{\lambda}x, \quad z = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) dP_{\lambda}x$$

schreiben kann], so ist nach [14] mit $\varrho(\lambda) = |P_{\lambda}x|^2$

$$|P_{\lambda}y|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda-0} |f(\mu)|^2 d\varrho(\mu), \quad |P_{\lambda}z|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda-0} |g(\mu)|^2 d\varrho(\mu),$$

$$(P_{\lambda}y, z) = \int_{-\infty}^{\lambda-0} f(\mu) \overline{g(\mu)} d\varrho(\mu).$$

Aus $|P_{\lambda}y| = |P_{\lambda}z|$ folgt nun $|f(\lambda)|^2 \underline{\varrho} |g(\lambda)|^2$ (d. h. $|f(\lambda)|^2 = |g(\lambda)|^2$ bis auf eine ϱ -Nullmenge oder $|f(\lambda)|^2 \varrho$ -äquivalent $|g(\lambda)|^2$), $|f(\lambda)| \underline{\varrho} |g(\lambda)|$; aus $y \in \mathfrak{F}$, $z \in \mathfrak{G}$ folgt $\mathfrak{M}(y) \perp \mathfrak{M}(z)$, $(P_{\lambda}y, z) = 0$, $f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \underline{\varrho} 0$, $|f(\lambda)|^2 \underline{\varrho} |f(\lambda) \overline{g(\lambda)}| \underline{\varrho} 0$, $y = 0$ (Widerspruch). Sei Def. 1a nicht erfüllt; dann ist in der Bezeichnung von Satz 2a die Zahl der nicht verschwindenden unter den z_k mindestens zwei, also

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}(z_1) \oplus \mathfrak{M}(z_2) \oplus \dots, \quad z_1 \succ z_2 \neq 0.$$

Es sei $\varrho_1(\lambda) = |P_{\lambda}z_1|^2$, $\varrho_2(\lambda) = |P_{\lambda}z_2|^2$; $F(\lambda) \geq 0$ sei nach [14], S. 213/214 gewählt mit $\varrho_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda-0} F(\mu) d\varrho_1(\mu)$; $f(\lambda) = \sqrt{F(\lambda)}$. Ein Element $x \in \mathfrak{M}(z_1)$ sei erklärt durch

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dP_{\lambda}z_1,$$

¹⁵) Nämlich $z = Uy$, wenn U die isometrische Abbildung von \mathfrak{F} auf \mathfrak{G} ist, die die Äquivalenz zwischen $R_{\mathfrak{F}}$ und $R_{\mathfrak{G}}$ vermittelt.

¹⁶) F. Rieß, [13] und Acta Sci. math. Szeged 7 (1935), S. 147—159.

wo das Integral wie oben zu verstehen ist. Dann ist $\mathfrak{M}(x) \subseteq \mathfrak{M}(z_1)$,
 $\mathfrak{M}(x) \perp \mathfrak{M}(z_2)$, $|P_1 x|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda-0} |f(\mu)|^2 d\varrho_1(\mu) = \varrho_2(\lambda) = |P_1 z_2|^2$. Wird nun
 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}(x)$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}(z_2)$ gesetzt, so sind nach [14], Satz 7.10 $R_{\mathfrak{F}}$ und $R_{\mathfrak{G}}$
 unitär äquivalent zu einem und demselben Operator H_1 im Raume $\mathfrak{L}_2(x)$
 $= \mathfrak{L}_2(\varrho_2) = \mathfrak{L}_2(z_2)$ (vgl. [14], Def. 6.1; $\mathfrak{L}_2(\varrho)$ ist der Raum der ϱ -meßbaren
 und quadratisch ϱ -integrablen Funktionen $f(\lambda)$, und H_1 führt $f(\lambda)$ in $\lambda f(\lambda)$
 über, wenn $f(\lambda)$ und $\lambda f(\lambda)$ in $\mathfrak{L}_2(\varrho)$ liegen), also $R_{\mathfrak{F}} \sim R_{\mathfrak{G}}$, w. z. b. w.

Der Beweis liefert noch folgendes Kriterium für einfaches Spektrum.

Satz 6. (Erstes Kriterium.) *Das Spektrum des selbstadjungierten Operators R in \mathfrak{R} ist dann und nur dann einfach, wenn es nicht zwei Elemente $x, y \in \mathfrak{R}$ gibt mit*

$$x \neq 0, |P_\lambda x| = |P_\lambda y| \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad \mathfrak{M}(x) \perp \mathfrak{M}(y).$$

Der Bezeichnung „einfaches Spektrum“ ist somit jetzt ein *eindeutiger Sinn* verliehen durch Def. 1b und durch das eben gewonnene Kriterium, wofür in § auch Def. 1a verwendet werden kann; weitere notwendige und hinreichende Kriterien werden sich später (S. 442, 443) ergeben. Aus Def. 1b folgt, daß das Spektrum von R dann und nur dann einfach ist, wenn bei Zerlegung $R = A \oplus H$ nach Punkt- und Streckenspektrum (vgl. § 2) A und H einfaches Spektrum haben.

Der Begriff der Vielfachheit kann nun auf den des einfachen Spektrums zurückgeführt werden (vgl. Friedrichs [2], S. 81).

Definition 2. *Die Vielfachheit des Spektrums von R (kurz Vielfachheit von R), $\mathfrak{B}(R)$, ist die kleinste Kardinalzahl n , so daß eine Zerlegung $R = \sum_{i \in \mathfrak{I}} R_i$ in n Abschnitte R_i mit einfachem Spektrum möglich ist.*

Def. 2 ist also sinnvoll, sobald gezeigt ist, daß jeder selbstadjungierte Operator überhaupt eine Zerlegung in Abschnitte mit einfachem Spektrum zuläßt; dies wird allgemein erst in Satz 17, § 5, geschehen. Ist aber $R = A \oplus H$, wo A reines Punkt-, H reines Streckenspektrum hat, so ist $\mathfrak{B}(A)$ jedenfalls sinnvoll, und wenn $\mathfrak{B}(H)$ Sinn hat, dann auch $\mathfrak{B}(R)$, und zwar ist $\mathfrak{B}(R) \leq \mathfrak{B}(A) + \mathfrak{B}(H)$. Da aber mit A und H auch R einfaches Spektrum hat, gilt sogar $\mathfrak{B}(R) = \max(\mathfrak{B}(A), \mathfrak{B}(H))$. Im Hilbertschen Raum ist zufolge Satz 1a die Def. 2 stets sinnvoll, und es ist nun nachzuweisen, daß sie mit der alten Definition (§ 1, 4, S. 427) übereinstimmt.

Wird die alte Vielfachheit vorübergehend mit \mathfrak{B}_0 bezeichnet, so ist offenbar auch $\mathfrak{B}_0(R) = \max(\mathfrak{B}_0(A), \mathfrak{B}_0(H))$ und $\mathfrak{B}_0(A) = \mathfrak{B}(A)$, es ist also nur zu zeigen: $\mathfrak{B}_0(H) = \mathfrak{B}(H)$, d. h. man kann sich auf reines Streckenspektrum beschränken. Es ist demnach folgendes zu zeigen: fehlen in Satz 1a die Punkteigenwerte, so ist die Zahl der nicht verschwindenden x_k (also $\mathfrak{B}_0(H)$)

gleich der Minimalzahl $\mathfrak{B}(H)$ der y_k , die man zu einer Zerlegung $\mathfrak{H} = \sum_k \oplus \mathfrak{M}(y_k)$ benötigt. Nun ist einerseits $\mathfrak{B}(H) \leq \mathfrak{B}_0(H)$ infolge der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{B}(H)$; andererseits kann man bei der schrittweisen Konstruktion der Elemente x_k nach [14], Satz 7.5, S. 250ff., von den Elementen y_k ausgehen, und die Zahl der von Null verschiedenen Elemente erhöht sich bei dem Verfahren nicht, da

$$\sum_{k=1}^n \oplus \mathfrak{M}(y_k) \subseteq \sum_{k=1}^n \oplus \mathfrak{M}(x_k) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ist ([14], S. 258, erste Formel), es ist also

$$\mathfrak{B}_0(H) \leq \mathfrak{B}(H), \quad \mathfrak{B}_0(H) = \mathfrak{B}(H).$$

Von jetzt ab wird in §§ 4 bis 7, wenn nichts anderes bemerkt ist, ein Operator H mit reinem Streckenspektrum in einem Raume \mathfrak{R} betrachtet.

§ 4.

Spektralbereiche.

Definition 3. A sei die Menge aller stetigen, beschränkten, monoton nicht fallenden, für alle reellen λ definierten, bei $-\infty$ verschwindenden Funktionen (kurz „ A -Funktionen“ genannt). Ist $\varrho(\lambda) \in A$, so wird $\varrho(\infty)$ für $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varrho(\lambda)$ geschrieben.

Die A -Funktionen sind also die stetigen unter den M -Funktionen (vgl. S. 424); mit ϱ, σ, \dots werden in diesem Paragraphen nur A -Funktionen bezeichnet.

Satz 7. Ist $\varrho \in A, \sigma \in A$, so ist für $\sigma < \varrho$ notwendig und hinreichend, daß σ eine totalstetige Funktion von ϱ ist. Diese Funktion ist dann eindeutig bestimmt im Intervall $(0, \varrho(\infty))$.

Beweis. 1. Es sei $\sigma < \varrho$. Aus $\varrho(b) = 0$ folgt $\sigma(b) = 0$, insbesondere $\sigma(\lambda_1) = \sigma(\lambda_2)$ aus $\varrho(\lambda_1) = \varrho(\lambda_2)$; $\sigma(\lambda)$ kann also als $s(\varrho(\lambda))$ geschrieben werden, wo $s(t)$ in $0 < t < \varrho(\infty)$ eindeutig bestimmt, stetig und monoton ist. Totalstetigkeit einer monotonen Funktion $\sigma = s(\varrho)$ ist nun gleichbedeutend damit, daß sie jede (oder auch nur jede Borelsche) Nullmenge aus $0 < \varrho < \varrho(\infty)$ auf eine Nullmenge der σ -Achse abbildet. Jede B -Menge in $0 < \varrho < \varrho(\infty)$ ist Bild einer B -Menge in $-\infty < \lambda < \infty$; es ist also zu zeigen: wird eine B -Menge b der λ -Achse durch $\varrho(\lambda)$ auf eine Nullmenge abgebildet, dann auch durch $s(\varrho(\lambda)) = \sigma(\lambda)$. Dies besagt aber gerade: aus $\varrho(b) = 0$ folgt $\sigma(b) = 0$. — 2. Es sei $\sigma(\lambda) = s(\varrho(\lambda))$, s totalstetig. Dann ist

$$\sigma(\lambda) = \int_0^{\varrho(\lambda)} s'(t) dt = \int_{-\infty}^{\lambda} s'(\varrho(\mu)) d\varrho(\mu) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) d\varrho(\mu),$$

also $\sigma < \varrho$.

$\sigma < \varrho$ ist insbesondere stets dann erfüllt, wenn für passendes $p \geq 0$ und jedes Intervall i gilt $\sigma(i) \leq p \varrho(i)$; dies bedeutet sogar eine Lipschitz-Bedingung für die Funktion $s(\varrho)$ und hat zur Folge, daß für jede ϱ -meßbare Menge m auch $\sigma(m) \leq p \varrho(m)$ ist.

Sind $\varrho_1(\lambda), \varrho_2(\lambda), \dots$ \mathcal{A} -Funktionen und ist $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n(\infty) < \infty$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n(\lambda)$ gleichmäßig konvergent und $\varrho(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n(\lambda) \in \mathcal{A}$; insbesondere führt die Bildung endlicher Summen aus \mathcal{A} nicht hinaus. Es ist dann $\varrho_n(i) \leq \varrho(i)$, daher $\varrho_n < \varrho$.

Definition 4. Ein Spektralbereich (kurz \mathcal{S} -Bereich) ist eine nicht leere Teilmenge $\mathcal{s} \subseteq \mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) aus $\varrho \in \mathcal{s}$, $\sigma \in \mathcal{A}$, $\sigma < \varrho$ folgt $\sigma \in \mathcal{s}$,

b) aus $\varrho_n \in \mathcal{s}$ ($n = 1, 2, \dots$) und $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n(\infty) < \infty$ folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n(\lambda) \in \mathcal{s}$.

\mathcal{A} ist selbst ein \mathcal{S} -Bereich. Der Durchschnitt beliebig vieler \mathcal{S} -Bereiche (geschrieben: $\mathcal{s}_1 \mathcal{s}_2; \prod \mathcal{s}_n$) ist wieder ein solcher. Jeder \mathcal{S} -Bereich enthält nur ganze Äquivalenzklassen: aus $\varrho \in \mathcal{s}$, $\varrho \sim \sigma$ folgt $\sigma \in \mathcal{s}$.

Definition 5. Ist \mathcal{M} eine Teilmenge von \mathcal{A} , so heißt der Durchschnitt aller \mathcal{M} umfassenden \mathcal{S} -Bereiche der von \mathcal{M} erzeugte \mathcal{S} -Bereich und wird mit $[\mathcal{M}]$ bezeichnet. Besteht insbesondere \mathcal{M} aus einer einzigen Funktion ϱ , so heißt $[\mathcal{M}] = [\varrho]$ ein primitiver \mathcal{S} -Bereich. Der \mathcal{S} -Bereich $[0]$, der nur die Funktion 0 enthält, wird auch der leere \mathcal{S} -Bereich genannt.

Satz 8. $[\varrho]$ ist die Menge aller σ mit $\sigma < \varrho$.

Beweis. Zu zeigen ist offenbar nur dieses: ist $\sigma \in \mathcal{A}$, $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ und $\sigma_n < \varrho$, so ist auch $\sigma < \varrho$. Sei b eine \mathcal{B} -Menge, $\varrho(b) = 0$; dann ist also $\sigma_n(b) = 0$ und es ist zu zeigen $\sigma(b) = 0$. Dies folgt daraus, daß ganz allgemein $\sigma(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(b)$ ist. Um diese Gleichung zu beweisen, setze ich

$$\tau_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k, \quad \varphi_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma_k; \text{ es ist}$$

$$\varphi_n(b) \leq \varphi_n(\infty) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^{17}), \quad \tau_n + \varphi_n = \sigma, \quad \tau_n(b) = \sum_{k=1}^n \sigma_k(b);$$

$$|\sigma(b) - \sum_{k=1}^n \sigma_k(b)| \leq \varphi_n(\infty) \rightarrow 0, \quad \sigma(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(b),$$

w. z. b. w.

¹⁷⁾ Wegen $\varphi_n(\infty)$ vgl. Definition 3.

Es ist demnach $\sigma < \varrho$ bzw. $\sigma \sim \varrho$ gleichbedeutend mit $[\sigma] \subseteq [\varrho]$ bzw. $[\sigma] = [\varrho]$.

$[\varrho]$ ist die Menge der Funktionen $\sigma(\lambda) = s(\varrho(\lambda))$ mit totalstetigem monotonem s , also $\sigma(\lambda) = \int_0^{\varrho(\lambda)} f(t) dt$ mit $f(t) \geq 0$; man hat eine eindeutige Zuordnung zwischen $[\varrho]$ und der Menge der in $0 \leq t \leq \varrho(\infty)$ definierten, meßbaren und integrierbaren Funktionen $f(t) \geq 0$ (Funktionen, die nur auf einer Nullmenge verschieden sind, als identisch betrachtet). Wie spiegelt sich nun die Beziehung $\sigma_2 < \sigma_1$ für $\sigma_1, \sigma_2 \in [\varrho]$ in diesen zugeordneten Funktionen $f(t)$? Sei b_0 eine B -Menge der λ -Achse; es ist festzustellen, wann $\sigma_1(b_0) = 0$ und wann $\sigma_2(b_0) = 0$ ist. Da σ_1 und σ_2 Funktionen s_1 und s_2 von ϱ sind, kann man statt b_0 das Bild b auf der ϱ -Achse zugrunde legen, hat also $s_1(b)$ und $s_2(b)$ zu betrachten. Nun ist $s(b) = \int_b s'(t) dt$; es ist $s(b) = 0$ dann und nur dann, wenn $s'(t) = 0$ ist für fast jedes $t \in b$. $s_1(b) = 0$ wird $s_2(b) = 0$ dann und nur dann für jedes b nach sich ziehen, wenn aus $s'_1(t) = 0$ für fast jedes t folgt $s'_2(t) = 0$, d. h. wenn die Menge der t mit $s'_1(t) \neq 0$ diejenige mit $s'_2(t) \neq 0$ umfaßt¹⁸).

Definition 6. Ist $\sigma < \varrho$, $\sigma = s(\varrho)$, so sei die Menge der t mit $0 < t < \varrho(\infty)$, $s'(t) \neq 0$ mit m_σ^0 bezeichnet.

Für $\sigma_1, \sigma_2 \in [\varrho]$ ist also $\sigma_2 < \sigma_1$ gleichbedeutend mit $m_{\sigma_2}^0 \subseteq m_{\sigma_1}^{0,18}$, $\sigma_1 \sim \sigma_2$ mit $m_{\sigma_1}^0 = m_{\sigma_2}^{0,18}$. Ist $\sigma_2 < \sigma_1$ und nicht $\sigma_2 \sim \sigma_1$, so ist die Differenz von $m_{\sigma_1}^0$ und $m_{\sigma_2}^0$ keine Nullmenge, also $m(m_{\sigma_1}^0) < m(m_{\sigma_2}^0)$ ($m(m) = L$ -Maß von m). $[\sigma_1][\sigma_2] = [0]$ ist gleichbedeutend mit $m(m_{\sigma_1}^0, m_{\sigma_2}^0) = 0$.

Satz 9. Ein S -Bereich, der in einem primitiven enthalten ist, ist selbst primitiv.

Beweis. Es sei s ein S -Bereich mit $s \subseteq [\varrho]$. a sei die obere Grenze der Zahlen $m(m_\sigma^0)$ ($\sigma \in s$), und es seien $\sigma_1, \sigma_2, \dots \in s$ gewählt mit $m(m_{\sigma_n}^0) \rightarrow_\infty a$.

Wird $\sum_{n=1}^\infty m_{\sigma_n}^0 = m$ gesetzt, so ist $m(m) \geq a$. Es seien Zahlen $p_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) gewählt mit $\sum_{n=1}^\infty p_n \sigma_n(\infty) < \infty$ und es sei $\sigma = \sum_{n=1}^\infty p_n \sigma_n$. Da offenbar für $\tau, \varphi \in [\varrho]$ $m_{\tau+\varphi}^0 = m_\tau^0 + m_\varphi^{0,18}$ ist, folgt

$$m_\sigma^0 \supseteq m_{\sigma_n}^{0,18} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad m_\sigma^0 \supseteq m^{18}, \quad m(m_\sigma^0) \geq a;$$

$$\sigma \in s, \quad m(m_\sigma^0) = a.$$

Ich behaupte, daß $s = [\sigma]$ ist. Gäbe es nämlich ein $\tau \in s$, $\tau \notin [\sigma]$, so wäre $\varphi = \sigma + \tau \in s$, $\varphi > \sigma$, $\varphi \notin [\sigma]$, also $m(m_\varphi^0) > m(m_\sigma^0) = a$ (Widerspruch).

Satz 10. Ist s ein S -Bereich und $\varrho \in A$, so gibt es eine und nur eine Zerlegung $\varrho = \sigma + \varphi$ mit $\sigma \in s$, $\varphi \in A$, $[\varphi]s = [0]$.

¹⁸) Bis auf eine Lebesguesche Nullmenge.

Beweis. $\tau \in [\varrho]$ sei gewählt mit $[\tau] = [\varrho]s$ (Satz 9); es sei $m = m_\tau^s$, \bar{m} sei das Komplement von m im Intervall $0 \leq t \leq \varrho(\infty)$. Es sei $\sigma(\lambda) = s(\varrho(\lambda))$, $\varphi(\lambda) = f(\varrho(\lambda))$, wo $s(t)$ und $f(t)$ totalstetig und durch

$$s(0) = f(0) = 0, \quad s'(t) = \begin{cases} 1 & \text{auf } m, \\ 0 & \text{auf } \bar{m} \end{cases} \quad f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{auf } m \\ 1 & \text{auf } \bar{m} \end{cases}$$

erklärt sind. Dann ist $\sigma \sim \tau$, also $\sigma \in s$; $s(t) + f(t) = t$, daher $\sigma(\lambda) + \varphi(\lambda) = \varrho(\lambda)$; $[\varphi]$ ist die Menge derjenigen Funktionen $\chi(\lambda) = h(\varrho(\lambda))$, für die $h'(t) = 0$ auf m ist. Unter diesen gibt es außer 0 keine, für die $h'(t) = 0$ auf \bar{m} ist, d. h. die in $[\tau] = [\varrho]s$ liegt; also ist $[\varphi]s = [\varphi][\varrho]s = [0]$. — Die Eindeutigkeit erkennt man so: angenommen, σ und φ könnten durch σ_1 und φ_1 ersetzt werden. Da $\sigma_1 < \varrho$, $\varphi_1 < \varrho$ ist, kann jedenfalls $\sigma_1 = s_1(\varrho)$ und $\varphi_1 = f_1(\varrho)$ geschrieben und $s'_1(t)$, $f'_1(t)$ gebildet werden. Da $\sigma_1 < \tau$ ist, ist $s'_1(t) = 0$ auf \bar{m} . Wäre nicht $f'_1(t) = 0$ auf m , so sei

$$g(0) = 0, \quad g'(t) = \begin{cases} f'_1(t) & \text{auf } m \\ 0 & \text{auf } \bar{m} \end{cases}$$

und es wäre $\varphi(\lambda) = g(\varrho(\lambda)) < \varphi_1(\lambda)$, $\varphi \neq 0$, $\varphi \in s$, also $[\varphi_1]s \neq [0]$. Also ist $f'_1(t) = 0$ auf m . Dann folgt auch $s'_1(t) = 1$ auf m , $f'_1(t) = 1$ auf \bar{m} so daß $s_1 = s$, $f_1 = f$ und $\sigma_1 = \sigma$, $\varphi_1 = \varphi$ ist.

Satz 11. Ist $\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \in A$, $\sigma < \varrho$, so gibt es $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ mit $\sigma_n < \varrho_n$, $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$.

Beweis. Im Intervall $i = [0, \varrho(\infty)]$ entsprechen den Funktionen ϱ_n die Punktmengen $m_n = m_{\varrho_n}^s$ ($n = 1, 2, \dots$) und es ist $\sum_{n=1}^{\infty} m_n = i$ ¹⁸). Denn wäre $\bar{b} = i - \sum_{n=1}^{\infty} m_n$ (o. B. d. A. Borelsch) keine Nullmenge: $m(\bar{b}) = p > 0$, so gäbe es eine B -Menge b der λ -Achse, deren Bild auf der ϱ -Achse \bar{b} ist. Es ist $\varrho(b) = m(\bar{b}) = p$. Ist $\varrho_n(\lambda) = r_n(\varrho(\lambda))$, so ist $r'_n(t) = 0$ außer für $t \in m_n$, insbesondere $r'_n(t) = 0$ für $t \in \bar{b}$; daher $\varrho_n(b) = \int_b r'_n(t) dt = 0$, $\varrho(b) = \sum_n \varrho_n(b) = 0$ (Widerspruch). Es seien Mengen m'_n gewählt mit $m'_n \subseteq m_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} m'_n = \sum_{n=1}^{\infty} m_n$, jedoch paarweise fremd, z. B. $m'_n = m_n - m_n \sum_{k=1}^{n-1} m_k$. Ist $\sigma = s(\varrho)$, $\sigma_n = s_n(\varrho)$ mit $s'_n(t) = \begin{cases} s'(t) & \text{auf } m'_n \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$ so ist $\sigma_n < \varrho_n$ und $\sigma_n(\lambda) = \int_{t \in m'_n, t < \varrho(\lambda)} s'(t) dt = s(i_k \cdot m'_n)$, wenn $i_k = (0, \varrho(\lambda))$ ist; folglich, wie behauptet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(\lambda) = s(i_k \cdot \sum_n m'_n) = s(i_k) = \int_{0 < t < \varrho(\lambda)} s'(t) dt = s(\varrho(\lambda)) = \sigma(\lambda).$$

Definition 7. Ist \mathfrak{S} eine Menge von S -Bereichen s , so wird der von der Vereinigungsmenge der $s \in \mathfrak{S}$ erzeugte S -Bereich (vgl. Def. 5, S. 434) mit $\sum_{s \in \mathfrak{S}} s$ bezeichnet; entsprechend ist $s + t, \sum_{k=1}^n s_k$ erklärt.

Das Zeichen $+$ oder \sum bedeutet also nicht die Bildung der Vereinigungsmenge selbst.

Satz 12. Ist \mathfrak{S} eine Menge von S -Bereichen s , so ist $\sum_{s \in \mathfrak{S}} s$ die Menge aller Funktionen der Form $\sigma = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \sigma_s$ mit $\sigma_s \in s$ und $\sum_{s \in \mathfrak{S}} \sigma_s(\infty) < \infty$.

Beweis. Ist die soeben erklärte Menge t ein S -Bereich, so ist dies sicher der kleinste alle s enthaltende. Dazu ist also zu zeigen: 1. in t ist mit τ_1, τ_2, \dots auch $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n$ enthalten, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(\infty) < \infty$ ist — das ist nach Definition offenbar richtig; 2. in t ist mit τ auch jede Funktion $\sigma < \tau$ enthalten. Sei also $\sigma < \tau$ und $\tau = \sum_s \tau_s$ mit $\tau_s \in s$ (von selbst sind nur abzählbar viele $\tau_s \neq 0$), so ist nach Satz 11 $\sigma = \sum_s \sigma_s$ mit $\sigma_s < \tau_s \in s$, also $\sigma \in t$, w. z. b. w.

Satz 13. Sind r, s S -Bereiche, $s \subseteq r$, so gibt es einen und nur einen S -Bereich t mit $st = [0]$, $r = s + t$. t ist die Menge der $\tau \in r$ mit $[\tau]s = [0]$.

Beweis. t sei die Menge der $\tau \in r$ mit $[\tau]s = [0]$; es ist zunächst zu zeigen, daß t ein S -Bereich ist. Mit τ ist in t auch $\tau' < \tau$ enthalten. Sei $\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \in t$, $\tau_n \in t$, so ist $\tau \in r$; wäre nicht $[\tau]s = [0]$, so sei $\varphi < \tau$, $\varphi \in s$, $\varphi \neq 0$. Nach Satz 11 gäbe es $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ mit $\varphi_n < \tau_n$, $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$, $\varphi_n < \varphi$, $\varphi_n \in [\tau_n]s$, $\varphi_n = 0$, $\varphi = 0$ (Widerspruch). t ist also ein S -Bereich. $st = [0]$ ist klar. Aus $s \subseteq r$, $t \subseteq r$ folgt $s + t \subseteq r$; da jedes $\varrho \in r$ eine Zerlegung $\varrho = \sigma + \tau$ mit $\sigma \in s$, $\tau \in t$ gestattet (Satz 10), ist auch $r \subseteq s + t$, also $r = s + t$. — Ist $r = s + t'$, $t's = [0]$, so folgt zunächst $t' \subseteq t$ (nach Definition von t). Jedes $\tau \in t$ läßt sich schreiben als $\tau = \sigma + \tau'$ mit $\sigma \in s$, $\tau' \in t'$; es ist $\sigma \in s[\tau]$, $\sigma = 0$, $\tau = \tau'$, $\tau \in t'$, $t \subseteq t'$, $t = t'$.

Definition 8. Sind r, s, t S -Bereiche und ist $s + t = r$, $st = [0]$, so werde $t = r - s$ geschrieben.

Satz 14. Die S -Bereiche bilden eine Boolesche Algebra¹⁹⁾.

Beweis. Da die Addition und Multiplikation kommutativ und assoziativ sind, bilden die S -Bereiche zunächst einen Verband. Das Distributivgesetz $r(s + t) = rs + rt$ beweist man folgendermaßen: Ist $\varrho \in r(s + t)$, so ist $\varrho \in s + t$, $\varrho = \sigma + \tau$ mit passendem $\sigma \in s$, $\tau \in t$ (Satz 12); $\sigma \in [\varrho] \subseteq r$, $\sigma \in rs$, ebenso $\tau \in rt$; $\varrho = \sigma + \tau \in rs + rt$. Ist umgekehrt $\varrho \in rs + rt$, so sei $\varrho = \varphi + \psi$ mit $\varphi \in rs$, $\psi \in rt$; es folgt $\varphi \in r$, $\varphi \in s$, $\varphi \in r$; $\varphi \in s$, $\psi \in t$,

¹⁹⁾ Zum Begriff der Booleschen Algebra vgl. Köthe [5].

$\varrho \in s + t$; $\varrho \in t(s + t)$. Der Verband ist also distributiv. Offenbar ist ein Einselement, nämlich 1 , und ein Nullelement, nämlich $[0]$, vorhanden. Durch die Festsetzung $s' = 1 - s$ wird der distributive Verband zu einer Booleschen Algebra, denn es ist $s + s' = 1$, $ss' = [0]$, $s'' = s$, und aus $s \subset t$ folgt $s' \supset t'$, weil nämlich $s' = t' + (t - s)$ ist.

Definition 9. Eine Teilmenge Ψ von Elementen ψ eines S -Bereiches s heißt eine Basis von s , wenn $[\Psi] = s$ ist und für $\psi, \psi' \in \Psi$, $\psi \neq \psi'$ gilt: $\psi \neq 0$, $[\psi][\psi'] = [0]$.

Satz 15. Jeder S -Bereich s hat eine Basis Ψ ; dann und nur dann, wenn Ψ abzählbar ist, ist s primitiv.

Beweis. Ist $s = [0]$, so sei Ψ die leere Menge. Andernfalls seien die Elemente $\sigma \in s$ wohlgeordnet: $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{\alpha}, \dots$. Durch transfinite Induktion werden nicht negative Zahlen ε_{α} und S -Bereiche s_{α} definiert für alle α , für die σ_{α} vorhanden ist: s_{α} sei der von den $\varepsilon_{\beta}\sigma_{\beta}$ mit $\beta < \alpha$ erzeugte S -Bereich; es sei $\varepsilon_{\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } [\sigma_{\alpha}]s_{\alpha} = [0] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Die von

Null verschiedenen Funktionen $\varepsilon_{\alpha}\sigma_{\alpha}$ werden mit ψ_{β} bezeichnet ($\beta = 0, 1, \dots$) und bilden die Menge Ψ . Es ist $\Psi \subseteq s$, daher $[\Psi] \subseteq s$. Für $\beta \neq \alpha$ ist $[\psi_{\alpha}][\psi_{\beta}] = [0]$, denn sei $\psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha'}\sigma_{\alpha'}$, $\psi_{\beta} = \varepsilon_{\beta'}\sigma_{\beta'}$ und etwa $\beta' < \alpha'$, so ist $\psi_{\beta} = \sigma_{\beta'} \in s_{\alpha'}$ und $[\psi_{\alpha}]s_{\alpha'} = [\sigma_{\alpha'}]s_{\alpha'} = [0]$. Ψ ist also Basis von $[\Psi]$. Wäre $[\Psi] \neq s$, so sei $\sigma \in s - [\Psi]$, $\sigma \neq 0$. σ sei in der Wohlordnung von s als σ_{γ} aufgeführt. Es ist $s_{\gamma} \subseteq [\Psi]$, $[\sigma_{\gamma}][\Psi] = [0]$, $[\sigma_{\gamma}]s_{\gamma} = [0]$, $\varepsilon_{\gamma} = 1$, $\varepsilon_{\gamma}\sigma_{\gamma} = \sigma_{\gamma} \in \Psi \subseteq [\Psi]$ (Widerspruch). Damit ist die Existenz der Basis bewiesen.

Nun sei Ψ abzählbar; wenn Ψ leer oder endlich ist, sei es durch Hinzufügung von Nullen zu einer unendlichen Menge $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ erweitert. Es sei $\psi = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \psi_n$ mit passenden $p_n > 0$, so daß $\psi \in 1$ ist; dann ist $\psi_n < \psi$, $\psi_n \in [\psi]$, $\Psi \subseteq [\psi]$, $s = [\Psi] \subseteq [\psi]$; $\psi \in s$, $[\psi] \subseteq s$, $[\psi] = s$. — Sei Ψ nicht abzählbar. Wäre trotzdem $s = [\varrho]$, so entspräche jedem $\psi \in \Psi$ eine Menge $m_{\psi}^{\varrho} \subseteq (0, \varrho(\infty))$; bei $\psi, \psi' \in \Psi$, $\psi \neq \psi'$ gälte $[\psi] \neq [0]$, $[\psi'] \neq [0]$, $[\psi][\psi'] = [0]$, daher (vgl. S. 435) $m(m_{\psi}^{\varrho}) > 0$, $m(m_{\psi'}^{\varrho}) > 0$, $m(m_{\psi}^{\varrho} \cdot m_{\psi'}^{\varrho}) = 0$. Das ist für überabzählbar viele ψ, ψ' nicht möglich, da die positiven Zahlen $m(m_{\psi}^{\varrho})$ beschränkte Teilsommen haben.

Daß es nichtprimitive S -Bereiche überhaupt gibt, lehrt folgender Satz.

Satz 16. Die größte mögliche Mächtigkeit der Basis eines S -Bereiches ist \aleph .

Beweis. Es ist offenbar nur zu zeigen, daß es eine Menge Ψ von continuumvielen Funktionen $\psi \neq 0$ mit $[\psi][\psi'] = [0]$ für $\psi \neq \psi'$ gibt; Ψ ist dann Basis von $[\Psi]$. Eine höhere Mächtigkeit kann nicht auftreten, weil selbst 1 als Menge stetiger Funktionen nur die Mächtigkeit \aleph hat.

Die zum Beweise zu verwendenden Elemente $\psi_\vartheta = \psi_\vartheta(\lambda)$ ($0 < \vartheta < 1$) sind im wesentlichen die von Hellinger ([4], S. 33) definierten Funktionen $Z(\vartheta; x)$:

$$\psi_\vartheta(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \leq 0, \\ Z(\vartheta; \lambda), & 0 \leq \lambda \leq 1, \\ 1, & \lambda \geq 1. \end{cases}$$

Von ihnen zeigt Hellinger, daß für jedes $\varepsilon > 0$ und $0 < \vartheta < \vartheta_1 < 1$ bei passender Einteilung des Intervalles $\Delta = [0, 1]$ in Teilintervalle Δ_k ($k = 1, \dots, n$)

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\Delta_k Z(\vartheta; x) \cdot \Delta_k Z(\vartheta_1; x)} < \varepsilon$$

ist. Es bleibt nur noch zu zeigen: Ist für $\varrho, \sigma \in \mathcal{A}$ und jedes $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\varrho(b_k) \sigma(b_k)} < \varepsilon$$

bei passender Einteilung der reellen Achse in endlich viele fremde \mathcal{B} -Mengen b_k , so ist $[\varrho][\sigma] = [0]$. Beweis. Ist φ mit $\varphi > \varrho$, $\varphi > \sigma$ gewählt, $\varrho = \tau(\varphi)$,

$\sigma = s(\varphi)$, und $\tau(\lambda) = \int_0^{\varphi(\lambda)} \min(r'(t), s'(t)) dt$, so ist $\tau < \varrho$, $\tau < \sigma$, und $\tau = 0$ nur dann, wenn $r'(t) s'(t) \equiv 0$, also $[\varrho][\sigma] = [0]$ ist (wegen $m(m_0^r m_0^s) = 0$). Es ist aber weiter $\tau(b) \leq \varrho(b)$, $\tau(b) \leq \sigma(b)$, also $\tau(b) \leq \sqrt{\varrho(b) \sigma(b)}$,

$$\tau(\infty) = \sum_{k=1}^n \tau(b_k) \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\varrho(b_k) \sigma(b_k)} \leq \varepsilon,$$

also wirklich $\tau = 0$, $[\varrho][\sigma] = [0]$, w. z. b. w.

§ 5.

Einfaches Spektrum.

Satz 17. Jeder selbstadjungierte Operator R in \mathcal{R} gestattet eine Zerlegung $R = \sum_{\mathfrak{G}} \oplus R_{\mathfrak{G}}$ nach separablen Teilräumen \mathfrak{G} ; insbesondere kann verlangt werden, daß jedes \mathfrak{G} die Gestalt $\mathfrak{M}(x)$ hat: $\mathcal{R} = \sum_i \oplus \mathfrak{M}(x_i)$.

Beweis. Für separable Räume ist die erste Behauptung leer, die zweite bekannt²⁰⁾; für beliebige Räume folgt demnach die zweite aus der ersten, da $\mathfrak{G} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}(x_n)$ oder $\sum_{n=1}^N \oplus \mathfrak{M}(x_n)$ ist. Somit ist nur die erste Behaup-

²⁰⁾ [14], Satz 7. 4, S. 247.

tung zu beweisen. Sei Ω ein vollständiges Orthonormalsystem aus \mathfrak{R} . Ist $u \in \Omega$, so gibt es nur abzählbar viele $v \in \Omega$, die nicht zu $\mathfrak{M}(u)$ orthogonal sind; denn $\mathfrak{M}(u)$ enthält ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem, und jedes Element davon hat wiederum nur abzählbar viele Entwicklungskoeffizienten $\neq 0$ nach Ω . Ich nehme in Ω durch folgende Festsetzung eine Klasseneinteilung vor: $u \in \Omega$ und $v \in \Omega$ sollen dann und nur dann zu derselben Klasse gehören, wenn es ein $n > 0$ und Elemente $u = u_1, u_2, \dots, u_n = v \in \Omega$ gibt, so daß $\mathfrak{M}(u_k)$ zu $\mathfrak{M}(u_{k+1})$ nicht orthogonal ist²¹⁾. Dies ist offenbar eine reflexive, symmetrische und transitive Relation, die eine Einteilung in fremde Klassen liefert. Man sieht ferner: a) jede Klasse enthält nur abzählbar viele Elemente; b) gehören u und v zu verschiedenen Klassen, so ist $\mathfrak{M}(u) \perp \mathfrak{M}(v)$. Wird der von den Elementen einer Klasse aufgespannte Raum mit \mathfrak{G} , die Menge aller \mathfrak{G} mit Γ bezeichnet, so ist also $\mathfrak{R} = \sum_{\mathfrak{G} \in \Gamma} \oplus \mathfrak{G}$ und nach a) jedes \mathfrak{G} separabel. Für $u \in \Omega$, $u \in \mathfrak{G}$ ist nach b) $\mathfrak{M}(u) \subseteq \mathfrak{G}$, daher auch für $x \in \mathfrak{G}$ $\mathfrak{M}(x) \subseteq \mathfrak{G}$; dies bedeutet aber: \mathfrak{G} reduziert \mathfrak{R} , und damit ist alles bewiesen.

Dieser Satz gilt auch bei Einschluß des Punktspektrums. (Vgl. die Bemerkung am Schluß von § 3.)

Ist P_λ die Spektralschar von H , $x \in \mathfrak{R}$, $y \in \mathfrak{M}(x)$, so ist²²⁾

$|P_\lambda y|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda} |f(\mu)|^2 d|P_\mu x|^2$ mit passender ϱ -meßbarer und im Intervall $(-\infty, \infty)$ quadratisch ϱ -integrierbarer Funktion $f(\lambda)$, wo $\varrho(\lambda) = |P_\lambda x|^2$ ist; es ist also $\sigma(\lambda) = |P_\lambda y|^2 < \varrho(\lambda)$. Ist umgekehrt $\sigma < \varrho$, so gibt es ein $f(\lambda)$ mit $\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} |f(\mu)|^2 d\varrho(\mu)$ und ein $y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dP_\lambda x$ ²³⁾ in $\mathfrak{M}(x)$ mit $|P_\lambda y|^2 = \sigma(\lambda)$. Also ist die Gesamtheit der Funktionen $\sigma(\lambda) = |P_\lambda y|^2$ ($y \in \mathfrak{M}(x)$) der S -Bereich $[\varrho]$ ($\varrho(\lambda) = |P_\lambda x|^2$). Ist $\mathfrak{M}(x) = \mathfrak{R} = \mathfrak{H}$, so ist nach Satz 2b durch die Äquivalenzklasse von ϱ , also auch durch $[\varrho]$, der unitärinvariante Charakter von H völlig bestimmt. $[\varrho]$ heiße „der S -Bereich von H “. Es gibt also nur einen einzigen Typ selbstadjungierter Operatoren in \mathfrak{H} mit einfachem Spektrum und dem S -Bereich $[\varrho]$; er werde mit $E_{[\varrho]}$ bezeichnet. Zu jedem $\varrho \in \Lambda$ gibt es wirklich den Typ $E_{[\varrho]}$, denn für jede M -Funktion ϱ (vgl. S. 424) kann der auf S. 432 genannte Operator H_1 in $\mathfrak{L}_2(\varrho)$ gebildet werden, der $f(\lambda)$ in $\lambda f(\lambda)$ überführt, und dieser hat offenbar die gewünschten Eigenschaften. Übrigens werden im Anhang II Vertreter aller Typen mit einfachem Spektrum konstruiert.

²¹⁾ Aus $x \perp \mathfrak{M}(y)$ folgt stets $\mathfrak{M}(x) \perp \mathfrak{M}(y)$.

²²⁾ [14], Satz 6. 2, S. 226.

²³⁾ Vgl. S. 431 und Anm. ¹⁵⁾.

Damit sind die Typen selbstadjungierter Operatoren in \mathfrak{H} mit einfachem (Strecken-) Spektrum den primitiven S -Bereichen eindeutig zugeordnet.

Nach Satz 17 genügt jeder selbstadjungierte Operator H einer Äquivalenz $H \sim \sum_{i \in \mathfrak{S}} \oplus E_{[q_i]}$, wie sich aus $H = \sum_{i \in \mathfrak{S}} \oplus H_{\mathfrak{M}(x_i)}$ ergibt (Def. 2 ist also stets sinnvoll erkannt). \mathfrak{R} ist die Menge aller $y = \sum_i y_i$ mit $y_i \in \mathfrak{M}(x_i)$, $\sum_i |y_i|^2 < \infty$; die Menge aller Funktionen $|P_1 y|^2$ ($y \in \mathfrak{R}$) ist also die Menge aller $\sum_i |P_1 y_i|^2$ mit $y_i \in \mathfrak{M}(x_i)$, $\sum_i |y_i|^2 < \infty$ oder die Menge der $\sum_i \sigma_i(\lambda)$ mit $\sigma_i < \varrho_i$, $\sum_i \sigma_i(\infty) < \infty$. Das aber ist gerade der S -Bereich $\sum_i [\varrho_i]$ (Satz 12). So kann man folgende Definition aussprechen:

Definition 10. Die Menge aller Funktionen $|P_1 y|^2$ ($y \in \mathfrak{R}$) heißt der S -Bereich des Operators H .

Er ist natürlich unitärinvariant, man kann also von dem S -Bereich eines Typs sprechen. In \mathfrak{H} ist er stets primitiv, da es dort ein x gibt mit $y \perp x$ für jedes $y \in \mathfrak{H}$.

Satz 18. Ist $|P_1 x|^2 = \varrho(\lambda)$, $|P_1 y|^2 = \sigma(\lambda)$, $[\varrho][\sigma] = [0]$, so ist $\mathfrak{M}(x) \perp \mathfrak{M}(y)$.

Beweis. Ich zerlege y in Komponenten: $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in \mathfrak{M}(x)$, $y_2 \perp \mathfrak{M}(x)$. Es folgt $\mathfrak{M}(y_1) \subseteq \mathfrak{M}(x)$, $\mathfrak{M}(y_2) \perp \mathfrak{M}(y_1)^{21}$,

$$\sigma = |P_1 y|^2 = |P_1 y_1|^2 + |P_1 y_2|^2 = \sigma_1 + \sigma_2;$$

$$\sigma_1 < \sigma, \quad \sigma_1 < \varrho, \quad \sigma_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad y = y_2, \quad \mathfrak{M}(y) \perp \mathfrak{M}(x).$$

Zur praktischen Gewinnung des S -Bereiches eines Operators kann folgender Satz dienen.

Satz 19. Ist \mathfrak{E} eine Grundmenge in \mathfrak{R}^{24} , so erzeugen die Funktionen $|P_1 x|^2$ mit $x \in \mathfrak{E}$ den S -Bereich von H .

Beweis. Sei s der S -Bereich von H , t der von den $|P_1 x|^2$ erzeugte, und sei $t \neq s$; ich wähle $\sigma \in s - t$, $\sigma \neq 0$. Dann gibt es $y \in \mathfrak{R}$ mit $|P_1 y|^2 = \sigma(\lambda)$; nach Satz 18 ist $y \perp x$ für $x \in \mathfrak{E}$, $y \perp \mathfrak{R}$ (Widerspruch).

Satz 20. Zu jedem S -Bereich s gibt es genau einen Typ E_s mit einfachem Spektrum und dem S -Bereich s . Ist $t = \sum_{s \in \mathfrak{S}} s$ und sind die s paarweise fremd²⁵), so ist $E_t = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \oplus E_s$.

Beweis. Ich zeige zunächst, daß zwei Operatoren H in \mathfrak{R} und H' in \mathfrak{R}' mit einfachem Spektrum und gleichem S -Bereich s unitär äquivalent sind. Dazu sei $\mathcal{P} = \{\psi\}$ eine Basis von s . Ich wähle Elemente $x_\psi \in \mathfrak{R}$, $x'_\psi \in \mathfrak{R}'$ mit $|P_1 x_\psi|^2 = |P'_1 x'_\psi|^2 = \psi(\lambda)$ für $\psi \in \mathcal{P}$; dann ist nach Satz 18 $\mathfrak{M}(x_\psi) \perp \mathfrak{M}(x_{\psi'})$ und entsprechend sinngemäß $\mathfrak{M}'(x'_\psi) \perp \mathfrak{M}'(x'_{\psi'})$ für

²⁴) D. h.: Liegt die lineare Hülle von \mathfrak{E} überall dicht in \mathfrak{R} ; vgl. [15], S. 85.

²⁵) D. h. $s s' = [0]$ für $s \neq s'$.

$\psi \neq \psi'$. Es ist $H_{\mathfrak{M}(x_\psi)} \sim E_{[\psi]} \sim H'_{\mathfrak{M}(x'_{\psi'})}$ ^{25a)}. Ist $\mathfrak{R}_1 = \sum_{\psi} \oplus \mathfrak{M}(x_\psi)$, $\mathfrak{R}'_1 = \sum_{\psi'} \oplus \mathfrak{M}'(x'_{\psi'})$, so folgt $H_{\mathfrak{R}_1} \sim \sum_{\psi} \oplus E_{[\psi]} \sim H'_{\mathfrak{R}'_1}$. Sobald gezeigt ist $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}$ (und damit ebenso $\mathfrak{R}'_1 = \mathfrak{R}'$), folgt $H \sim H'$. Nun hat $H_{\mathfrak{R}_1}$ den S -Bereich s ; wäre $\mathfrak{R}_1 \neq \mathfrak{R}$, so sei $y \neq 0$, $y \in \mathfrak{R}$, $y \perp \mathfrak{R}_1$; es ist $|P_1 y|^2 = \sigma(\lambda) \in s$, es gäbe also $x \in \mathfrak{R}_1$ mit $|P_1 x| = |P_1 y|$, $\mathfrak{M}(x) \perp \mathfrak{M}(y)$. Hieraus folgt nach dem ersten Kriterium (Satz 6) Mehrfachheit des Spektrums (Widerspruch). Also ist $H \sim H'$, d. h. für Operatoren mit einfachem Spektrum bildet der S -Bereich schon ein vollständiges Invariantensystem. — Es ist zu zeigen, daß E_s zu gegebenem s wirklich existiert (vgl. Anhang II). Dazu bilde ich zu s wie oben eine Basis $\Psi = \{\psi\}$ und einen Raum $\mathfrak{R} = \sum_{\psi \in \Psi} \oplus \mathfrak{S}_\psi$ (\mathfrak{S}_ψ Hilbertsch), bilde in jedem Teilraum \mathfrak{S}_ψ einen Operator $H_\psi \sim E_{[\psi]}$ und definiere H durch $H = \sum_{\psi} \oplus H_\psi$. H hat den S -Bereich s ; zu beweisen ist, daß H einfaches Spektrum hat. Wäre dies nicht der Fall, so sei nach Satz 6 $x, y \neq 0$ gewählt mit

$$|P_1 x|^2 = |P_1 y|^2 = \varrho(\lambda), \quad \mathfrak{M}(x) \perp \mathfrak{M}(y).$$

$[\varrho]$ hat mit einem der $[\psi]$ einen von $[0]$ verschiedenen Durchschnitt; es sei etwa $\chi \in \Psi$, $[\varrho][\chi] \neq [0]$, $0 \neq \varphi \in [\varrho][\chi]$. Ich wähle $x' \in \mathfrak{M}(x)$, $y' \in \mathfrak{M}(y)$ mit $|P_1 x'|^2 = |P_1 y'|^2 = \varphi(\lambda)$; dann ist $\mathfrak{M}(x') \perp \mathfrak{M}(y')$, $x' \neq 0$. Zerlegt man x' und y' in Komponenten nach den Räumen \mathfrak{S}_ψ , so findet man, daß nur in \mathfrak{S}_χ Komponenten $\neq 0$ auftreten können, da sonst $[\varphi]$ mit einem der $[\psi]$ ($\psi \neq \chi$) einen von $[0]$ verschiedenen Durchschnitt hätte. Also ist $x' \in \mathfrak{S}_\chi$, $y' \in \mathfrak{S}_\chi$; es folgt, daß $H_{\mathfrak{S}_\chi} = H_\chi$ mehrfaches Spektrum hat (Widerspruch). H hat also einfaches Spektrum und ist ein Vertreter des Typs E_s . — Für jede Basis Ψ von t gilt $E_t = \sum_{\psi \in \Psi} \oplus E_{[\psi]}$; ist Ψ_s eine Basis von s , so ist nach den Voraussetzungen die Vereinigungsmenge $\Psi = \sum_s \Psi_s$ eine Basis von t und es wird

$$E_t = \sum_{\psi \in \Psi} \oplus E_{[\psi]} = \sum_s \oplus \left(\sum_{\psi \in \Psi_s} \oplus E_{[\psi]} \right) = \sum_s \oplus E_s,$$

wie behauptet.

Für Einfachheit des Spektrums haben wir eine neue Bedingung:

Satz 21. (Zweites Kriterium.) *Das Spektrum von H ist dann und nur dann einfach, wenn bei einer (und dann bei jeder) Zerlegung $\mathfrak{R} = \sum_i \oplus \mathfrak{M}(x_i)$ die S -Bereiche $[[P_1 x_i]^2]$ paarweise fremd sind.*

Unter den durch s festgelegten Invarianten eines Operators H mit $H \sim E_s$ befindet sich auch die Dimensionszahl des Definitionsbereiches von H bzw. seiner abgeschlossenen Hülle. Sie ist gleich κ_0 mal der Mächtigkeit einer beliebigen Basis von s . Ist also s nicht primitiv, so sind alle Basen von s

^{25a)} Für die Schreibweise $A \sim E$ vgl. S. 428.

gleichmächtig. Insbesondere hat jede Basis von A \aleph Elemente. Ein Operator mit einfachem Spektrum ist in \mathfrak{R}^{\aleph} , aber in keinem höherdimensionalen Raume möglich — in Analogie zum Punktspektrum (S. 430) und im Gegensatz zur alten Def. 1a.

§ 6.

Spektralprojektoren.

Satz 22. Sind s und t S -Bereiche mit $s + t = A$, $st = [0]$, so bilden die $x \in \mathfrak{R}$ mit $|P_s x|^2 \in s$ und die $y \in \mathfrak{R}$ mit $|P_t y|^2 \in t$ Unterräume \mathfrak{R}_s bzw. \mathfrak{R}_t mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_s \oplus \mathfrak{R}_t$. Die Komponenten, in die z nach \mathfrak{R}_s und \mathfrak{R}_t zerfällt, liegen in $\mathfrak{M}(z)$.

Beweis. Die Mengen der x bzw. y mögen \mathfrak{R}_s bzw. \mathfrak{R}_t heißen. Sicher ist $\mathfrak{R}_s \perp \mathfrak{R}_t$ (Satz 18), daher auch $\tilde{\mathfrak{R}}_s \perp \tilde{\mathfrak{R}}_t$, wenn $\tilde{\mathfrak{M}}$ der von \mathfrak{M} aufgespannte Teilraum ist. Sofern jedes $z \in \mathfrak{R}$ eine Zerlegung $z = x + y$, $x \in \mathfrak{R}_s$, $y \in \mathfrak{R}_t$ zuläßt, ist die erste Behauptung bewiesen, denn es ist dann $\tilde{\mathfrak{R}}_s \oplus \tilde{\mathfrak{R}}_t = \tilde{\mathfrak{R}}$, und da bei Komponentenzerlegung nach $\tilde{\mathfrak{R}}_s$ und $\tilde{\mathfrak{R}}_t$ stets solche Komponenten erhalten werden, die schon in \mathfrak{R}_s bzw. in \mathfrak{R}_t liegen, ist $\tilde{\mathfrak{R}}_s = \mathfrak{R}_s$, $\tilde{\mathfrak{R}}_t = \mathfrak{R}_t$. Nun sei $|P_s z|^2 = \varrho(\lambda)$, $[\varrho]s = [\sigma]$, $[\varrho]t = [\tau]$, dann ist $H_{\mathfrak{M}(z)} \sim E_{[\varrho]} = E_{[\sigma]} \oplus E_{[\tau]}$ (Satz 20), also $\mathfrak{M}(z) = \tilde{\mathfrak{R}} \oplus \mathfrak{G}$ mit $H_{\tilde{\mathfrak{R}}} \sim E_{[\sigma]}$, $H_{\mathfrak{G}} \sim E_{[\tau]}$; $\tilde{\mathfrak{R}} \subseteq \mathfrak{R}_s$, $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{R}_t$; $z = x + y$, $x \in \tilde{\mathfrak{R}} \subseteq \mathfrak{R}_s$, $y \in \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{R}_t$; zudem $x \in \mathfrak{M}(z)$, $y \in \mathfrak{M}(z)$, w. z. b. w.

Durch die Zuordnung $Pz = x$ wird also ein Projektor P erklärt, der durch H und s bestimmt ist.

Definition 11. Zu jedem S -Bereich s wird (bei festem H) ein „Spektralprojektor“ P_s erklärt als der nach Satz 22 zum Unterraum \mathfrak{R}_s gehörige Projektor. Die Gesamtheit der Spektralprojektoren von H heißt die erweiterte Spektralschar von H .

Es wird sich sofort zeigen, daß diese erweiterte Spektralschar im Hilbertschen Raume mit der früher (§ 1, 4) definierten übereinstimmt.

Satz 23. Ein Projektor P ist dann und nur dann mit jedem mit H vertauschbaren beschränkten Operator vertauschbar, wenn $P = P_s$ mit passendem s ist.

Satz 24. (Drittes Kriterium.) Das Spektrum von H ist dann und nur dann einfach, wenn je zwei mit H vertauschbare beschränkte Operatoren untereinander vertauschbar sind.

Beweis von Satz 23. 1. Es sei $P \nabla B$ (vgl. § 1.4) für jedes B mit $B \nabla H$; es gilt $P \nabla P_s$, $P \nabla H$. Es sei $Px = x$, $Py = 0$; ich zeige: $[|P_s x|^2][|P_s y|^2] = [0]$. Sonst gäbe es nämlich $x_1 \in \mathfrak{M}(x)$ und $y_1 \in \mathfrak{M}(y)$ mit $|P_s x_1|^2 = |P_s y_1|^2$, $x_1 \neq 0$, und es wäre $H_{\mathfrak{M}(x_1)} \sim H_{\mathfrak{M}(y_1)}$. Durch die isometrische Abbildung U_0

werde diese Äquivalenz vermittelt: $U_0 \mathfrak{M}(x_1) = \mathfrak{M}(y_1)$; $U_0 P_1 u = P_1 U_0 u$ für $u \in \mathfrak{M}(x_1)$. Durch die Festsetzung $U_0 v = U_0^{-1} v$ für $v \in \mathfrak{M}(y_1)$, $U_0(u+v) = U_0 u + U_0 v$ wird U_0 ein unitärer Operator in $\mathfrak{M}(x_1) \oplus \mathfrak{M}(y_1)$; durch $U_0 z = z$ für $z \in \mathfrak{L}$ (\mathfrak{L} das orthogonale Komplement zu $\mathfrak{M}(x_1) \oplus \mathfrak{M}(y_1)$ in \mathfrak{H}), $U = U_0 \oplus U_0$ wird ein unitärer Operator U in \mathfrak{H} erklärt. Dieser ist mit H , aber nicht mit P vertauschbar, gegen die Voraussetzung. Es ist also $[|P_1 x|^2] [|P_1 y|^2] = [0]$, d. h. die S -Bereiche von $H_P \mathfrak{H}$ und $H_{(1-P)} \mathfrak{H}$ sind fremd. Hat $H_P \mathfrak{H}$ den S -Bereich s , so ist $P = P_s$. 2. Es sei $B \nabla H$; zu zeigen: $B \nabla P_s$. Es ist $B^* \nabla H^* = H$, $S = B + B^* \nabla H$, $T = i(B - B^*) \nabla H$. Sobald gezeigt ist, daß die beschränkten Hermiteschen Operatoren S und T , wenn mit H , dann auch mit P vertauschbar sind, folgt dasselbe für B^* und B . Ist nun Q_i die Spektralschar z. B. von S , so ist $Q_i \nabla H$; wenn für jeden Projektor Q aus $Q \nabla H$ folgt: $Q \nabla P_s$, kann man von $S \nabla H$ auf $S \nabla P_s$ schließen. Also nur dies ist zu beweisen: ist Q Projektor, $Q \nabla H$, so ist $Q \nabla P_s$. $Q \nabla H$ bedeutet: in $Q \mathfrak{H}$ ist mit x auch $\mathfrak{M}(x)$ enthalten. $Q \nabla P_s$ bedeutet: in $Q \mathfrak{H}$ ist mit x auch $P_s x$ enthalten. Daß aber $P_s x \in \mathfrak{M}(x)$ ist, folgt aus Satz 22.

Beweis von Satz 24. 1. Das Spektrum von H sei mehrfach. Ich wähle x, y nach dem ersten Kriterium und konstruiere wie oben (Beweis 23, 1) einen unitären Operator U , der mit H vertauschbar ist, aber $\mathfrak{M}(x)$ in $\mathfrak{M}(y)$ überführt und daher nicht mit dem zu $\mathfrak{M}(x)$ gehörigen Projektor P vertauschbar ist, der doch mit H vertauschbar ist. — 2. Das Spektrum von H sei einfach, es sei $B \nabla H, G \nabla H$; zu zeigen: $B \nabla G$. Wie oben (Beweis 23, 2) kann B o. B. d. A. zunächst als Hermitescher Operator S , dann als Projektor Q angenommen werden. Die S -Bereiche von $H_Q \mathfrak{H}$ und $H_{(1-Q)} \mathfrak{H}$ müssen nun fremd sein, da man sonst — wie oben, Beweis 23, 1 — $x_1 \in Q \mathfrak{H}, y_1 \in (1-Q) \mathfrak{H}$ mit $|P_1 x| = |P_1 y|$ finden würde (Kriterium 1). Also ist Q Spektralprojektor von H , also nach Satz 23 $Q \nabla G$.

Satz 23 in Verbindung mit einer Bemerkung auf S. 427 bringt die neue Definition (11) mit der alten in Einklang. — Das dritte Kriterium würde in einer Ausdrucksweise v. Neumanns ([9], S. 405) so lauten: „Das Spektrum ist einfach, wenn der Ring $(H)'$ Abelsch ist“, oder: „... wenn $(H)' = (H)''$ ist“. Nach [10] kann man hierfür auch sagen: „... wenn jeder mit H vertauschbare Operator eine Funktion von H ist“, diese letzte Formulierung ist jedoch nur für § gültig.

Satz 25. Ist \mathfrak{S} eine Menge von S -Bereichen s und $t = \prod_{s \in \mathfrak{S}} s$, so gilt $P_t = \prod_{s \in \mathfrak{S}} P_s$. Sind außerdem die $s \in \mathfrak{S}$ paarweise fremd und ist $r = \sum_{s \in \mathfrak{S}} s$, so ist $P_r = \sum_{s \in \mathfrak{S}} P_s$.

Beweis. Da die P_s sämtlich miteinander vertauschbar sind, ist im ersten Falle nur zu zeigen, daß der Raum $P_t \mathfrak{H}$ der Durchschnitt aller $P_s \mathfrak{H}$ ($s \in \mathfrak{S}$) ist. Das ist klar, da P_s die Menge der $x \in \mathfrak{H}$ mit $|P_s x|^2 \in s$ ist. — Stets ist $P_s + P_{s-s} = 1$ (Def. 11). Ist $s s' = [0]$, so ist $P_s P_{s'} = P_{[0]} = 0$.

Es ist also $\sum_{s \in \mathfrak{S}} P_s$ ein Projektor und $1 - \sum_{s \in \mathfrak{S}} P_s = \prod_{s \in \mathfrak{S}} (1 - P_s) = \prod P_{A-s}$,
 $= P_{\prod (A-s)}$. Nun ist $A - r = A - \sum s = \prod (A - s)$, daher $1 - \sum P_s$
 $= P_{A-r} = 1 - P_r$, w. z. b. w.

Um einen Überblick über die erweiterte Spektralschar zu gewinnen, wird man fragen, ob und wann zu verschiedenen S -Bereichen s, t verschiedene Projektoren P_s, P_t gehören. Hat H den S -Bereich r , so hat offenbar H_{P_s} den S -Bereich sr ; dann und nur dann, wenn $sr = tr$ ist, ist $P_s = P_t (= P_{sr})$. Hat insbesondere die Basis von r kontinuumviele Elemente, so gibt es 2^{\aleph} wirklich verschiedene Spektralprojektoren; ist $r = A$, so ist die Zuordnung zwischen den S -Bereichen und der Spektralschar von H eineindeutig. Wird für vertauschbare Projektoren P, Q die Verknüpfung $\dot{+}$ durch $P \dot{+} Q = P + Q - PQ$ erklärt, so bildet die Spektralschar von H mit den Verknüpfungen $+$ und eine Boolesche Algebra, auf die zufolge Satz 25 die in Satz 14 genannte Boolesche Algebra durch die Zuordnung $s \rightarrow P_s$ homomorph, im Falle $r = A$ sogar isomorph abgebildet ist.

§ 7.

Invarianten im allgemeinen Fall.

Nachdem es gelungen ist, die Typen von einfachem Spektrum durch ihre S -Bereiche zu charakterisieren und dadurch eine Übersicht über sie zu gewinnen, wird man erwarten, daß beliebige Typen durch gewisse S -Bereiche und außerdem Vielfachheiten gekennzeichnet sind.

Definition 12. H hat „durchweg gleiche Vielfachheit“, wenn eine Zerlegung $H = \sum_i H_i$ in Operatoren H_i möglich ist, die sämtlich von einfachem Spektrum und untereinander unitär äquivalent sind.

Satz 26. Die Typen der Operatoren H von durchweg gleicher Vielfachheit (unter Fortlassung von $E_{\{0\}}$) sind folgendermaßen durch ihre Vielfachheit $\mathfrak{B}(H) = n$ und ihren S -Bereich s gekennzeichnet: Ist $\mathfrak{I} = \{i\}$ eine Indizesmenge der Mächtigkeit n , $H_i \sim E_s$ ($i \in \mathfrak{I}$), so ist $H \sim \sum_{i \in \mathfrak{I}} H_i$. Die Typen E von durchweg gleicher Vielfachheit sind den Paaren (s, n) ($s \neq [0]$, $n \neq 0$) ein-eindeutig zugeordnet; Schreibweise: $E = n \times E_s$ ²⁶⁾.

Beweis. Zu beweisen ist nur: Ist $H = \sum_{i \in \mathfrak{I}} H_i$, $H_i \sim E_s$, n die Mächtigkeit von \mathfrak{I} , so ist $\mathfrak{B}(H) = n$. Denn dann liefert das angegebene Verfahren, von (s, n) ausgehend, eindeutig einen Typ der gewünschten Eigenschaft und von hier eindeutig s und n zurück. Sei nun die Vielfachheit von H nicht n , also $\mathfrak{B}(H) < n$, so gäbe es eine Zerlegung $H = \sum_{i \in \mathfrak{I}'} H'_i$ mit $\mathfrak{B}(H'_i) = 1$

²⁶⁾ Vgl. § 2, S. 429.

($t \in \mathfrak{I}'$), wo \mathfrak{I}' eine Mächtigkeit $n' < n$ hätte. Es sei $\sigma \in \mathfrak{s}$, $\sigma \neq 0$, dann ist $P_{[\sigma]} \neq 0$. Die Teilräume \mathfrak{R} und \mathfrak{R}' von \mathfrak{R} , die zu H bzw. H' gehören, reduzieren H und daher $P_{[\sigma]}$. In der Gleichung $\sum_{t \in \mathfrak{I}} \oplus H_t = \sum_{t \in \mathfrak{I}'} \oplus H'_t$ betrachte ich nur die in $P_{[\sigma]} \mathfrak{R}$ liegenden Teile: $\sum_{t \in \mathfrak{I}} \oplus T_t = \sum_{t \in \mathfrak{I}'} \oplus T'_t$; dabei ist $T_t \sim E_{[\sigma]}$, $T'_t \sim E_{[\sigma]}$ mit $\sigma_t < \sigma$. Der allgemeine Fall ist also auf den Spezialfall primitiven \mathcal{S} -Bereiches $\mathfrak{s} = [\sigma]$ zurückgeführt. Ist nun $n > \aleph_0$, so ergibt sich ein Widerspruch, da die zu $\sum_{t \in \mathfrak{I}} \oplus T_t$ gehörige Dimensionszahl $n_{\aleph_0} = n$, die zu $\sum_{t \in \mathfrak{I}'} \oplus T'_t$ gehörige aber n'_{\aleph_0} , also kleiner als n ist. Ist $n \leq \aleph_0$,

so hat man einen Operator im Hilbertschen Raum: $T = \sum_{t=1}^n \oplus T_t = \sum_{t=1}^{n'} \oplus T'_t$.

Die erste Zerlegung ist eine solche im Sinne von Satz 1a, wobei überdies die nicht verschwindenden x_t sämtlich einander äquivalent sind; daher ist nach früheren Überlegungen (S. 432/433) $n = \mathfrak{B}(T)$ und die zweite Zerlegung mit $n' < n$ unmöglich. Die Annahme $\mathfrak{B}(H) < n$ führt also zum Widerspruch.

Aus formalen Gründen sollen auch $n \times E_{[0]}$ und $0 \times E_s$ zugelassen werden als Bezeichnungen für den Typ $E_{[0]}$ (in \mathfrak{R}^0).

Wenn es gelingt, einen Operator in Teile von durchweg gleicher Vielfachheit mit fremden \mathcal{S} -Bereichen zu zerlegen, so wird das der Zerlegung eines Punktspektrums in Teilmengen entsprechen, deren jeder eine bestimmte Vielfachheit zukommt. Teile mit gleicher Vielfachheit können dabei natürlich zusammengefaßt werden.

Satz 27. Ist \mathfrak{S} eine Menge von paarweise fremden nicht leeren \mathcal{S} -Bereichen \mathfrak{s} mit $\sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{s} = A$, ist jedem $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ eine Kardinalzahl $n(\mathfrak{s})$ zugeordnet und $n(\mathfrak{s}) \neq n(\mathfrak{s}')$ für $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{s}'$ und besteht die Beziehung $H \sim \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \oplus (n(\mathfrak{s}) \times E_{\mathfrak{s}})$, so ist \mathfrak{S} und die Zuordnung $n(\mathfrak{s})$ durch H eindeutig bestimmt.

Beweis. Angenommen, es sei noch eine zweite Zerlegung \mathfrak{I} gegeben und Zahlen $p(t)$ für $t \in \mathfrak{I}$ mit $H \sim \sum_{t \in \mathfrak{I}} \oplus (p(t) \times E_t)$. \mathfrak{U} sei die Menge der nicht leeren unter den \mathcal{S} -Bereichen $\mathfrak{s}t$ ($\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$, $t \in \mathfrak{I}$); es sei für $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}t \in \mathfrak{U}$ $n(\mathfrak{r}) = n(\mathfrak{s})$, $p(\mathfrak{r}) = p(t)$. Es ist für $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$

$$\mathfrak{s} = \sum_{\substack{\mathfrak{r} \in \mathfrak{U} \\ n(\mathfrak{r}) = n(\mathfrak{s})}} \mathfrak{r}, \quad n(\mathfrak{s}) \times E_{\mathfrak{s}} = \sum_{\substack{\mathfrak{r} \in \mathfrak{U} \\ n(\mathfrak{r}) = n(\mathfrak{s})}} \oplus (n(\mathfrak{r}) \times E_{\mathfrak{r}})$$

und entsprechend für $t \in \mathfrak{I}$

$$t = \sum_{\substack{\mathfrak{r} \in \mathfrak{U} \\ p(\mathfrak{r}) = p(t)}} \mathfrak{r}, \quad p(t) \times E_t = \sum_{\substack{\mathfrak{r} \in \mathfrak{U} \\ p(\mathfrak{r}) = p(t)}} \oplus (p(\mathfrak{r}) \times E_{\mathfrak{r}}),$$

$$\sum_{\mathfrak{r} \in \mathfrak{U}} \oplus (n(\mathfrak{r}) \times E_{\mathfrak{r}}) \sim H \sim \sum_{t \in \mathfrak{I}} \oplus (p(t) \times E_t),$$

also, wenn man den in $P_t \mathfrak{R}$ liegenden Abschnitt von H betrachtet,

$$n(t) \times E_t = p(t) \times E_t, \quad n(t) = p(t).$$

Aus $st \neq [0]$ folgt also $n(s) = p(t)$; man erkennt, daß \mathfrak{S} und \mathfrak{T} identisch sind und für $s \in \mathfrak{S}$ $n(s) = p(s)$ ist, w. z. b. w.

Treffen auf H die Voraussetzungen des Satzes 27 zu, hat also der zu H gehörige Typ die Gestalt $E = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \oplus (n(s) \times E_s)$, so sage ich, daß E in der Normalform vorliegt. Jeder Typ läßt sich auf höchstens eine Art in die Normalform bringen; daß die als eindeutig erwiesene Darstellung stets existiert, soll nun bewiesen werden. Dazu gehe ich von folgender Überlegung aus.

H habe den S -Bereich \mathfrak{s} ; dann gibt es einen Unterraum $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{R}$ mit $H_{\mathfrak{F}} \sim E_{\mathfrak{s}}$. Denn man wähle eine Basis $\mathcal{P} = \{\psi\}$ von \mathfrak{s} und Elemente $x_{\psi} \in \mathfrak{R}$ mit $|P_{\lambda} x_{\psi}|^2 = \psi(\lambda)$ und setze $\mathfrak{F} = \sum_{\psi \in \mathcal{P}} \oplus \mathfrak{R}(x_{\psi})$. Hierauf beruht der folgende Satz.

Satz 28. Es gibt eine wohlgeordnete Zerlegung $H = \sum_{\alpha < \theta} \oplus H_{\alpha}$ mit $H_{\alpha} \sim E_{s_{\alpha}}$, $s_{\alpha} \subseteq s_{\beta}$ für $\beta < \alpha$.

Beweis. Durch transfinite Induktion nach α beweise ich folgendes: Es gibt zu jeder Ordnungszahl $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ einen Projektor P_{α} mit folgenden Eigenschaften:

1. $P_{\alpha} P_{\beta} = 0$ ($\beta < \alpha$);
2. $P_{\alpha} v H$;
3. $\mathfrak{B}(H_{P_{\alpha} \mathfrak{R}}) \leq 1$;
4. $s_{\alpha} \subseteq s_{\beta}$ für $\beta < \alpha$, wenn s_{α} der S -Bereich von $H_{P_{\alpha} \mathfrak{R}}$ ist;
5. s_{α} ist der S -Bereich von $H_{Q_{\alpha} \mathfrak{R}}$, wo $Q_{\alpha} = \prod_{\beta < \alpha} (1 - P_{\beta})$ ist.

Seien die P_{β} für $\beta < \alpha$ vorhanden. Nach Induktionsvoraussetzung 1 und 2 ist $Q_{\alpha} = \prod_{\beta < \alpha} (1 - P_{\beta}) = 1 - \sum_{\beta < \alpha} P_{\beta}$ ein Projektor mit $Q_{\alpha} v H$. Da $Q_{\alpha} \subseteq Q_{\beta}$ ($\beta < \alpha$) ist, ist der S -Bereich von $H_{Q_{\alpha} \mathfrak{R}}$, den ich s_{α} nenne, in dem von $H_{Q_{\beta} \mathfrak{R}}$ enthalten. Nun wähle ich P_{α} so, daß $P_{\alpha} \leq Q_{\alpha}$, $P_{\alpha} v H$ und $H_{P_{\alpha} \mathfrak{R}} \sim E_{s_{\alpha}}$ ist, was nach obiger Bemerkung möglich ist. Damit ist 1, 2, 3 befriedigt und s_{α} der S -Bereich von $H_{P_{\alpha} \mathfrak{R}}$, also 4 erfüllt, 5 nach Konstruktion ebenfalls. Damit ist die Induktion geschlossen.

Da $H_{P_{\alpha} \mathfrak{R}} \sim E_{s_{\alpha}}$ und $s_{\alpha} \subseteq s_{\beta}$ für $\beta < \alpha$ ist (nach 3 und 4), folgt aus $P_{\alpha} \neq 0$: $P_{\beta} \neq 0$ für $\beta < \alpha$. Dies ist nicht für beliebiges α möglich, α kann unter dieser Bedingung die der Dimension von \mathfrak{R} entsprechende Zahlenklasse nicht überschreiten. Es gibt ein kleinstes α mit $P_{\alpha} = 0$, dies sei mit θ bezeichnet. Dann ist also $P_{\theta} = 0$, $P_{\alpha} \neq 0$ für $\alpha < \theta$; es muß $Q_{\theta} = 0$, also $\sum_{\alpha < \theta} P_{\alpha} = 1$ sein. Wird $H_{P_{\alpha} \mathfrak{R}} = H_{\alpha}$ gesetzt, so folgt $H = \sum_{\alpha < \theta} \oplus H_{\alpha}$, $H_{\alpha} \sim E_{s_{\alpha}}$, $s_{\alpha} \subseteq s_{\beta}$ für $\beta < \alpha$, w. z. b. w.

Dieser Satz liefert, obwohl analog zu Satz 2a, noch kein Invariantensystem, denn die s_α sind, wie man leicht sieht, im allgemeinen durch H nicht eindeutig bestimmt.

Satz 29. *Jeder Typ läßt sich auf die Normalform bringen, d. h. zu H gibt es stets eine Zerlegung \mathfrak{S} von Λ und eine Funktion $n(s)$ mit den in Satz 27 genannten Eigenschaften.*

Beweis. Nach dem vorigen Satze gibt es eine Zerlegung $H = \sum_{\alpha < \theta} \oplus H_\alpha$ mit $H_\alpha \sim E_{t_\alpha}$, $t_\alpha \subseteq t_\beta$ für $\beta < \alpha$. Es sei $r_\alpha = \prod_{\beta < \alpha} t_\beta - t_\alpha$ für $0 < \alpha \leq \theta$, $r_0 = \Lambda - t_0$. Dann ist $r_\alpha t_\alpha = [0]$ und $r_\alpha \subseteq t_\beta$ für $\beta < \alpha$, daher $r_\alpha r_\beta = [0]$ ($\alpha \neq \beta$). Die r_α sind paarweise fremd, höchstens kontinuumviele von ihnen sind also $\neq [0]$. Durch Induktion beweise ich nun $t_\alpha = \Lambda - \sum_{\beta \leq \alpha} r_\beta$. Es sei also für $\beta < \alpha$ $t_\beta = \Lambda - \sum_{\gamma \leq \beta} r_\gamma = \prod_{\gamma \leq \beta} (\Lambda - r_\gamma)$; es folgt $\prod_{\beta < \alpha} t_\beta = \prod_{\gamma < \alpha} (\Lambda - r_\gamma) = \Lambda - \sum_{\gamma < \alpha} r_\gamma$. Folglich nach Definition

$$t_\alpha = \prod_{\beta < \alpha} t_\beta - r_\alpha = \Lambda - \sum_{\beta < \alpha} r_\beta - r_\alpha = \Lambda - \sum_{\beta \leq \alpha} r_\beta.$$

Hiernach ist auch $0 = t_\theta = \Lambda - \sum_{\beta \leq \theta} r_\beta$, also $\sum_{\beta \leq \theta} r_\beta = \Lambda$, $t_\alpha = \sum_{\alpha < \beta \leq \theta} r_\beta$. Entsprechend dieser Zerlegung von t_α zerlege ich H_α :

$$H_\alpha = \sum_{\alpha < \beta \leq \theta} \oplus H_{\alpha\beta}, \quad H_{\alpha\beta} \sim E_{r_\beta}.$$

Es ist also

$$H = \sum_{\alpha < \theta} \oplus H_\alpha = \sum_{\alpha < \beta \leq \theta} \oplus H_{\alpha\beta} = \sum_{0 < \beta \leq \theta} \oplus \sum_{\alpha < \beta} \oplus H_{\alpha\beta}.$$

Ist \mathfrak{z}_β die Kardinalzahl des vor β liegenden Abschnittes der Ordnungszahlenreihe, so ist $\sum_{\alpha < \beta} \oplus H_{\alpha\beta} \sim \mathfrak{z}_\beta \times E_{r_\beta}$, also $H \sim \sum_{0 < \beta < \theta} \oplus (\mathfrak{z}_\beta \times E_{r_\beta})$,

wo die Summanden mit $r_\beta = [0]$ zu unterdrücken sind, oder $H \sim \sum_{\beta < \theta} \oplus (\mathfrak{z}_\beta \times E_{r_\beta})$, da $\mathfrak{z}_0 = 0$ ist. Da die \mathfrak{z}_β nicht paarweise verschieden zu sein brauchen, indiziere ich die verschiedenen unter ihnen neu als n_α und setze $s_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} r_\beta$, $n(s_\alpha) = n_\alpha$. Es ist dann $\sum_{\beta \leq \alpha} \oplus (\mathfrak{z}_\beta \times E_{r_\beta})$

$= n(s_\alpha) \times E_{s_\alpha}$, $H \sim \sum_{\alpha} \oplus (n(s_\alpha) \times E_{s_\alpha})$ und $n_\alpha \neq n_\beta$ für $\alpha \neq \beta$. Da die r_β paarweise fremd und nicht leer sind und eine Zerlegung von Λ bilden, gilt dasselbe von den s_α ; wird die Menge der s_α mit \mathfrak{S} bezeichnet, so ist $H \sim \sum_{s \in \mathfrak{S}} \oplus (n(s) \times E_s)$, w. z. b. w.

Dieser Satz gibt folgenden Überblick über sämtliche Typen mit reinem Streckenspektrum: Man wähle auf jede mögliche Art eine Zerlegung \mathfrak{S} von Λ in paarweise fremde S -Bereiche: $\Lambda = \sum_{s \in \mathfrak{S}} s$, $s \neq [0]$, und eine Funktion, die

jedem $s \in \mathfrak{S}$ eine Kardinalzahl $n(s)$ zuordnet, so daß $n(s) \neq n(s')$ für $s \neq s'$ ist, und bilde $\sum_{s \in \mathfrak{S}} \oplus (n(s) \times E_s)$; so erhält man jeden Typ, und zwar jeden genau einmal.

Diese Formulierung macht die Analogie zwischen Punkt- und Streckenspektrum besonders deutlich; vgl. § 2, Satz 4. Der folgende Satz spricht dieselbe Tatsache aus.

Satz 30. Die nach Satz 29 zu H gehörige Menge \mathfrak{S} und die auf \mathfrak{S} definierte Funktion $n(s)$ bilden zusammen ein vollständiges Unitärinvariantensystem von H .

Da \mathfrak{S} höchstens \aleph Elemente enthalten kann, nimmt die Funktion $n(s)$ höchstens \aleph verschiedene Werte an, d. h. es gibt, wie beim Punktspektrum, nicht mehr als \aleph verschiedene wirklich auftretende Vielfachheiten.

Nach § 2 hat also der allgemeinste Typ eines selbstadjungierten Operators mit beliebigem Spektrum die Form

$$\sum_{c \in \mathfrak{C}} \oplus (\mathfrak{z}(c) \times F_c) \oplus \sum_{s \in \mathfrak{S}} \oplus (n(s) \times E_s),$$

und ein vollständiges Invariantensystem wird gebildet von den Mengen \mathfrak{C} und \mathfrak{S} und den darauf definierten Funktionen $\mathfrak{z}(c)$ und $n(s)$.

Man kann dem Invariantensystem noch eine andere Form geben in Analogie zu Satz 3. Durch die dort verwendeten Vielfachheiten $\mathfrak{B}(H, b)$ wird folgende Definition nahegelegt:

Definition 13. $\mathfrak{B}(H, s)$, die „Vielfachheit des Spektrums von H über dem S -Bereich s “, ist die Vielfachheit (Def. 2, S. 432) des in $P_s \mathfrak{H}$ liegenden Abschnittes von H : $\mathfrak{B}(H, s) = \mathfrak{B}(H_{P_s \mathfrak{H}})$.

Wir werden finden, daß auch die Zahlen $\mathfrak{B}(H, s)$ ein vollständiges Invariantensystem bilden. Es sei $H \sim \sum_{s \in \mathfrak{S}} \oplus (n(s) \times E_s)$, $H' \sim \sum_{s' \in \mathfrak{S}'} \oplus (n'(s') \times E_{s'})$ und nicht $H \sim H'$; dann gibt es $s \in \mathfrak{S}$ und $s' \in \mathfrak{S}'$, so daß $ss' \neq [0]$ und $n(s) \neq n'(s')$ ist. Ist $\varrho \neq 0$, $\varrho \in ss'$, so ist $\mathfrak{B}(H, [\varrho]) = n(s) \neq n'(s') = \mathfrak{B}(H', [\varrho])$. Also ergibt sich

Satz 31. Notwendig und hinreichend für $H \sim H'$ ist: $\mathfrak{B}(H, [\varrho]) = \mathfrak{B}(H', [\varrho])$ für jede Funktion $\varrho \in \Lambda$.

Die Beschränkung auf primitive S -Bereiche ist nicht unerheblich, da sie die Zahl der Invarianten von 2^\aleph auf \aleph herabsetzt.

Ist R ein beliebiger selbstadjungierter Operator, $R = A \oplus H$, wo H nur kontinuierliches und A nur Punktspektrum hat, so definiere ich $\mathfrak{B}(R, \lambda) = \mathfrak{B}(A, \lambda)$, $\mathfrak{B}(R, s) = \mathfrak{B}(H, s)$ und gewinne den Satz: Für einen beliebigen selbstadjungierten Operator R bilden die Vielfachheiten $\mathfrak{B}(R, \lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{Z}$) und $\mathfrak{B}(R, [\varrho])$ ($\varrho \in \Lambda$, $\varrho \neq 0$) ein vollständiges Unitärinvariantensystem.

Anhang I.

Spektralschar auf Punktmengen.

War nun die Einführung der Begriffsbildungen der §§ 4 bis 6 wirklich *notwendig*? Ist es nicht möglich, auch im nichtseparablen Raume mit dem Apparat von § 1 auszukommen? Diese Frage soll jetzt untersucht werden.

Zunächst ist die Bildung von Funktionen eines selbstadjungierten Operators H durch

$$F(H) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) dP_{\lambda}$$

für Funktionen einer Baireschen Klasse in einem Raum beliebiger Dimension sinnvoll und auch $P(b)$ und $\mathfrak{B}(H, b)$ sind für Borelsche Mengen b vorhanden. Man kann also fragen: *Bilden die Zahlen $\mathfrak{B}(H, b)$ ein vollständiges Invariantensystem?* Die Frage wäre im Falle reinen Streckenspektrums zu bejahen, wenn jeder Spektralprojektor P_s sich in die Form $P(b)$ bringen ließe (wie das im Hilbertschen Raume der Fall ist). Dies gilt nun sicher *nicht* allgemein, da die Zahl der Borelschen Mengen b und damit die Zahl der $P(b)$ \aleph ist, während die Zahl der S -Bereiche s 2^{\aleph} ist. Es würde aber schon genügen, wenn sich die $P_{[s]}$ als $P(b)$ ausdrücken ließen, und außerdem wäre eine Vermehrung der zugelassenen Punktmengen über die Borelschen hinaus möglich.

Unter Beibehaltung der alten Bedeutung von $P(m)$ (§ 1, 4), die durch $P(m) = \int_m dP_{\lambda}$ ausgedrückt werden kann und die Beziehung $|P(m)x|^2 = \int_m d|P_{\lambda}x|^2$ nach sich zieht, kann man in der Tat ohne weiteres $P(m)x$ für jede ϱ -meßbare Menge m erklären, wo $\varrho(\lambda) = |P_{\lambda}x|^2$ ist. Darüber hinaus scheint aber eine Erweiterung der Definition nicht sinnvoll zu sein, da man sonst in willkürlicher Weise gewissen nicht ϱ -meßbaren Mengen n einen Projektor $P(n)$ mit $P(n)x = 0$ zuordnen müßte. Es ist also von der Punktmenge m , für die $P(m)$ erklärt werden soll, zu fordern, daß sie ϱ -meßbar ist für jedes $\varrho \in s$, wo s der S -Bereich von H ist²⁷⁾. Hat H den S -Bereich A , so muß m für jede A -Funktion meßbar sein, wofür v. Neumann [10] die Bezeichnung Φ -meßbar eingeführt hat²⁸⁾.

Nimmt man zunächst das Punktspektrum hinzu, so zeigt sich, daß trotz dieser Erweiterung die Invarianten nicht voll erfaßt werden können. Sei z. B.

$$R_1 \sim (2 \times F_Z) \oplus E_A, \quad R_2 \sim (2 \times F_Z) \oplus (2 \times E_A).$$

²⁷⁾ Von Stone „ H -Meßbarkeit“ genannt, [14], Definition 6.3, S. 227.

²⁸⁾ Aus [7] folgt, daß zu den Φ -meßbaren Mengen außer den Borelschen jedenfalls noch gewisse nicht Borelsche Mengen gehören, die freilich hier ganz unwesentlich sind, da sie für jede Maßfunktion aus A Nullmengen sind.

Dann sind nur Φ -meßbare Mengen m zulässig und es ist stets $\mathfrak{B}(R_1, m) = \mathfrak{B}(R_2, m) = 2$ für $m \neq 0$, aber trotzdem nicht $R_1 \sim R_2$.

Betrachten wir aber wieder Operatoren mit reinem Streckenspektrum; es wäre immer noch denkbar, daß solche durch Vielfachheiten $\mathfrak{B}(H, m)$ charakterisiert werden könnten, wie dies ja bei reinem Punktspektrum tatsächlich der Fall ist. H habe den S -Bereich A ; es ist also $P(m)$ genau für jede Φ -meßbare Menge m erklärt, und alle P_s sind voneinander verschieden. Es gibt eine eindeutige Zuordnung $m \rightarrow s$ vermöge $P(m) = P_s$ und folglich eine eineindeutige Zuordnung zwischen den $P(m)$ und einer gewissen Menge von S -Bereichen²⁹⁾. Ich untersuche jetzt, ob diese Menge die primitiven S -Bereiche enthält.

Die Zuordnung $m \rightarrow s$ hängt von H nicht ab: Die Elemente $y = P(m)x$ sind gekennzeichnet durch $P(m)y = y$, die $\sigma(\lambda) = |P_\lambda y|^2$ (d. h. die $\sigma \in s$) also durch $\sigma(m) = \sigma(\infty)$ oder $\sigma(\bar{m}) = 0$, wenn \bar{m} die Komplementärmenge von m ist. s ist also die Menge der $\sigma \in A$ mit $\sigma(\bar{m}) = 0$.

Satz 32. Ist $a > 0$, i_0 das Intervall $[0, a]$, $p \subseteq i_0$ eine abgeschlossene Punktmenge von nicht verschwindendem Maß, so gibt es auf i_0 eine stetige monotone Funktion $r(t)$, so daß $r(0) = 0$, $r(a) = a$, $r(t)$ auf jedem zu p fremden Intervall konstant ist und für jede B -Menge b mit $b \subseteq p$ gilt: $\int_b dr(t) \geq m(b)$.

Beweis. Es ist $m(p) = \alpha a$, $0 < \alpha \leq 1$. Sei $e_t = (0, t)$ für $0 \leq t \leq a$; ich setze $r(t) = \frac{1}{\alpha} m(e_t \cdot p)$, so daß also $r(0) = 0$, $r(a) = a$ ist. Die entsprechende Mengenfunktion ist $\int_b dr(t) = r(b) = \frac{1}{\alpha} m(b \cdot p)$. Für ein Intervall $i \subseteq i_0$ ist $r(i) \leq \frac{1}{\alpha} m(i)$, $r(t)$ erfüllt also eine Lipschitz-Bedingung und ist daher stetig; im Falle $ip = 0$ ist $r(i) = 0$, d. h. $r(t)$ konstant auf i . Für $b \subseteq p$ ist $r(b) = \frac{1}{\alpha} m(b \cdot p) = \frac{1}{\alpha} m(b) \geq m(b)$.

Satz 33. Ist $a > 0$, $i_0 = [0, a]$ und $b \subset i_0$ eine Nullmenge, so gibt es eine monotone, stetige, aber nicht totalstetige Funktion $g(t)$ auf i_0 mit $g(0) = 0$, $g(a) > 0$, $\int_b dg(t) = 0$.

Beweis. Ich schließe b ein in eine offene Menge o mit $m(o) < \frac{a}{2}$ und bilde die abgeschlossene Menge $p = i_0 - i_0 o$. Es ist $pb = 0$, $m(p) > \frac{a}{2}$. Hierzu bilde ich die Funktion $r(t)$ nach Satz 32. Dann sei $f(t)$ eine beliebige

²⁹⁾ Eine Zuordnung zwischen den Mengen m selbst und den S -Bereichen bekommt man, wenn man Mengen „bis auf eine Φ -Nullmenge“ betrachtet, d. h. bis auf solche Mengen, die für jede A -Funktion Nullmengen sind. Zu den Φ -Nullmengen gehören die abzählbaren und die in Anm. ²⁸⁾ genannten Mengen, aber keine nichtabzählbare B -Menge.

monotone stetige nicht totalstetige Funktion auf i_0 mit $f(0) = 0$, $f(a) > 0$, und ich setze $g(t) = f(r(t))$. Es ist zunächst $g(t)$ auf i_0 monoton nicht fallend und stetig, $g(0) = 0$, $g(a) > 0$. Auf jedem Intervall $i \subseteq 0$ ist $r(t)$ konstant; $r(t)$ führt also (als Abbildung $r = r(t)$ aufgefaßt) 0 , daher auch b , in eine abzählbare Menge über, und dasselbe tut dann auch $g(t) = f(r(t))$; daher ist $g(b) = \int dg(t) = 0$ als das L -Maß der durch $g = g(t)$ erzeugten Bild-

menge von b auf der g -Achse. Da $f(r)$ nicht totalstetig ist, gibt es auf der r -Achse eine Nullmenge a , die o. B. d. A. Borelsch und zu der genannten abzählbaren Menge fremd angenommen werden kann, so daß $f(a) > 0$ ist. a ist das durch $r = r(t)$ vermittelte Bild einer wohlbestimmten B -Menge b auf der t -Achse, und wegen $m(b) \leq r(b) = m(a) = 0$ ist auch b eine Nullmenge. Da $g(b) = f(a) > 0$ ist, ist $g(t)$ nicht totalstetig, w. z. b. w.

Satz 34. Ist für einen Operator mit dem S -Bereich A der Projektor $P(m)$ sinnvoll³⁰⁾ und $P(m) = P_s \neq 0$, so ist s nicht primitiv.

Beweis. Ich zeige: Zu jedem $\varrho \in s$ gibt es ein $\sigma \in s$ mit $\sigma \notin [\varrho]$. O. B. d. A. sei $\varrho \neq 0$. Sei \bar{m} die Komplementärmenge zu m , so ist dies zu zeigen: Es sei \bar{m} eine Φ -meßbare Menge und $\varrho(\bar{m}) = 0$, $\varrho \in A$, $\varrho \neq 0$; dann gibt es $\sigma \in A$ mit $\sigma(\bar{m}) = 0$, $\sigma \notin [\varrho]$. Das durch $t = \varrho(\lambda)$ erzeugte Bild von \bar{m} auf der t -Achse ist eine Nullmenge b im Intervall $0 \leq t \leq a = \varrho(\infty)$ ($a > 0$). $g(t)$ sei die im vorigen Satze konstruierte Funktion und $\sigma(\lambda) = g(\varrho(\lambda))$. Dann ist $\sigma(\bar{m}) = g(b) = 0$, jedoch σ keine totalstetige Funktion von ϱ , also nicht $\sigma < \varrho$, w. z. b. w.

Unter den S -Bereichen s , zu denen es eine Menge m mit $P(m) = P_s$ gibt, befindet sich also kein primitiver. Hieraus werden wir nun schließen, daß die Zahlen $\mathfrak{B}(H, m)$ kein vollständiges Invariantensystem bilden. Es sei σ aus A mit $\sigma \neq 0$ beliebig gewählt, $H_1 \sim 2 \times E_A$, $H_2 \sim (2 \times E_{A - [\sigma]}) \oplus E_{[\sigma]} = E_A \oplus E_{A - [\sigma]}$; es sind für jede Φ -meßbare Menge m $\mathfrak{B}(H_1, m)$ und $\mathfrak{B}(H_2, m)$ zu bilden. Entweder ist nun m eine Nullmenge für jede A -Funktion — dann ist $\mathfrak{B}(H_1, m) = \mathfrak{B}(H_2, m) = 0$; oder man hat $\mathfrak{B}(H_1, s)$ und $\mathfrak{B}(H_2, s)$ zu bilden, wo s ein nicht primitiver S -Bereich ist — dann ist s nicht in $[\sigma]$ enthalten, also $s(A - [\sigma]) \neq [0]$, daher $\mathfrak{B}(H_1, s) = \mathfrak{B}(H_2, s) = 2$. Stets ist also $\mathfrak{B}(H_1, m) = \mathfrak{B}(H_2, m)$, obwohl nicht $H_1 \sim H_2$ ist.

Vergleicht man dies Ergebnis mit der v. Neumannschen Theorie der Operatorfunktionen ([9], [10]), so sieht man, daß diese Theorie im nicht-separablen Raume nicht gilt. Es wird dort folgendes Resultat gewonnen: Der Ring $(R)''$, d. h. die Menge der beschränkten Operatoren, die mit jedem mit R vertauschbaren beschränkten Operator vertauschbar sind, ist die Menge

³⁰⁾ D. h. m ist Φ -meßbar; vgl. S. 450.

der Funktionen $f(R) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dP_{\lambda}$ mit beschränktem $f(\lambda)$. Daraus ergab sich im Hilbertschen Raum, daß jeder Spektralprojektor die Gestalt $P(b)$ hat; im nichtseparablen Raume kann, wie wir sahen, $P_{[a]}$ nicht in diesem Sinne als Funktion von R geschrieben werden. Um auch hier einen analogen Satz aussprechen zu können, müßte man den Begriff der Funktion eines Operators wesentlich erweitern.

Anhang II.

Realisation der Typen mit einfachem Spektrum.

Um ein Beispiel eines Operators mit einfachem Spektrum und vorgeschriebenem Punktspektrum c und S -Bereich s , also eine Realisation des Typs $F_c \oplus E_s$, zu gewinnen, kann man mittels einer Basis \mathcal{V} von s eine Zerlegung in $F_c \oplus \sum_{\psi \in \mathcal{V}} E_{[\psi]}$ vornehmen; eine Realisation von F_c ist trivial und eine solche von $E_{[\psi]}$ (in $\mathfrak{L}_2(\psi)$) wurde oben (S. 440) nach Stone angegeben. Diese Konstruktion berücksichtigt das Punkt- und Streckenspektrum getrennt und enthält außerdem eine weitgehende Willkür durch die Wahl der Basis von s . Beides kann auf die im folgenden angedeutete Art vermieden werden, freilich unter Verzicht auf die Eigenschaften eines linearen Funktionenraumes.

Die Trennung von Punkt- und Streckenspektrum war schon bei Stone von vornherein vermieden, da er den Operator H_1 in $\mathfrak{L}_2(\varrho)$ nicht nur für $\varrho \in A$, sondern für jedes $\varrho \in M$ (wo M die Menge der M -Funktionen (vgl. § 1, 1) ist) konstruierte. In der Tat könnte man in § 4 von Anfang an A durch M ersetzen; fast alle Sätze jenes Paragraphen blieben mit erweitertem Sinne gültig, und man erhielte in § 5 entsprechend eine einheitliche Behandlung von Punkt- und Streckenspektrum. In diesem erweiterten Sinne sind jetzt die Bezeichnungen S -Bereich, E_s usw. zu verstehen.

Sind H_1 und H_2 Realisationen von E_s in $\mathfrak{L}_2(\varrho_1)$ bzw. $\mathfrak{L}_2(\varrho_2)$, wo $s = [\varrho_1] = [\varrho_2]$ ein primitiver S -Bereich ist, so wird die unitäre Äquivalenz von H_1 und H_2 vermittelt durch die Transformation

$$f_2(\lambda) = f_1(\lambda) \sqrt{\frac{d\varrho_1(\lambda)}{d\varrho_2(\lambda)}} \quad (f_1 \in \mathfrak{L}_2(\varrho_1), f_2 \in \mathfrak{L}_2(\varrho_2));$$

hierbei bleibt also der formale Ausdruck $d'f(\lambda) = f_1(\lambda) \sqrt{d\varrho_1(\lambda)}$ invariant.

Durch die Festsetzung $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_1(\mu) |f_1(\mu)| d\varrho_1(\mu)$, also $d'f(\lambda) = d'f(\lambda) |d'f(\lambda)|$, wird der Raum $\mathfrak{L}_2(\varrho_1)$ auf einen Raum $\mathfrak{R}(s)$ abgebildet, der nur noch von s , nicht von der speziellen Wahl von ϱ_1 abhängt. $\mathfrak{R}(s)$ ist die Menge der in

$(-\infty, \infty)$ definierten, komplexwertigen, linksstetigen, bei $-\infty$ verschwindenden Funktionen $f(\lambda)$ von beschränkter Variation, für die $\int_{-\infty}^{\lambda-0} |df(\mu)| \in s$ ist. Durch Übertragung der Verknüpfungen

$$f_1 + g_1, \quad c \cdot x_1, \quad (x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) \overline{y_1(\lambda)} d\varrho_1(\lambda)$$

und des Operators $H_1 y_1 = \lambda y_1 = z_1$ von $\mathfrak{L}_2(\varrho_1)$ auf $\mathfrak{R}(s)$ erhält man in $\mathfrak{R}(s)$ Verknüpfungen $f \dot{+} g$, $c \circ x$, (x, y) und einen Operator $H_s \sim E_s$, die formal als

$$d'(f \dot{+} g) = d'f + d'g, \quad d'(c \circ x) = c \cdot d'x, \quad (x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} d'x(\lambda) \overline{d'y(\lambda)},$$

$$H_s y = z: \quad d'z(\lambda) = \lambda d'y(\lambda)$$

$$\left(d'f(\lambda) = \frac{df(\lambda)}{\sqrt{|df(\lambda)|}}, \quad d'f(\lambda) = d'f(\lambda) |d'f(\lambda)| \right)$$

geschrieben werden können.

Dies ist eine durch s eindeutig bestimmte Realisation von E_s im Raume $\mathfrak{R}(s)$. Nachträglich überzeugt man sich, daß die obigen Formeln, die ja auf die Tatsache, daß s primitiv ist, nicht Bezug nehmen, für jeden (verallgemeinerten) S -Bereich s eine Realisation H_s von E_s liefern. — Für $s \subset t$ ist offenbar $\mathfrak{R}(s) \subset \mathfrak{R}(t)$ und H_s ein Abschnitt von H_t ; insbesondere erscheinen alle H_s als Abschnitte eines festen Operators H_M in $\mathfrak{R}(M)$.

Literatur.

K. Friedrichs.

- [1] Beiträge zur Theorie der Spektralschar I. Spektralschar auf Intervallen und Spektralzerlegung unitärer Operatoren, Math. Annalen **110** (1935), S. 54—62.
- [2] Die unitären Invarianten selbstadjungierter Operatoren im Hilbertschen Raum, Jahresber. d. D. Math.-Ver. **45** (1935) II, S. 79—82.

H. Hahn.

- [3] Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Monatsh. f. Math. u. Phys. **23** (1912), S. 169—224.

E. Hellinger.

- [4] Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Dissertation Göttingen 1907.

G. Köthe.

- [5] Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie, Jahresber. d. D. Math.-Ver. **47** (1937) I, S. 125—144.

H. Löwig.

- [6] Komplexe Euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniten Dimensionszahl, Acta sci. math. Szeged **7** (1934), S. 1—33.

N. Lusin.

- [7] Sur l'existence d'un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait, *Fundam. Mathem.* **2** (1921), S. 155—157.

J. von Neumann.

- [8] Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Annalen* **102** (1930), S. 49—131.
[9] Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Ann.* **102** (1930), S. 370—427.
[10] Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Math. (2)* **32** (1931), S. 191—226.

Fr. Rellich.

- [11] Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen, *Math. Annalen* **110** (1935), S. 342—356.
[12] Über die v. Neumannschen fastperiodischen Funktionen auf einer Gruppe, *Math. Annalen* **111** (1935), S. 560—567.

Fr. Riesz.

- [13] Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *Acta sci. math. Szeged* **5** (1930), S. 23—54.

M. H. Stone.

- [14] *Linear transformations in Hilbert space*, New York 1932.

O. Teichmüller.

- [15] Operatoren im Wachsschen Raum, *Journal f. d. r. u. ang. Math.* **174** (1936), S. 73—124.

(Eingegangen am 9. 5. 1938.)

Eine Bemerkung zur Berechnung der Diskriminante imprimitiver Gleichungen, insbesondere der Ikosaedergleichung.

Von

Ott-Heinrich Keller in Berlin.

Es sei uns die Aufgabe gestellt, die Diskriminante einer irreduziblen Gleichung zu berechnen, wenn der Körper jeder ihrer Wurzeln einen echten Unterkörper besitzt. Über die algebraische Struktur des Körpers soll sonst nichts vorausgesetzt werden, z. B. braucht die Ordnung der Gruppe des Unterkörpers nicht kleiner zu sein als die des Oberkörpers.

Hilbert¹⁾ zeigte, daß die Diskriminante des Oberkörpers gleich der Norm der Relativediskriminante mal der r -ten Potenz der Diskriminante des Unterkörpers ist, wo r den Relativgrad bedeutet. Um nun aus der *Körper*-diskriminante die *Gleichungsdiskriminante* zu erhalten, hat man noch mit dem Quadrat der Determinante der Matrix zu multiplizieren, die die Darstellung der Potenzen der Gleichungswurzel durch die Körperbasis vermittelt. Aber dazu braucht man die Körperbasis, und deren Berechnung ist recht unbequem.

Man könnte vermuten, daß die Hilbertsche Formel nicht nur für die Hauptordnung, sondern auch für die anderen Ordnungen des Körpers gelte. Einfache Beispiele widerlegen diese Vermutung.

Es soll nun unsere Aufgabe sein, die Hilbertsche Formel so umzugestalten, daß man mit ihrer Hilfe die Diskriminante einer Gleichung ausrechnen kann, ohne die Körperbasis zu kennen. Damit hat man dann auch ein ganzzahliges Vielfaches der *Körperdiskriminante*, und man kennt eine endliche Anzahl von Primzahlen, die allein als ihre Teiler in Frage kommen.

I.

Es sei also eine im Grundkörper k irreduzible Gleichung $F(x) = 0$ vom n -ten Grade gegeben; nach Adjunktion einer Wurzel β_1 einer Gleichung $\varphi(y) = 0$ vom m -ten Grade spalte $F(x)$ einen Faktor $f(x, \beta_1)$ ab, der in x vom r -ten Grade sei ($n = m \cdot r$). Im Körper aller Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ von $\varphi(y) = 0$ läßt sich also $F(x)$ in Faktoren zerlegen:

$$F(x) = f(x, \beta_1) \cdot f(x, \beta_2) \cdot \dots \cdot f(x, \beta_m).$$

¹⁾ Die Theorie der algebraischen Zahlkörper § 15, Werke I, S. 95.

Wir nehmen an, der höchste Koeffizient in $F(x)$ sei 1; dann können wir auch die Zerlegung so ausführen, daß der Koeffizient von x^r in $f(x, \beta_i)$ gleich 1 wird.

Die Diskriminante von $F(x)$ schreiben wir als Resultante von $F(x)$ und $F'(x) = \sum_{i=1}^m f'(x, \beta_i) \prod_{k \neq i} f(x, \beta_k)$. Sind $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \dots, \alpha_i^{(r)}$ die Wurzeln von $f(x, \beta_i) = 0$, so wird die Diskriminante

$$D(F) = \prod_{i=1}^m \prod_{\varrho=1}^r F'(\alpha_i^{(\varrho)}) = \prod_{i=1}^m \prod_{\varrho=1}^r \sum_{k=1}^m f'(\alpha_i^{(\varrho)}, \beta_k) \prod_{k \neq i} f(\alpha_i^{(\varrho)}, \beta_k).$$

Ist nun $k \neq i$, so kommt in der letzten Produkt der Faktor $f(\alpha_i^{(\varrho)}, \beta_i) = 0$ vor. Diese Glieder verschwinden, und wir brauchen uns nur um die Glieder mit $k = i$ zu kümmern

$$D(F) = \prod_{i=1}^m \prod_{\varrho=1}^r f'(\alpha_i^{(\varrho)}, \beta_i) \prod_{k \neq i} f(\alpha_i^{(\varrho)}, \beta_k) = \prod_{i=1}^m \prod_{\varrho=1}^r f'(\alpha_i^{(\varrho)}, \beta_i) \cdot \prod_{i=1}^m \prod_{\varrho=1}^r \prod_{k \neq i} f(\alpha_i^{(\varrho)}, \beta_k).$$

Nun ist $\prod_{\varrho=1}^r f'(\alpha_i^{(\varrho)}, \beta_i)$ die Relativediskriminante $D_i(f)$ von $f(x, \beta_i)$ über $k(\beta_i)$, und das Produkt $\prod_{i=1}^m D_i(f(x, \beta_i))$ ist ihre Norm.

Im zweiten Produkt ist jeder Faktor

$$\prod_{\varrho=1}^r f(\alpha_i^{(\varrho)}, \beta_k)$$

die Resultante von $f(x, \beta_i)$ und $f(x, \beta_k)$; in jedem solchen Faktor führen wir statt der f die beiden Polynome

$$g(x; \beta_i, \beta_k) = \frac{f(x, \beta_i) - f(x, \beta_k)}{\beta_i - \beta_k},$$

$$h(x; \beta_i, \beta_k) = \frac{\beta_i f(x, \beta_k) - \beta_k f(x, \beta_i)}{\beta_i - \beta_k}$$

ein. g und h sind Polynome in x, β_i, β_k , und zwar sind sie in β_i und β_k symmetrisch. Dabei tritt die Substitutionsdeterminante $\beta_i - \beta_k$ in der r -ten Potenz vor die Resultante:

$$R(f(x, \beta_i), f(x, \beta_k)) = (\beta_i - \beta_k)^r \cdot R(g(x; \beta_i, \beta_k), h(x; \beta_i, \beta_k)),$$

und das Produkt

$$\prod_{i=1}^m \prod_{k \neq i} R(f(x, \beta_i), f(x, \beta_k))$$

wird

$$\prod_{i=1}^m \prod_{k \neq i} (\beta_i - \beta_k)^r \cdot \prod_{i=1}^m \prod_{k \neq i} R(g(x; \beta_i, \beta_k), h(x; \beta_i, \beta_k)).$$

Der erste Faktor ist die r -te Potenz der Diskriminante von $\varphi(y)$. Um den zweiten Faktor als Resultante schreiben zu können, bilden wir das Polynom

$$\tau(z, \beta_i) = \frac{\varphi(z) - \varphi(\beta_i)}{z - \beta_i},$$

dessen Nullstellen gerade die von β_i verschiedenen Wurzeln von $\varphi(y)$ sind. Dann ist

$$\prod_{k \neq i} R_x(g(x; \beta_i, \beta_k), h(x; \beta_i, \beta_k)) = R_x[\tau(z, \beta_i), R_x(g(x; \beta_i, z), h(x; \beta_i, z))]$$

und

$$(1) \quad \prod_{i=1}^m \prod_{k \neq i} R_x(g(x; \beta_i, \beta_k), h(x; \beta_i, \beta_k)) \\ = R_y\{\varphi(y), R_x[\tau(z, y), R_x(g(x; y, z), h(x; y, z))]\},$$

also

$$D(F) = n(D(f)) \cdot [D(\varphi)]^r \cdot R_y\{\varphi, R_x[\tau, R_x(g, h)]\}.$$

Am günstigsten ist der häufige Fall, daß $f(x, \beta_i)$ von β_i nur linear und infolgedessen g und h von β_i gar nicht abhängen. Dann wird:

$$D(F) = n(D(f)) \cdot (D(\varphi))^r \cdot (R(g, h))^{m(m-1)}.$$

II.

Gegen die eben gefundene Lösung ist einzuwenden, daß der Faktor, der zur Hilbertschen Formel hinzutritt, nicht als Quadrat erscheint, obwohl er doch, wie wir uns zu Anfang überlegten, das Quadrat einer Determinante mit ganzen rationalen Elementen ist. Nun tritt zwar in (1) jeder Faktor $R(g(x; \beta_i, \beta_k), h(x; \beta_i, \beta_k))$ doppelt auf; aber dies kann bei einer Resultantenbildung mit $\varphi(y)$ und $\tau(z, y)$ nie in Erscheinung treten, weil dabei (β_i, β_k) von (β_k, β_i) unterschieden werden muß. Wir müssen versuchen, die *ungeordneten* Lösungspaare (β_i, β_k) algebraisch zu kennzeichnen. Dazu führen wir statt β_i und β_k die elementar-symmetrischen Funktionen $u_{ik} = \beta_i \cdot \beta_k$ und $v_{ik} = \beta_i + \beta_k$ der Wurzeln von $\varphi(y) = 0$ ein. Da $g(x; \beta_i, \beta_k)$ und $h(x; \beta_i, \beta_k)$ in β_i und β_k symmetrisch sind, lassen sie sich als Polynome $G(x; u_{ik}, v_{ik})$ und $H(x; u_{ik}, v_{ik})$ darstellen. u und v genügen je einer Gleichung $\frac{m(m-1)}{2}$ -ten Grades. Wir brauchen aber nur eine von ihnen, etwa $\chi(v) = 0$ aufzustellen. Ihre Koeffizienten sind symmetrische Funktionen der β_i und können leicht durch die Koeffizienten von $\varphi(y)$ ausgedrückt werden. $\chi(v)$ zerlegen wir in seine irreduziblen Bestandteile

$$\chi(v) = (\chi_1(v))^{e_1} \cdot (\chi_2(v))^{e_2} \cdots (\chi_t(v))^{e_t}.$$

(Es genügt sogar, die Faktoren voneinander zu trennen, die in verschiedenen Potenzen in χ vorkommen.)

Die Gleichung für u über dem Grundkörper kann uns jetzt nichts mehr nützen, da sie über die Zuordnung der u_{ik} und der v_{ik} nichts aussagt. Wir brauchen die Gleichung für u über dem durch v_{ik} erzeugten Körper.

Wenn wir ein zusammengehöriges Paar (u_{ik}, v_{ik}) kennen, bestimmen sich zwei Lösungen von $\varphi(y)$ aus der Gleichung

$$(2) \quad y^2 - v_{ik}y + u_{ik} = 0.$$

Die Elimination von y hieraus und aus $\varphi(y) = 0$ liefert eine Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ vom m -ten Grad.

Wir deuten diese Gleichung als Kurve in einer (u, v) -Ebene. Da

$$\varphi(u, v) = \prod_{i=1}^m (\beta_i^2 - v\beta_i + u), \text{ zerfällt diese Kurve in } m \text{ gerade Linien,}$$

Tangenten an die Parabel $v^2 = 4u$. Sie schneiden sich in $\frac{m(m-1)}{2}$ Punkten S . Für jeden Punkt auf einer solchen Geraden haben (2) und $\varphi(y) = 0$ eine Wurzel, für die Schnittpunkte zweier Geraden beide Wurzeln gemein. Die Punkte S stellen also die Wertepaare (u, v) dar, an denen uns liegt.

Jede Gerade $v = v_{ik}$ wird von den m Parabeltangenten geschnitten; uns gehen aber nur diejenigen Punkte etwas an, in denen sie von zwei jener Tangenten geschnitten wird. Wir müssen also die Doppelwurzeln von $\varphi(u, v_{ik}) = 0$ suchen, etwa indem wir den größten gemeinsamen Teiler $\omega(u, v)$ von $\varphi(u, v_{ik})$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ bilden. Ist v_{ik} eine Wurzel von $\chi_\lambda(v) = 0$, also eine ϱ_λ -fache Wurzel von $\chi(v) = 0$, so gibt es ϱ_λ Wertepaare (β_i, β_k) , deren Summe v_{ik} ist, und ϱ_λ Produkte $u_{ik} = \beta_i \cdot \beta_k$. $\omega_\lambda(u, v)$ hat also in u den Grad ϱ_λ . Da ferner u^m in $\varphi(u, v)$ den Koeffizienten 1 hatte, hängt u im Ring der Koeffizienten von φ ganz algebraisch von v ab, und wir können durch Multiplikation mit gewissen Polynomen in v erreichen, daß u^{ϱ_λ} in ω_λ keinen Faktor hat. Allerdings erfordert dies die Durchführung des Euklidischen Algorithmus für Polynome vom Grade von $\chi_\lambda(v)$, der im ungünstigsten Fall $\frac{m(m-1)}{2}$ ist. Diesen Schritt können wir zwar im Augenblick noch hinauschieben, müssen ihn aber dann bei der Bildung der dreifachen Resultante nachholen.

Jetzt stellt sich der Faktor (1)

$$\prod_{i=1}^m \prod_{k \neq i} R(G(x; u_{ik}, v_{ik}), H(x; u_{ik}, v_{ik})) = \left(\prod_{(i,k)} R(G(x; u_{ik}, v_{ik}), H(x; u_{ik}, v_{ik})) \right)^2$$

genau wie in I. dar als

$$\left\langle \prod_{\lambda=1}^l R_\tau \{ \chi_\lambda, R_u [\omega_\lambda, R_\pi(G, H)] \} \right\rangle^2.$$

Für die Berechnung hat dieser Weg den Vorteil, daß man es im Ergebnis und daher auch wohl vorher mit kleineren Zahlen zu tun hat, demgegenüber den Nachteil, daß man an zwei Stellen Resultanten von Polynomen $\frac{m(m-1)}{2}$ -ten Grades zu bilden hat. Bei dem ersten, unsymmetrischen Weg hatten wir höchstens Resultanten von Polynomen m -ten Grades zu bilden. Für große m ist das entscheidend während etwa für $m = 3$ der symmetrische Weg der einfachere ist.

III.

Als Beispiel wollen wir die Diskriminante der *Ikosaedergleichung*²⁾ ausrechnen. Wir setzen sie in den Gestalten

$$H^3 - 1728 \lambda f^5 = 0,$$

$$T^3 - 1728 (1 - \lambda) f^5 = 0$$

an, wo

$$H \equiv -(x^{30} + 1) + 228 (x^{15} - x^5) - 494 x^{10} = 0$$

die Gleichung der Flächenmitten,

$$f \equiv x (x^{10} + 11 x^5 - 1) = 0$$

die Gleichung der Ecken und

$$T \equiv (x^{30} + 1) + 522 (x^{25} - x^5) - 10005 (x^{20} + x^{10}) = 0$$

die Gleichung der Kantenmitten und λ einen frei veränderlichen Parameter bedeuten. Es ist

$$-H^3 + 1728 f^5 = T^3.$$

Die Betrachtung der Fundamentalbereiche zeigt, daß nur für $\lambda = 0, 1, \infty$ Wurzeln der Ikosaedergleichung zusammenfallen können, daß also die Diskriminante die einzigen Nullstellen 0 und 1 hat. Wir müssen zunächst die Ordnung ihres Verschwindens für diese beiden Werte feststellen: Für $\lambda = 0$ gehen wir von der ersten Darstellung aus und setzen

$$D(H^3 - 1728 f^5 \cdot \lambda) = \prod_{\alpha_v} (3 H^3 H' - 1728 \cdot 5 \lambda f^4 f'),$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{60}$ die Wurzeln der Ikosaedergleichung sind. Setzen wir hierin $H = \sqrt[3]{\lambda} \cdot \sqrt[3]{1728 f^5}$, so wird:

$$(3) \quad D = \lambda^{40} \prod_{\alpha_v} (3^3 \cdot 2^4 \cdot \sqrt[3]{f^3} \cdot H' - \sqrt[3]{\lambda} \cdot 5 \cdot 1728 f^4 \cdot f'),$$

²⁾ Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder S. 55–61.

und für $\lambda = 0$ verschwindet kein Faktor des Produktes mehr. D verschwindet also bei $\lambda = 0$ von 40ster Ordnung.

Für $\lambda = 1$ gehen wir von der zweiten Darstellung aus:

$$D(T^2 - 1728(1 - \lambda)^3) = \prod_{\alpha_v} (2T T' - 1728 \cdot 5(1 - \lambda)^4 f')$$

und setzen hierin

$$T = \sqrt{1 - \lambda} \sqrt{1728 f^5},$$

dann wird:

$$D = (1 - \lambda)^{40} \prod_{\alpha_v} (2 \sqrt{1728} \sqrt{f^5} T' - 1728 \cdot 5 \sqrt{1 - \lambda} f').$$

D verschwindet also für $\lambda = 1$ von 30ster Ordnung, da wieder kein Faktor des Produktes für $\lambda = 1$ verschwindet. Also ist $D = C \cdot \lambda^{40} (1 - \lambda)^{30}$, wo C von λ nicht mehr abhängt.

Aus (3) folgt

$$C = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{D}{\lambda^{40}} = 3^{180} \cdot 2^{240} \prod_{\alpha_v} H'(\alpha_v) \cdot f^{10/3}(\alpha_v).$$

Bei diesem Grenzübergang fallen je drei Wurzeln zusammen. Zählt man jede nur einfach, so wird

$$C = 3^{180} 2^{240} \prod_{\beta_v} (H'(\beta_v))^3 \cdot \prod_{\beta_v} f^{10}(\beta_v) = 3^{180} 2^{240} (D(H))^3 (R(H, f))^{10},$$

wo $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{20}$ die Nullstellen von H sind.

Um $D(H)$ zu berechnen, wenden wir unser Verfahren an, setzen $x^5 = y$ und

$$\varphi(y) \equiv y^4 - 228y^3 + 494y^2 + 288y + 1 = 0.$$

Die Funktionen g und h werden $g = -1$, $h = x^5$, also von y unabhängig. Ihre Resultante ist -1 . Die Relativediskriminante ist $5^5 y^4$, ihre Norm ist 5^{20} . Es ist

$$D(H) = (-1)^{12} \cdot 5^{20} \cdot (D(\varphi))^3.$$

$\varphi(y)$ ist reziprok; wir setzen $y - \frac{1}{y} = z$. Dann wird

$$\varphi(z) \equiv z^2 - 228z + 496 = 0, \quad y^2 - yz - 1 = 0,$$

die Funktionen g und h sind hier $g = -y$ und $h = z^2 - 1$, ihre Resultante ist -1 . Die Relativediskriminante ist $z^2 + 4$; ihre Norm ist $5^3 3^2 2^4$. Die Diskriminante von $\varphi(z)$ ist $5^5 2^4$. Also $D(\varphi) = (-1)^2 5^{15} 3^2 2^{12}$ und $D(H) = 5^{95} 3^{10} 2^{60}$.

Wir müssen noch $R(H, f)$ berechnen. Wir setzen $f = x \cdot f^*$, dann wird $R(H, f) = R(H, x) \cdot R(H, f^*)$, und der erste Faktor hiervon ist 1.

H und f^* lassen sich durch die Substitution $x^5 = y$ auf $H_1 = y^4 - 228y^3 + 494y^2 + 228y + 1$ und $f_1 = y^2 + 11y - 1$ zurückführen. Die Wurzeln

von $H_1 = 0$ seien $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, die von $H = 0$ seien $\beta_1, \dots, \beta_{20}$. Je 5 β_r haben die gleiche 5-te Potenz γ_r . Dann wird

$$R(H, f^*) = \prod_{r=1}^{20} f^*(\beta_r) = \prod_{r=1}^{20} f_1(\beta_r^5) = \left(\prod_{r=1}^4 f_1(\gamma_r) \right)^5.$$

Setzen wir jetzt $\left(y - \frac{1}{y}\right) = z$, so wird $H_1(y) = y^5 \cdot (z^3 - 228z + 496) = y^5 \cdot H_2(z)$ und $f_1(y) = y \cdot (z + 11) = y f_2(z)$.

Die Wurzeln von $H_2 = 0$ seien δ_1, δ_2 . Es ist

$$\prod_{r=1}^4 f_1(\gamma_r) = \prod_{r=1}^4 \gamma_r \cdot \prod_{r=1}^4 f_2\left(\gamma_r - \frac{1}{\gamma_r}\right) = 1 \cdot \left[\prod_{r=1}^2 f_2(\delta_r) \right]^2.$$

Also $R(H, f) = R(H_2, f_2)^{10} = 5^{50}$. Dann wird endlich

$$D = 5^{785} 3^{210} 2^{420} \lambda^{40} (1 - \lambda)^{30}.$$

Über dem Körper der 5. Einheitswurzeln wird die Ikosaedergleichung galois'sch. In der Diskriminante des zugehörigen Ikosaederkörpers können dann bei ganzzahligem λ höchstens 2,3 und die in 5, λ , $\lambda - 1$ enthaltenen Primzahlen aufgehen.

(Eingegangen am 8. 8. 1938.)

Einfacher topologischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Von

Wei-Liang Chow in Shanghai (China).

Deuten wir die komplexen Zahlen x bzw. y als Punkte auf den Kugelflächen K_n bzw. K_y , so definiert jede Gleichung $y = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ eine (singuläre) 2-Kette Γ auf K_y , deren Urbild K_x ist. Γ ist also ein Zyklus. Gäbe es einen Punkt auf K_y , der nicht von Γ überdeckt wäre, dann würde $\Gamma \sim 0$, wie man leicht einsieht. Andererseits läßt Γ sich durch eine Deformation, die etwa durch

$$y = x^n + (a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) \lambda, \\ \lambda = 1 \rightarrow \lambda = 0,$$

definiert werden möge, in die durch $y = x^n$ definierte 2-Kette Γ' deformieren, die ersichtlich der n -fachen K_y homolog ist. Wir hätten dann $nK_y \sim \Gamma' \sim 0$, was offenbar absurd ist. Also überdeckt Γ die ganze K_y , d. h. die Gleichung $y = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ist für jedes y , insbesondere für $y = 0$, lösbar.

(Eingegangen am 9. 7. 1938.)

Anwendung des Perronschen Beweises eines Satzes von Minkowski.

Von

J. F. Koksma in Amsterdam.

§ 1.

Einleitung.

Der in der Überschrift gemeinte Satz lautet:

Satz 1. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ reelle Zahlen mit $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, so gibt es ganze rationale Zahlen x, y derart, daß

$$-\frac{1}{4} \leq \{\alpha(x - \mu) + \beta(y - \nu)\} \{\gamma(x - \mu) + \delta(y - \nu)\} \leq \frac{1}{4}.$$

Hierin ist enthalten (man setze $\alpha = \Theta, \beta = -1, \gamma = 1, \delta = 0, \mu = 0, \nu = -\vartheta$):

Satz 2. Sind Θ und ϑ reelle Zahlen, so gibt es ganze rationale Zahlen x, y mit

$$|x(\Theta x - y - \vartheta)| \leq \frac{1}{4}.$$

Tiefer als Satz 2 liegt

Satz 3. Genügen die reellen Zahlen Θ und ϑ für jeden Gitterpunkt $(x, y) \neq (0, 0)$ den Bedingungen

$$\Theta x - y \neq 0, \quad y \neq \vartheta, \quad \Theta x - y - \vartheta \neq 0,$$

so gibt es unendlich viele Gitterpunkte (x, y) mit $x \neq 0$ und

$$|\Theta x - y - \vartheta| < \frac{1}{4|x|}.$$

Satz 3 wurde in etwas schwächerer Form zuerst von Tchebycheff gefunden und nachher von Hermite verschärft. Ihre Beweise sind (wie auch ein Kroneckerscher Beweis des Tchebycheffschen Satzes) arithmetischer Art. Satz 1 und Satz 3 in der obigen scharfen Fassung stammen von Minkowski und wurden von ihm auf geometrisch-anschauliche Weise hergeleitet. Später sind von mehreren Mathematikern neue und oft sehr einfache arithmetische oder geometrische Beweise von Satz 1 oder Satz 3 gegeben worden¹⁾. Nach meiner Erfahrung ist es manchmal nicht leicht,

¹⁾ Literatur in meinem Bericht: Diophantische Approximationen (Erg. d. Math. IV, 4; Berlin 1936), Kap. II, § 3, VI, § 1 ff.

eine Methode zur Herleitung von Satz 1 auch zum Beweise von Satz 3 zu verwerten.

Neulich veröffentlichte Herr O. Perron²⁾ einen sehr schönen und besonders einfachen arithmetischen Beweis von Satz 1. Das Ziel dieser Note ist, die Perronsche Methode zum Beweis des Satzes 3 zu benutzen³⁾.

Im folgenden verwende ich einige Eigenschaften der Kettenbruchdarstellung von Θ (Θ ist nach den Voraussetzungen von Satz 3 irrational), nicht weil die Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche sich nicht vermeiden ließe, sondern weil der Beweis dadurch einen mehr konstruktiven Charakter erhält.

Vorbemerkung. Um Satz 3 zu zeigen, braucht man nur zu beweisen, daß es unter den Voraussetzungen dieses Satzes unendlich viele ganze rationale x, y mit $x \neq 0$ und

$$(1) \quad |\Theta x - y - \theta| \leq \frac{1}{4|x|}$$

gibt. Denn gälte in (1) das Zeichen = für zwei Gitterpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_1 \neq x_2$, so wären die beiden Zahlen $\Theta x_1 - y_1 - \theta$ und $\Theta x_2 - y_2 - \theta$ rational, also wäre die Zahl $\Theta(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)$, also auch Θ rational. Weil es ferner zu jedem ganzen rationalen $x \neq 0$ höchstens ein ganzes rationales y mit (1) gibt, gilt also das Zeichen = in (1) für höchstens einen Gitterpunkt (x, y) mit $x \neq 0$.

§ 2.

Beweis von Satz 3.

Die Näherungsbrüche $\frac{p_i}{q_i}$ des regelmäßigen Kettenbruchs Θ ($p_0 = [\Theta]$, $q_0 = 1$)⁴⁾ genügen bekanntlich⁵⁾ den Gesetzen

$$(2) \quad \begin{cases} p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1} = (-1)^i & (i \geq 0), \\ 0 < (-1)^i \left(\Theta - \frac{p_i}{q_i} \right) < \frac{1}{q_i q_{i+1}} & (i \geq 0). \end{cases}$$

Wir setzen

$$(2a) \quad R_i = \Theta q_i - p_i \quad (i \geq 0).$$

²⁾ O. Perron, Neuer Beweis eines Satzes von Minkowski, Math. Annalen 115 (1938), S. 656–657.

³⁾ Der Deutlichkeit halber schreibe ich den Beweis in § 2 vollständig nieder, so daß ich in § 2, obwohl ich von ihr einen ausgiebigen Gebrauch mache, nicht mehr nach der Perronschen Arbeit zu verweisen brauche.

⁴⁾ Es bedeute $[u]$ für reelles u die größte ganze rationale Zahl $\leq u$.

⁵⁾ Vgl. z. B. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. (Leipzig-Berlin 1929; 2. Aufl.)

In der Folge möge n eine beliebige *gerade*⁶⁾ ganze rationale Zahl ≥ 0 bedeuten. Dann ist nach (2)

$$(3) \quad p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = 1,$$

$$(4) \quad 0 < q_n R_n < 1.$$

Wir bestimmen nun die von n abhängigen Zahlen M_n und N_n aus dem Gleichungspaar

$$(5) \quad \begin{cases} 0 = q_n M_n + q_{n+1} N_n, \\ -\vartheta = p_n M_n + p_{n+1} N_n \end{cases}$$

und finden wegen (3)

$$(6) \quad M_n = q_{n+1} \vartheta; \quad N_n = -q_n \vartheta.$$

Weiter betrachten wir die Substitution

$$(7) \quad \begin{cases} x = q_n X + q_{n+1} Y, \\ y = p_n X + p_{n+1} Y, \end{cases}$$

welche wegen (5) mit der Substitution

$$(8) \quad \begin{cases} x = q_n (X - M_n) + q_{n+1} (Y - N_n), \\ y + \vartheta = p_n (X - M_n) + p_{n+1} (Y - N_n) \end{cases}$$

gleichbedeutend ist; es liefert (8) wegen (2a) und (3) die Identität

$$(9) \quad \begin{cases} \vartheta x^2 - x(y + \vartheta) \\ \equiv q_n R_n (X - M_n)^2 + (q_n R_{n+1} + q_{n+1} R_n) (X - M_n) (Y - N_n) + q_{n+1} R_{n+1} (Y - N_n)^2 \\ \equiv q_n R_n \left\{ X - M_n + \frac{q_n R_{n+1} + q_{n+1} R_n}{2 q_n R_n} (Y - N_n) \right\}^2 - \frac{1}{4 q_n R_n} (Y - N_n)^2. \end{cases}$$

Jetzt sei

$$(10) \quad Y_n = \text{der nächsten ganzen rationalen Zahl von } N_n$$

gesetzt, so daß

$$(11) \quad |Y_n - N_n| \leq \frac{1}{2}$$

ist. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle.

Fall A. Sei

$$(12) \quad (Y_n - N_n)^2 \leq q_n R_n.$$

Dann werde

$$(13) \quad \begin{cases} X_n = \text{der nächsten ganzen rationalen Zahl von} \\ M_n - \frac{q_n R_{n+1} + q_{n+1} R_n}{2 q_n R_n} (Y_n - N_n) \end{cases}$$

gesetzt. Wegen (4), (13) und (12) ist *alsdann das letzte Glied von (9) für*

$$X = X_n, \quad Y = Y_n$$

absolut $\leq \frac{1}{4}$.

⁶⁾ Diese (unwesentliche) Einschränkung mache ich zur Vermeidung von Fallunterscheidungen.

Fall B. Sei

$$q_n R_n < (Y_n - N_n)^2.$$

Dann werde ω_n

$$X_n = \left[M_n - \frac{q_n R_{n+1} + q_{n+1} R_n}{2 q_n R_n} (Y_n - N_n) + \frac{\sqrt{(Y_n - N_n)^2 - q_n R_n}}{2 q_n R_n} \right] + 1,$$

also für geeignetes $\omega_n > 0$ und ≤ 1

$$X_n = M_n - \frac{q_n R_{n+1} + q_{n+1} R_n}{2 q_n R_n} (Y_n - N_n) + \frac{\sqrt{(Y_n - N_n)^2 - q_n R_n}}{2 q_n R_n} + \omega_n$$

gesetzt. Alsdann ist das letzte Glied von (9) für

$$X = X_n, \quad Y = Y_n$$

gleich

$$q_n R_n \left\{ \frac{\sqrt{(Y_n - N_n)^2 - q_n R_n}}{2 q_n R_n} + \omega_n \right\}^2 - \frac{(Y_n - N_n)^2}{4 q_n R_n} = -\frac{1}{4} + \omega_n \sqrt{(Y_n - N_n)^2 - q_n R_n} + \omega_n^2 q_n R_n.$$

Hierin ist wegen (4), (11) und $0 < \omega_n \leq 1$:

$$0 < \omega_n \sqrt{(Y_n - N_n)^2 - q_n R_n} + \omega_n^2 q_n R_n \leq \sqrt{\frac{1}{4} - q_n R_n} + q_n R_n$$

$$< \sqrt{\frac{1}{4} - q_n R_n + q_n^2 R_n^2} + q_n R_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - q_n R_n\right)^2} + q_n R_n = \frac{1}{2},$$

so daß auch im Fall B das letzte Glied von (9) für $X = X_n$, $Y = Y_n$ absolut $\leq \frac{1}{4}$ ist.

Wegen (9) befriedigen also in beiden Fällen die durch (7) mit $X = X_n$, $Y = Y_n$ gelieferten ganzen rationalen Zahlen $x = x_n$, $y = y_n$ die Ungleichung

$$(14) \quad |x_n(\theta x_n - y_n - \vartheta)| \leq \frac{1}{4}.$$

Ich behaupte jetzt, daß

$$(15) \quad |\theta x_n - y_n - \vartheta| \leq \frac{1}{q_n}$$

ist. Diese Behauptung ist wegen (14) trivial, wenn $|x_n| \geq \frac{1}{2} q_n$; wir nehmen zu ihrem Beweis also

$$(16) \quad |x_n| < \frac{1}{2} q_n$$

an. Aus (7) mit $X = X_n$, $Y = Y_n$, $x = x_n$, $y = y_n$ folgt wegen (3)

$$(17) \quad Y_n = q_n y_n - p_n x_n.$$

Wegen (2) mit $i = n$ ist $\theta = \frac{p_n}{q_n} + \frac{\sigma_n}{q_n^2}$ mit $0 < \sigma_n < 1$; also gilt

$$\begin{aligned} q_n(\theta x_n - y_n - \vartheta) &= q_n \left(\frac{p_n}{q_n} x_n + \frac{\sigma_n x_n}{q_n^2} - y_n - \vartheta \right) = p_n x_n - q_n y_n + \frac{\sigma_n x_n}{q_n} - \vartheta q_n \\ &= -Y_n - \vartheta q_n + \frac{\sigma_n x_n}{q_n} \quad (\text{wegen (17)}) \\ &= \tau_n + \frac{\sigma_n x_n}{q_n} \quad (\text{mit } |\tau_n| \leq \frac{1}{2} \text{ wegen (10) und (6)}), \end{aligned}$$

so daß wegen $|\sigma_n| < 1$ und (16) in der Tat (15) gilt.

Aus (15) folgt

$$(18) \quad \theta x_n - y_n - \vartheta \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Weil nun nach den Voraussetzungen von Satz 3 der Ausdruck

$$\theta x_n - y_n - \vartheta$$

beständig ungleich Null ist und es zu beliebigem x höchstens ein ganzes rationales y mit

$$|\theta x - y - \vartheta| < \frac{1}{2}$$

geben kann, folgt aus (18) sofort

$$|x_n| \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Das heißt: es gibt unendlich viele verschiedene unter den Gitterpunkten (x_n, y_n) , also unter den Gitterpunkten (x, y) mit (1), so daß Satz 3 wegen der Vorbemerkung in § 1 bewiesen ist.

(Eingegangen am 18. 8. 1938.)

Grundlagen einer Theorie der Integralgruppen und der Integralperioden bei den Normalteilern der Modulgruppe.

Von

E. Hecke in Hamburg.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
§ 1. Problemstellung. Übersicht über die Methoden und Resultate. Bezeichnungen	469
§ 2. Grundlagen für die Theorie ausgezeichneter Untergruppen der Modulgruppe	476
§ 3. Konstruktion aller zulässigen Darstellungen der unendlichen Modulgruppe durch affine Substitutionen. Satz 1 bis 5	479
§ 4. Der Vollständigkeitssatz für die affine Gruppe der Potentiale und ihre Zerfällung. Satz 6 bis 8	483
§ 5. Die Riemannschen Periodenrelationen, ausgedrückt in den Vek- toren p_T . Satz 9 bis 11.	486
§ 6. Die Normalintegrale 1. Gattung von \mathfrak{N} zu einer irreduziblen reellen Darstellung der Abbildungsgruppe. Satz 12 bis 13.	493
§ 7. Die irreduziblen Darstellungen der Modulargruppe mod q im Körper ihres Charakters. Satz 14 bis 15.	499
§ 8. Die Normalperioden für die Integrale der Kongruenzgruppe $\Gamma(q)$. Numerische Beispiele. Satz 16 bis 19	505

§ 1.

Problemstellung. Übersicht über die Methoden und Resultate. Bezeichnungen.

Besitzt ein algebraisches Gebilde in einer Variablen vom Geschlechte p eine Gruppe \mathfrak{G} von ein-eindeutigen analytischen Abbildungen auf sich (Automorphismen), so erfahren die p linear unabhängigen Differentiale 1. Gattung bei diesen Abbildungen lineare homogene Substitutionen, die in ihrer Gesamtheit eine Darstellung \mathfrak{S} der abstrakten Gruppe \mathfrak{G} bilden. Eine allgemeine Methode zur Bestimmung dieser Darstellung, d. h. zur Bestimmung ihres

Charakters, hat zuerst Hurwitz¹⁾ angegeben. Für das spezielle Gebilde, welches durch die elliptischen Modulfunktionen einer Primzahlstufe q definiert ist, habe ich²⁾ vor einigen Jahren die Zerfällung der genannten Darstellung in ihre irreduziblen Bestandteile auf einem etwas anderen Wege ermittelt, wobei sich ein merkwürdiger Zusammenhang mit der Klassenzahl³⁾ des quadratischen Zahlkörpers $K(\sqrt{-q})$ ergab. Seitdem ist von den Herren C. Chevalley und A. Weil die Frage von neuem aufgenommen⁴⁾ und mit algebraischen Methoden ein sehr allgemeines Theorem über diese und verwandte Gruppen bewiesen worden.

Meine weiteren Untersuchungen lassen nun erkennen, daß allgemein das Problem der Bestimmung dieser Gruppe der Differentiale 1. Gattung in zwei verschiedenartige und verschieden schwierige Probleme zerlegt werden muß:

I. Das eine ist die Bestimmung der Gruppe $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$, wo $\overline{\mathfrak{S}}$ die Darstellung mit konjugiert-komplexen Koeffizienten zu \mathfrak{S} bedeutet. Diese Gruppe $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$ ist offenbar die Gruppe, nach der sich die reellen und imaginären Teile der Integrale 1. Gattung, d. h. die $2p$ reellen Potentiale 1. Gattung bei den Automorphismen \mathfrak{G} umsetzen, wenn man von additiven Konstanten absieht. Der Kern dieser Frage ist topologischer Natur³⁾, da die Potentiale 1. Gattung in bekannter Weise den Randkurven eines kanonischen Schnittsystems auf der Riemannschen Fläche zugeordnet werden können und es sich also nur darum handelt, wie sich ein solches Schnittsystem bei den Abbildungen aus \mathfrak{G} verhält. Denkt man sich die Darstellung $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$ durch die Angabe des Charakters und dessen Zusammensetzung aus den einfachen Charakteren der Gruppe \mathfrak{G} gegeben, so ist durch die Kenntnis von $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$ die Vielfachheit $\alpha = \alpha(\mathfrak{D})$ bestimmt, mit der eine irreduzible Darstellung \mathfrak{D} von \mathfrak{G} mit *reellem* Charakter in \mathfrak{S} auftritt. Von einer irreduziblen Darstellung \mathfrak{D} mit *nicht-reellem* Charakter ist dagegen so nur die Summe der Vielfachheiten bekannt, mit welchen \mathfrak{D} und $\overline{\mathfrak{D}}$ in \mathfrak{S} vorkommen.

II. Es bleibt also als zweites Problem noch die Ermittlung der Vielfachheiten einer Darstellung mit *nicht-reellem* Charakter. Dies Problem ist leer, falls alle einfachen Charaktere von \mathfrak{G} reell sind. Im anderen Falle muß es funktionentheoretisch nach den bisherigen Methoden erledigt werden und

¹⁾ A. Hurwitz, Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich (§ 14), Math. Annalen 41 (1893) = Math. Werke, Bd. I, S. 427 ff.

²⁾ E. Hecke, Über ein Fundamentalproblem aus der Theorie der ellipt. Modulfunktionen, Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg VI (1928).

³⁾ E. Hecke, Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Abbildungen, insbesondere in der Theorie der ellipt. Modulfunktionen, Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg VIII (1930).

⁴⁾ C. Chevalley und A. Weil, Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Automorphismen des Funktionenkörpers, Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg X (1934).

führt, wie die Beispiele aus ³⁾, ⁴⁾ zeigen, zu sehr bemerkenswerten Beziehungen zur Arithmetik.

Wenn nun das algebraische Gebilde in Gestalt eines Körpers von automorphen Funktionen gegeben ist, wie etwa des Körpers der elliptischen Modulfunktionen, die bei einem Normalteiler \mathfrak{N} der Modulgruppe $\Gamma(1)$ von endlichem Index invariant bleiben, wo dann die Automorphismengruppe \mathfrak{G} die Faktorgruppe $\Gamma(1)/\mathfrak{N}$ ist, so läßt sich, wie ich in dieser Arbeit zeigen werde, das Problem I mit einer neuartigen Methode überraschend einfach und allgemein erledigen. Man braucht dabei nicht die Kenntnis *aller* einfachen Charaktere der Gruppe \mathfrak{G} , sondern erhält die Vielfachheit r , mit welcher eine irreduzible Darstellung \mathfrak{D} in $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$ auftritt, ausgedrückt allein durch den Charakter von \mathfrak{D} .

Das Hauptresultat spricht sich in folgender einfachen Formel aus:

Die Vielfachheit r einer irreduziblen Darstellung \mathfrak{D} von $\Gamma(1)/\mathfrak{N}$ mit dem Charakter χ innerhalb der Gruppe $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$ (dabei \mathfrak{D} nicht die identische Darstellung) ist

$$(1) \quad \chi(\mathfrak{D}) + \chi(\overline{\mathfrak{D}}) = r = \\ f - \frac{1}{N} \sum_{n \bmod N} \chi(U^n) - \frac{1}{2} \sum_{n \bmod 2} \chi(T^n) - \frac{1}{3} \sum_{n \bmod 3} \chi((TU)^n).$$

Dabei sind U, T die beiden Modulsstitutionen $\tau' = \tau + 1$, $\tau' = -\frac{1}{\tau}$, N ist die kleinste natürliche Zahl, für welche U^N zu \mathfrak{N} gehört, f der Grad von \mathfrak{D} .

Ich hatte ursprünglich diese Frage nur für die Kongruenzgruppe $\mathfrak{N} = \Gamma(N)$ der Stufe N behandelt, wo $\mathfrak{G} = \Gamma(1)/\Gamma(N)$ die inhomogene binäre Modulargruppe $\mathfrak{M}(N) \bmod N$ ist; es zeigte sich aber, daß die ganzen Entwicklungen wörtlich für alle Normalteiler der Modulgruppe von endlichem Index gelten.

An dieser Stelle sei noch die folgende Tatsache hervorgehoben: Das algebraische Gebilde, welches durch die invarianten Funktionen zu dem Normalteiler \mathfrak{N} definiert ist, ist *endlich-vieldeutig* unter allen algebraischen Gebilden allein schon durch seine Abbildungsgruppe \mathfrak{G} bestimmt (wenn man noch den Zusammenhang zwischen Geschlecht p , Ordnung μ von \mathfrak{G} und Exponent N durch Gleichung (5) als gegeben ansieht). Im Falle $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}(q)$ mit Primzahl q ist das Gebilde sogar *eindeutig* durch diese Daten fixiert⁵⁾.

Der Grundgedanke meiner Methode zum Beweis der Formel (1) ist die Benutzung der *Perioden* der Integrale oder Potentiale 1. Gattung. Irgend-

⁵⁾ H. Spies, Die Darstellung der inhomogenen Modulargruppe $\bmod q^n \dots$, Math. Annalen 111 (1935), S. 346.

⁶⁾ E. Hecke, Die eindeutige Bestimmung der Modulfunktionen q -ter Stufe durch algebraische Eigenschaften, Math. Annalen 111 (1935), S. 293.

ein System von f linear unabhängigen reellen oder komplexen Potentialen 1. Gattung von \mathfrak{R} , $j_1(\tau), \dots, j_f(\tau)$, das sich bei allen Substitutionen aus $\Gamma(1)$ bis auf additive Konstanten linear in sich umsetzt — kürzer: ein invariantes System —, erzeugt eine Darstellung der unendlichen Modulgruppe $\Gamma(1)$ durch affine Substitutionen in f Variablen. Einer jeden Modulsubstitution L entspricht dabei eine affine Substitution $M(L)$, deren homogener Bestandteil nur von der Klasse von $L \bmod \mathfrak{R}$ in $\Gamma(1)$ abhängt, und daher definieren diese homogenen Teile eine homogene Darstellung vom Grade f der Faktorgruppe $\mathfrak{G} = \Gamma(1)/\mathfrak{R}$. Wenn also L zu \mathfrak{R} gehört, so ist $M(L)$ eine reine Translation, und die Komponenten dieser Translation sind die Perioden, um welche sich die Potentiale $j_i(\tau)$ bei der Substitution L ändern. Ferner ist bei jeder parabolischen Substitution L aus \mathfrak{R} diese Periode gleich Null. Man kann daher durch Ändern der $j_i(\tau)$ um additive Konstanten erreichen, daß schon die Substitution $M(U)$, nicht erst $M(U^N)$, homogen ist; dies mag gleich vorausgesetzt werden. Eine jede affine Darstellung mit diesen Eigenschaften (bei festgegebenem \mathfrak{R}) mag kurz als „zulässige Darstellung der $\Gamma(1)$ “ bezeichnet werden.

Es ist klar, daß r verschiedene invariante Systeme von Potentialen, welche affine Darstellungen mit dem gleichen homogenen Teil erzeugen, sich in den Translationskomponenten dieser Darstellung unterscheiden müssen und daß also die Anzahl r der linear unabhängigen Systeme dieser Art mit der Anzahl der linear unabhängigen Möglichkeiten für die Translationskomponenten bei gegebenem homogenen Teil der Darstellung zusammenhängen muß.

Eine zulässige Darstellung in f Variablen läßt sich nun auf zwei verschiedene Arten festlegen:

1. Durch die homogenen Teile \mathfrak{D} und die Werte der f additiven Konstanten, die in der affinen Substitution $M(T)$ zur Substitution $T(\tau) = -\frac{1}{\tau}$ auftreten. Denn $M(U)$ und $M(T)$ erzeugen ja die ganze Gruppe.

2. Durch die homogenen Teile \mathfrak{D} und die Werte der Translationskomponenten in allen $M(L)$, wenn L zu \mathfrak{R} gehört. Da \mathfrak{R} eine freie Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden ist, genügt die Angabe der $M(L)$ für diese Erzeugenden L .

Benutzt man die zweite Art der Festlegung und die Tatsache, daß die Schar aller $2p$ Potentiale 1. Gattung bei \mathfrak{R} genau $2p$ unabhängige Translationen erfährt, so ergibt sich, daß jede zulässige Darstellung mit irreduziblem homogenen Teil durch genau ein bestimmtes System von Potentialen 1. Gattung tatsächlich realisiert ist (Vollständigkeitsatz § 4, Satz 6).

Benutzt man aber die erste Art, so sieht man, daß die f additiven Konstanten in der affinen Substitution $M(T)$, die wir zu einem Vektor \mathfrak{p} (Matrix

mit einer Spalte und f Zeilen) zusammenfassen, nicht willkürlich gewählt werden dürfen. Die durch die affinen Substitutionen $M(U)$ und $M(T)$ erzeugte affine Gruppe ist vielmehr dann und nur dann eine Darstellung der $\Gamma(1)$, wenn die definierenden Relationen der Modulgruppe

$$T^2 = (TU)^3 = 1$$

bei der Abbildung $L \rightarrow M(L)$ richtig bleiben. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_f, \mathfrak{E}$ bzw. die Matrizen f -ten Grades, welche in der homogenen Darstellung \mathfrak{D} den Moduls substitutionen S und der Identität entsprechen, so ergeben sich zwei Bedingungen für p , die in der Ausdrucksweise der Matrizen lauten:

$$\begin{aligned} (2) \quad & a) (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_T) \cdot p = 0, \\ & b) (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_{TU} + (\mathfrak{M}_{TV})^2) \cdot p = 0. \end{aligned}$$

Es sind lineare homogene Gleichungen für die f Komponenten von p .

Aus diesen Tatsachen folgt, daß eine irreduzible Darstellung \mathfrak{D} in der Gruppe $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}$ der Potentiale 1. Gattung genau so oft enthalten ist, wie die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen p des Gleichungssystems a), b) angibt. Ist also z der Rang dieses Systems, so ist die gesuchte Vielfachheit $r = f - z$, und es ist offenbar der Rang z

$$(3) \quad f - r = z \leq z(a) + z(b),$$

wenn $z(a)$, $z(b)$ die Rangzahlen des einzelnen Systems a) bzw. b) sind. Nun lassen sich diese einzelnen beiden Rangzahlen ja einfach aus den Charakteren der Matrizen $\mathfrak{M}_T, \mathfrak{M}_{TV}$ und ihren Potenzen berechnen. Und die einzige Schwierigkeit ist, festzustellen, daß in diesen Ungleichungen das Zeichen $=$ gilt (bis auf einen trivialen Zusatz, den ich hier bei dieser allgemeinen Orientierung unterdrücke (Gleichung (25), Satz 7)). Diese Aussage folgt nun sehr einfach nach Multiplikation von (3) mit dem Grade f der Darstellung \mathfrak{D} und Summation über alle irreduziblen Darstellungen \mathfrak{D} von \mathfrak{G} . In der so entstehenden Formel

$$(4) \quad \sum (f^2 - f \cdot z(a) - f \cdot z(b)) \leq \sum r f$$

ist nämlich der Bestandteil $\sum r f$ nach Definition gleich $2p$, während die linke Seite ebenfalls gleich $2p$ ist vermöge bekannter Eigenschaften der einfachen Charaktere endlicher Gruppen. Dabei wird der Zusammenhang zwischen Geschlecht und Index eines Normalteilers der Modulgruppe benutzt. Somit gilt in (4) das Gleichheitszeichen und daher ebenso in den einzelnen Ungleichungen (3). Damit ist die Behauptung (1) bewiesen (§ 4, Satz 8).

Durch die Bedingungen (2) sind die unbekannten Vektoren p_T , welche in der affinen Darstellung durch die κ Integralvektoren 1. Gattung zu \mathfrak{D} auftreten, auf eine Mannigfaltigkeit von nur $r = 2\kappa$ Dimensionen einge-

schränkt (wenn wir den Charakter von \mathfrak{D} als reell voraussetzen). Die Bedeutung dieser Reduktion zeigt sich nun auch darin, daß es weiterhin gelingt, die bilinearen Gleichungen, welche nach Riemann für die Integralperioden eines algebraischen Gebildes gelten, in unserem Falle in übersichtlicher Weise allein durch die Grundvektoren p_T auszudrücken (§ 5, Gl. (44)) und weiter: Nach passender Wahl gewisser $2 \times$ Grundlösungen $p = g''$ von (2) (die noch auf unendlich viele Arten möglich ist) kann man in der linearen Schar der \times Integralvektoren zu \mathfrak{D} eine Schar von \times „Normalintegralen“ auswählen, deren Grundvektoren p_T aus den g'' mit Hilfe einer eindeutig bestimmten Matrix $(\tau_{\alpha\beta})$ des Grades \times ausdrückbar sind. Diese Matrix $(\tau_{\alpha\beta})$ ist vom Typus einer Riemannschen Perioden-Matrix: symmetrisch und mit positiv definitem Imaginärteil. An Stelle von \times^2 Freiheitsgraden bei den p_T bleiben somit nur noch $\frac{1}{2} \times (\times + 1)$, wie bei den algebraischen Gebilden vom Geschlecht \times (§ 6, Satz 13).

Zu einem ähnlichen Ergebnis würde man kommen, wenn man von der Perioden-Matrix des vollen Systems der p Integrale zu \mathfrak{N} ausgeht. Die Automorphismen des Gebildes bedeuten für die Perioden eine komplexe Multiplikation 1. Ordnung. Und aus der Existenz dieser folgt, daß die Perioden-Matrix reduzibel wird, indem sie durch geeignete Transformation in Teilmatrizen zerfällt, welche den irreduziblen Darstellungen der Abbildungsgruppe entsprechen. Zur Auswertung dieser Aussage im konkreten Falle braucht man aber die Kenntnis der Erzeugenden des Normalteilers \mathfrak{N} , deren Berechnung schon in den niedersten Fällen praktisch fast undurchführbar ist. Für die Anwendungen, wo die Integrale durch Potenzreihen gegeben sind, ist gerade die Zurückführung des Problems auf das Verhalten der Integrale nur bei den zwei Substitutionen U und T eine erhebliche Erleichterung.

In der oben erklärten Matrix $(\tau_{\alpha\beta})$ steckt als akzessorisches Element noch die Auswahl der Koordinatenvektoren g'' im Raum der Lösungen von (2), während die Matrix unabhängig ist von der Wahl von \mathfrak{D} innerhalb der Klasse äquivalenter Darstellungen. Eine erste Einschränkung dieser Unbestimmtheit wird zunächst dadurch erzielt, daß wir verlangen, die Komponenten der Vektoren g'' sollen in dem Koeffizientenkörper von \mathfrak{D} liegen, und diesen dann möglichst einfach wählen. Hierzu ist aber eine genaue Kenntnis der algebraischen Natur von \mathfrak{D} notwendig. Deshalb wird weiterhin die Untersuchung nur für die Kongruenzgruppen $\mathfrak{N} = \Gamma(q)$ von Primzahlstufe q durchgeführt und für sie in § 7 bewiesen, daß jede irreduzible Darstellung der inhomogenen Modulargruppe $\mathfrak{M}(q)$ im Körper ihres Charakters realisierbar ist. Dabei ergibt sich als Nebenresultat die für andere Fragen sehr wichtige Tatsache, daß der entsprechende Satz für die homogene Modulargruppe $\mathfrak{M}_\lambda(q)$ nicht zutrifft (Satz 15 in § 7).

Die noch verbleibende Unbestimmtheit muß durch arithmetische Zusatzbedingungen über die auftretenden Nenner beseitigt werden, sowohl für die Koeffizienten der Darstellung \mathfrak{D} als auch für die Komponenten der g^n . Diesen Bedingungen entspricht bei dem algebraischen Gebilde vom Geschlecht κ etwa der Übergang von einem beliebigen System von 2κ Rückkehrschnitten auf der Riemannschen Fläche zu einem kanonischen Schnittsystem. In dieser Arbeit gehe ich aber auf diese Fragen nicht weiter ein.

Was nun noch an willkürlichen Elementen in den $\tau_{\alpha\beta}$ bleibt, ist das Gegenstück zu dem Begriff „Riemannsche Periodentransformation bei den Normalintegralen 1. Gattung“, aber hier mit der bemerkenswerten Erweiterung, daß der Koeffizientenbereich nicht der rationale Zahlkörper, sondern der total reelle Körper $K(\chi)$ vom Grade n ist. Der einfachste Fall mit $n > 1$ führt zu Periodensystemen, wie sie zuerst Herr Hilbert bei den Modulfunktionen von n Variablen zu einem Körper n -ten Grades eingeführt hat: Die simultanen Perioden einer Funktion von n Variablen sollen folgende Gestalt haben:

$$\mu^{(l)} \cdot x_i + \nu^{(l)} \cdot y_i, \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Mit festem x_i, y_i durchlaufen μ, ν alle ganzen Zahlen des Körpers, wobei durch die oberen Indizes l die Konjugierten in diesem Körper bezeichnet sind. Die erwähnten Periodentransformationen sind dann die Substitutionen der Modulgruppe in diesem Körper, simultan mit konjugierten Koeffizienten ausgeübt auf die n Größenpaare (x_i, y_i) .

Im letzten Paragraphen werden invariante Aussagen über die Periodenmatrix $\tau_{\alpha\beta}$ für einzelne spezielle $\Gamma(q)$ bewiesen, die sich ohne Heranziehung der oben angedeuteten arithmetischen Verschärfungen formulieren lassen, wie etwa, daß bei den Funktionen der Stufe 11 alle 26 Integrale 1. Gattung sich als elliptische Integrale wählen lassen (§ 8).

Das nächste Ziel ist dann die Anwendung der entwickelten Theorie auf Integrale, die durch unendliche Reihen, als vierfache Thetareihen, gegeben sind, und die Diskussion der Konsequenzen für die analytische Zahlentheorie der quaternären quadratischen Formen.

Bezeichnungen. U und T sind durchweg zur Bezeichnung der beiden erzeugenden Modulsstitutionen gebraucht:

$$U\tau = \tau + 1, \quad T\tau = -\frac{1}{\tau}.$$

Der Querstrich über irgendeinem Zeichen, wie \bar{x} , bedeutet den Übergang zum Konjugiert-komplexen. Kleine deutsche Buchstaben a, z, \dots bedeuten Vektoren, d. h. Matrizen mit einer Kolonne. Für quadratische Matrizen verwenden wir große deutsche Buchstaben $\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{S}, \dots$. Der Akzent ' an deutschen Buchstaben bedeutet den Übergang zur transponierten Matrix,

speziell also etwa \mathfrak{x}' eine Matrix mit einer Zeile, deren Elemente die Komponenten von \mathfrak{x} sind, und weiter ist dann $\mathfrak{x}' \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y}$ der bilineare Ausdruck

$$\mathfrak{x}' \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y} = \sum_{r,s} a_{rs} x_r y_s,$$

wenn \mathfrak{A} die quadratische Matrix (a_{rs}) , vom Grade f und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ Spaltenvektoren mit f Zeilen x_r, y_s sind. \mathfrak{E} ist die Einheitsmatrix von einem Grade, der in jedem Falle aus dem Zusammenhang ersichtlich ist. Mit \mathfrak{D} oder \mathfrak{D}_f wird eine Darstellung einer endlichen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen in f Variablen bezeichnet.

$\mathfrak{M}(N)$ ist die Gruppe der binären ganzzahligen Matrizen $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc = 1$ im Restklassenring mod N , wobei S und $-S$ als nicht verschieden gelten. Ebenso ist $\mathfrak{M}_\lambda(N)$ die analoge homogene Gruppe, wo S und $-S$ nicht als gleich gelten.

$\Gamma(N)$ ist die Gruppe der Moduls substitutionen, deren Koeffizientenschema kongruent $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N}$ ist, also $\Gamma(1)$ die volle unendliche Modulgruppe.

§ 2.

Grundlagen für die Theorie ausgezeichneter Untergruppen der Modulgruppe.

Es sei $\Gamma(1)$ das System der Moduls substitutionen $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ in der Variablen τ , \mathfrak{R} ein Normalteiler von $\Gamma(1)$ mit endlichem Index μ . Die bei \mathfrak{R} invarianten Funktionen von τ bilden bei passender Einschränkung der Singularitäten einen algebraischen Funktionenkörper, sein Geschlecht p , das auch das Geschlecht von \mathfrak{R} heißt, läßt sich mit Hilfe von drei zusätzlichen Angaben über \mathfrak{R} , nämlich des „Verzweigungs-Schemas“ ausdrücken. Setzen wir von nun ab voraus, daß $p > 0$ — und nur in diesem Falle ist die Fragestellung dieser Arbeit sinnvoll —, so weiß man, daß dieses Verzweigungs-Schema von der Form $\{2, 3, N\}$ sein muß⁷⁾. Das bedeutet, daß \mathfrak{R} keine elliptischen Substitutionen enthält und daß N die kleinste natürliche Zahl ist, wofür die Substitution $\tau' = \tau + N$ zu \mathfrak{R} gehört. Das Geschlecht p hat dann den Wert

$$(5) \quad p = 1 + \frac{\mu}{12 \cdot N} (N - 6).$$

⁷⁾ Für die allgemeine Theorie der Normalteiler der Modulgruppe vgl. das Buch von Klein-Fricke, Vorl. über d. Theorie der ellipt. Modulfunktionen, Leipzig 1890, Bd. I, S. 333—343.

Die Anzahl der nach \mathfrak{N} nicht-äquivalenten rationalen Punkte, d. h. die Anzahl der rationalen Spitzen des Fundamentalbereiches von \mathfrak{N} , ist

$$\sigma = \frac{\mu}{N},$$

da dieser Bereich aus μ Exemplaren des Fundamentalbereiches von $\Gamma(1)$ mit je einer rationalen Spitze besteht und andererseits jeder rationale Punkt ebenso wie offenbar der Punkt $\tau = \infty$ bei genau $N \bmod \mathfrak{N}$ verschiedenen Substitutionen fest bleibt.

Die Gruppe \mathfrak{N} ist eine freie Gruppe mit $2p + \sigma - 1$ erzeugenden Substitutionen. Das wird bekanntlich bewiesen durch die Betrachtung des geschlossen gedachten Fundamentalbereiches von \mathfrak{N} als Riemannscher Fläche, welche dann durch p Paare von Rückkehr-Schnitten und σ nach den rationalen Punkten führenden Hilfslinien einfach zusammenhängend wird. Die Erzeugenden werden so gewählt, daß

(6) $U_\varrho, \varrho = 1, 2, \dots, \sigma - 1$ parabolische Substitutionen sind,

die übrigen Erzeugenden seien mit

(7) $L_v \ (v = 1, 2, \dots, 2p)$

bezeichnet.

Die p Integrale 1. Gattung von \mathfrak{N} sind eindeutige überall reguläre Funktionen von τ , welche bei den Substitutionen von \mathfrak{N} sich um additive Konstanten, die Perioden der Integrale, ändern. Ist $f(\tau)$ eine Funktion von \mathfrak{N} , so ist auch $f(S\tau)$ eine solche, wo S ein Element aus $\Gamma(1)$ bedeutet. Hierdurch ist eine Abbildung des Funktionenkörpers zu \mathfrak{N} auf sich definiert, die umkehrbar eindeutig analytisch ist. Da S_1 und S_2 dieselbe Abbildung bewirken, wenn sie $\bmod \mathfrak{N}$ in derselben Klasse von $\Gamma(1)$ liegen, so bilden diese Abbildungen eine Gruppe, die Automorphismen-Gruppe \mathfrak{G} des Körpers, die offenbar mit der Faktorgruppe $\Gamma(1)/\mathfrak{N}$ isomorph ist. Die Schar der p linear unabhängigen Integrale 1. Gattung geht bei den Abbildungen von \mathfrak{G} bis auf additive Konstanten in sich über, und die Differentiale 1. Gattung erfahren also bei den Substitutionen von $\Gamma(1)$ lineare homogene Substitutionen, die eine Darstellung \mathfrak{S} der Abbildungsgruppe \mathfrak{G} bilden. Die $2p$ Real- und Imaginärteile dieser Differentiale setzen sich also bei $\Gamma(1)$ nach einer Gruppe um, die ebenfalls eine Darstellung von \mathfrak{G} ist und die in der Ausdrucksweise der Gruppentheorie als $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$ zu bezeichnen ist, wobei $\overline{\mathfrak{S}}$ die zu \mathfrak{S} konjugiert-komplexe Darstellung bedeutet.

Das Ziel des ersten Teiles dieser Arbeit (§ 1 bis 4) ist die Zerlegung von $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$ in irreduzible Bestandteile, d. h. die Beantwortung der Frage: Wie oft ist eine irreduzible Darstellung von \mathfrak{G} , gegeben gedacht durch ihren Charakter, in der Darstellung $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$ enthalten?

Die Gruppe \mathfrak{S} werde kurz als die Integralgruppe von \mathfrak{R} bezeichnet, genauer als die Gruppe der Differentiale 1. Gattung. Da die Ableitung eines Integrales 1. Gattung nach τ eine ganze Modulform zu \mathfrak{R} von der Dimension -2 ist, welche in allen rationalen Spitzen verschwindet, so heißt die Gruppe \mathfrak{S} auch die Gruppe der Spitzenformen zu \mathfrak{R} von der Dimension -2 .

Die Real- und Imaginärteile der p Integrale 1. Gattung sind die $2p$ linear unabhängigen reellen Potentiale 1. Gattung. Auch jede lineare Verbindung dieser mit komplexen Koeffizienten nennen wir Potential 1. Gattung. Die für das folgende wichtigsten Eigenschaften dieser Schar formulieren wir besonders als Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Für jedes Potential 1. Gattung zu \mathfrak{R} , $f(\tau)$, gilt

$$f(L\tau) = f(\tau),$$

wenn L eine parabolische Substitution aus \mathfrak{R} ist.

Diese Gleichung folgt für ein Integral 1. Gattung bekanntlich aus seiner Regularität in derjenigen Ortsvariablen, welche für den rationalen Fixpunkt von L anzusetzen ist. Für $\tau = \infty$ ist z. B. $e^{\frac{2\pi i \tau}{N}}$ Ortsvariable. Also ist die Behauptung auch für die Potentiale richtig.

Hilfssatz 2. Es gibt zu beliebig gegebenen $2p$ komplexen Konstanten a_v ($v = 1, \dots, 2p$) stets ein Potential 1. Gattung, das bei den Erzeugenden L_v von \mathfrak{R} aus Gleichung (7) sich so verhält:

$$f(L_v \tau) = f(\tau) + a_v \quad (v = 1, \dots, 2p).$$

Dieses f ist eine Konstante dann und nur dann, wenn alle $a_v = 0$ sind.

Diese Tatsache folgt einfach daraus, daß die Substitutionen L_v den Rückkehrschnitten auf der Riemannschen Fläche des Funktionenkörpers entsprechen und daß bekanntlich stets Potentiale 1. Gattung auf der Fläche existieren, die an den $2p$ Schnitten beliebig vorgeschriebene Perioden aufweisen.

Hilfssatz 3. Ein volles System von $2p$ Potentialen $f_n(\tau)$ 1. Gattung ($n = 1, 2, \dots, 2p$) zu \mathfrak{R} verhält sich bei $\Gamma(1)$ so: Zu jeder Modulschubstitution S gibt es eine quadratische Matrix \mathfrak{M}_S des Grades $2p$ mit konstanten Elementen $c_{n1}(S)$ und $2p$ weitere Konstanten $c_n(S)$, so daß

$$(8) \quad f_n(S\tau) = \sum_{i=1}^{2p} c_{ni}(S) \cdot f_i(\tau) + c_n(S), \quad n = 1, 2, \dots, 2p.$$

Die Matrizen \mathfrak{M}_S hängen nur von der Klasse von S in $\Gamma(1) \bmod \mathfrak{R}$ ab und bilden die Darstellung $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}$ der Abbildungsgruppe $\mathfrak{G} = \Gamma(1)/\mathfrak{R}$.

Es ist für die Beurteilung des ganzen Ansatzes wichtig, sich zu überlegen, daß man an Stelle der $2p$ Potentiale $f_n(\tau)$ auch $2p$ analytische Funktionen von τ finden kann, welche ebenfalls die in den drei Hilfssätzen formulierten

Eigenschaften haben und die sich mit demselben Erfolg für unsere Theorie verwenden lassen, nämlich das System der p Integrale 1. Gattung und p passend gewählte Integrale 2. Gattung.

Für alle Integrale 1. und 2. Gattung gilt nämlich Hilfssatz 1. Ferner ist es trivial, daß man aus p Integralen 1. Gattung und p passend gewählten Integralen 2. Gattung Funktionen mit beliebig vorgeschriebenen Periodizitätsmodulen a_r linear darstellen kann (Hilfssatz 2). Endlich läßt sich durch einfache gruppentheoretische Überlegungen zeigen, daß man diese p Integrale 2. Gattung überdies als invariantes System gegenüber $\Gamma(1)$ wählen kann (Hilfssatz 3). Daß die Gruppe dieser $2p$ Integrale dann gerade $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$ ist, folgt daraus, daß sie sich topologisch genau wie diese definieren läßt^{a)}.

Die Gruppe $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{S}}$ kann also auch als die Gruppe der Differentiale 1. und 2. Gattung bezeichnet werden.

§ 3.

Konstruktion aller zulässigen Darstellungen der unendlichen Modulgruppe durch affine Substitutionen.

In diesem und dem folgenden Paragraphen sollen der Kürze halber unter „Integral“ und „Potential“ ohne weiteren Zusatz stets solche der 1. Gattung verstanden werden.

Durch das System der $2p$ Potentiale $f_n(\tau)$ wird nach (8), Hilfssatz 3 eine Darstellung der unendlichen Modulgruppe $\Gamma(1)$ durch affine Substitutionen in $2p$ Variablen erzeugt (dabei wird benutzt, daß die $2p + 1$ Funktionen $1, f_n(\tau)$ linear homogen unabhängig sind). Wir untersuchen die besonderen Eigenschaften dieser Darstellung und betrachten zu diesem Zwecke gleich Darstellungen in einer beliebigen Zahl f von Variablen.

Eine affine Darstellung der $\Gamma(1)$ in f Variablen x_1, x_2, \dots, x_f liegt vor, wenn zu jeder Substitution S aus $\Gamma(1)$ eine affine Substitution $M(S)$ in f Variablen gegeben ist

$$(9) \quad M(S): \quad x_n \rightarrow \sum_{i=1}^f c_{ni}(S) x_i + c_n(S), \quad n = 1, \dots, f,$$

und wenn die Zusammensetzung dieser $M(S)$ isomorph mit der der S in $\Gamma(1)$ verläuft. Dabei mag überdies der Identität $S = I$ in $\Gamma(1)$ ebenfalls die identische Transformation der x_n entsprechen. Das einzelne $M(S)$ ist bestimmt durch den homogenen Bestandteil, die Matrix f -ten Grades

$$\mathfrak{M}_S = (c_{ni}(S)),$$

^{a)} Vgl. meine unter ^{a)} zitierte Arbeit, speziell § 1.

und ihren Translationsteil, den wir als Vektor p_S (Matrix mit einer Spalte und f Zeilen)

$$p_S = \begin{pmatrix} c_1(S) \\ c_2(S) \\ \vdots \\ c_f(S) \end{pmatrix}$$

schreiben. Fassen wir ebenso die Variablen x_n zu einem Vektor \mathfrak{x} mit den Komponenten x_n zusammen, so schreibt sich (9) in der Bezeichnung der Matrizentheorie

$$(16) \quad \mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{M}_S \cdot \mathfrak{x} + p_S.$$

I. Die Kompositionsregel lautet offenbar

$$(11) \quad \mathfrak{M}_{SR} = \mathfrak{M}_S \cdot \mathfrak{M}_R, \quad p_{SR} = p_S + \mathfrak{M}_S \cdot p_R,$$

wobei S, R -beliebige Elemente aus $\Gamma(1)$ bedeuten.

Speziell gilt

$$(12) \quad \begin{aligned} p_{S^{-1}} &= -\mathfrak{M}_S^{-1} \cdot p_S, \\ p_{SLS^{-1}} &= p_S - \mathfrak{M}_{SL} \cdot p_S + \mathfrak{M}_S \cdot p_L. \end{aligned}$$

Wir nennen zwei solche Darstellungen äquivalent, wenn sie sich durch eine affine Transformation der Variablen ineinander überführen lassen. Eine affine Darstellung heiße ferner reduzibel oder irreduzibel, wenn der homogene Teil \mathfrak{M}_S das ist. (Wir brauchen diesen Begriff nur, wenn die \mathfrak{M}_S eine endliche Gruppe bilden.)

Wird die Darstellung $M(S)$ durch ein invariantes System von f Potentialen zu \mathfrak{R} realisiert (welche linear inhomogen unabhängig sind), so ist weiter

II. $\mathfrak{M}_L =$ Einheitsmatrix \mathfrak{E} , wenn $L \subset \mathfrak{R}$,

$\mathfrak{M}_S = \mathfrak{M}_R$, wenn S und R sich nur um einen Faktor aus \mathfrak{R} unterscheiden.

Die \mathfrak{M}_S bilden also eine Darstellung der endlichen Faktorgruppe $\Gamma(1)/\mathfrak{R}$. Ferner ist in diesem Falle auch nach Hilfssatz 1

$p_L = 0$, wenn L eine parabolische Substitution aus \mathfrak{R} ist.

Speziell ist also $p_{UN} = 0$ und daher wegen I:

$$0 = p_{UN} = (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_U + \mathfrak{M}_U^2 + \dots + \mathfrak{M}_U^{N-1}) \cdot p_U.$$

Durch eine affine Substitution $y_n = x_n + \gamma_n$ mit konstanten γ_n läßt sich also die Darstellung in eine quivalente überführen, die die gleichen homogenen Teile \mathfrak{M}_S , aber $p_U = 0$ hat (wie man aus der Diagonalgestalt von \mathfrak{M}_U sofort erkennt).

III. Wir setzen daher gleich voraus

$$(13) \quad p_U = 0.$$

Definition. Eine affine Darstellung $M(S) = (\mathfrak{M}_S, p_S)$ mit den Eigenschaften I, II, III heiße kurz eine **zulässige Darstellung** der $\Gamma(1)$.

Hilfssatz 3 bedeutet, die $2p$ unabhängigen Potentiale können so gewählt werden, daß sie eine zulässige Darstellung der $\Gamma(1)$ erzeugen. Wir wollen nun einen Überblick über alle zulässigen Darstellungen, insbesondere über die irreduziblen gewinnen.

Satz 1. Wenn in einer Darstellung (\mathfrak{M}_S, p_S) mit den Eigenschaften I, II die $p_L = 0$ sind für alle L aus \mathfrak{R} , so kann sie durch eine Translation $x'_n = x_n + \gamma_n$ in die durchweg homogene Darstellung $(\mathfrak{M}_S, 0)$ transformiert werden.

Beweis. Die Darstellung (\mathfrak{M}_S, p_S) ist nach Voraussetzung offenbar bereits eine Darstellung der endlichen Gruppe $\mathfrak{G} = \Gamma(1)/\mathfrak{R}$ und kann als homogene Darstellung dieser in $f+1$ Variablen aufgefaßt werden:

$$\begin{aligned} z_0 &\rightarrow z_0, \\ z_n &\rightarrow \sum_{i=1}^f c_{ni}(S) \cdot z_i + c_n(S) \cdot z_0, \quad n = 1, \dots, f. \end{aligned}$$

Diese endliche homogene Gruppe in $f+1$ Variablen ist reduzibel, da z_0 fest bleibt, und nach dem Satz von Maschke werden also durch den Übergang von z_n zu $y_n = z_n + \gamma_n z_0$ mit passendem konstanten γ_n die Substitutionen $(f+1)$ -ten Grades zerspalten in solche, welche die f Variablen y_n ($n \geq 1$) nur unter sich umsetzen, d. h. die $x_n + \gamma_n$ werden homogen transformiert, wenn auf die x_n die affine Gruppe (\mathfrak{M}_S, p_S) ausgeübt wird.

Satz 2. Eine zulässige Darstellung ist vollkommen bestimmt durch die beiden Matrizen $\mathfrak{M}_U, \mathfrak{M}_T$ und den Vektor p_T .

Denn $M(U) = (\mathfrak{M}_U, 0)$ und $M(T) = (\mathfrak{M}_T, p_T)$ erzeugen ja die ganze Gruppe affiner Substitutionen.

Der Vektor p_T heiße der Grundvektor der betreffenden Darstellung oder auch des Integral- (bzw. Potential-) vektors, in deren affiner Darstellung er auftritt.

Wenn $M(S) = (\mathfrak{M}_S, p_S)$ und $M^*(S) = (\mathfrak{M}_S, p_S^*)$ zwei zulässige Darstellungen mit demselben homogenen Teil \mathfrak{M}_S sind, dann ist auch $(\mathfrak{M}_S, \lambda p_S + \mu p_S^*)$ eine zulässige Darstellung, wenn λ, μ beliebige, von S unabhängige komplexe Zahlen sind.

Satz 3. Die affinen Substitutionen $(\mathfrak{M}_U, 0), (\mathfrak{M}_T, p_T)$ erzeugen durch Zusammensetzung nach I dann und nur dann eine zulässige Darstellung von $\Gamma(1)$, wenn $\mathfrak{M}_U, \mathfrak{M}_T$ die Erzeugenden einer homogenen Darstellung der $\Gamma(1)/\mathfrak{R}$ sind und wenn der Vektor p_T eine Lösung p der Gleichungen ist:

$$(14) \quad \begin{aligned} \text{a) } &(\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_T) \cdot p = 0, \\ \text{b) } &(\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_{TU} + \mathfrak{M}_T^2 U) \cdot p = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Damit $M(U) = (\mathfrak{M}_U, 0)$ und $M(T) = (\mathfrak{M}_T, p_T)$ überhaupt eine Darstellung der $\Gamma(1)$ erzeugen, ist notwendig und hinreichend, daß die

definierenden Relationen der abstrakten Gruppe $\Gamma(1)$ bei der Abbildung auf die $M(S)$ -Menge richtig bleiben. Diese Relationen sind bekanntlich

$$T^2 = (TU)^3 = \text{Identität } I.$$

D. h. es muß sein

$$(15) \quad \begin{aligned} M(T)^3 &= (\mathfrak{E}, 0), \\ M(TU)^3 &= (\mathfrak{E}, 0). \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, daß die homogenen Bestandteile \mathfrak{M}_S bereits die Erzeugenden einer Darstellung der endlichen Gruppe $\Gamma(1)/\mathfrak{N}$ sind, so ergibt die Ausrechnung von (15) nach der Kompositionsregel (11) genau die Behauptung.

Die charakteristischen Wurzeln der Matrix \mathfrak{M}_{TV} sind dritte Einheitswurzeln, die von \mathfrak{M}_T sind ± 1 . Daher ist der Rang $z(a)$ des Gleichungssystems a) allein gleich der Vielfachheit der Wurzel 1 bei \mathfrak{M}_T , ebenso der Rang $z(b)$ von b) allein die Vielfachheit der Wurzel 1 bei \mathfrak{M}_{TV} . Diese Vielfachheiten lassen sich aber bekanntlich durch die Charaktere der Matrizen und ihrer Potenzen ausdrücken; und da der Rang des vereinigten Systems a) und b) höchstens gleich der Summe der beiden Rangzahlen sein kann, so folgt

Satz 4. *Der Rang des Gleichungssystems a), b) aus Satz 3 ist kleiner oder gleich*

$$\frac{1}{2} \sum_{n \bmod 3} \chi(T^n) + \frac{1}{2} \sum_{n \bmod 3} \chi((TU)^n).$$

Hierbei bedeutet $\chi(S)$ den Charakter der durch $\mathfrak{M}_T, \mathfrak{M}_U$ erzeugten homogenen Darstellung \mathfrak{M}_S der endlichen Gruppe $\Gamma(1)/\mathfrak{N}$.

Wir werden im nächsten Paragraphen zeigen, daß in der Aussage von Satz 4 sogar das Gleichheitszeichen gilt, wenn die \mathfrak{M}_S eine irreduzible Darstellung bilden, die nicht die identische ist.

Zu einer gegebenen irreduziblen homogenen Darstellung \mathfrak{M}_S der $\Gamma(1)/\mathfrak{N}$ mit dem Charakter $\chi(S)$ suche man jetzt alle Vektoren p von der Art, daß die zulässige affine Darstellung, die aus

$$M(U) = (\mathfrak{M}_U, 0) \quad \text{und} \quad M(T) = (\mathfrak{M}_T, p)$$

erzeugt wird, mit der homogenen Darstellung $(\mathfrak{M}_S, 0)$ affin äquivalent ist.

Dann gilt

Satz 5. *Diese p sind genau diejenigen Vektoren, welche die Gestalt*

$$(16) \quad p = a - \mathfrak{M}_T \cdot a,$$

wobei

$$(17) \quad a - \mathfrak{M}_U \cdot a = 0$$

ist, haben. Die Anzahl $W(\chi)$ der linear unabhängigen p ist

$$(18) \quad W(\chi) \leq \frac{1}{N} \sum_{n \bmod N} \chi(U^n).$$

Beweis. Wegen der Irreduzibilität von \mathfrak{M}_S entstehen die mit $(\mathfrak{M}_S, 0)$ äquivalenten zulässigen Darstellungen aus dieser durch die Variablen-Transformation $\eta = \lambda \cdot \xi + a$, wo λ ein konstanter Skalar und a ein konstanter Vektor ist. In den Variablen η hat die affine Darstellung die Gestalt

$$(\mathfrak{M}_S, a - \mathfrak{M}_S a).$$

Für $S = U$ muß also sein

$$(17) \quad a - \mathfrak{M}_U \cdot a = 0,$$

und für $S = T$ ist daher

$$(16) \quad p = a - \mathfrak{M}_T \cdot a.$$

Die Anzahl $W(\chi)$ der so darstellbaren unabhängigen Vektoren p ist höchstens so groß wie die Anzahl der Vektoren a mit der Bedingung (17). Diese Anzahl wiederum ist gleich der Vielfachheit der charakteristischen Wurzel 1 in der Matrix \mathfrak{M}_U . Daraus folgt die Behauptung von Satz 5.

Es wird sich nachher wieder ergeben, daß in der Ungleichung (18) das Zeichen $=$ gilt, wenn die Darstellung \mathfrak{M}_S nicht die Identität ist.

§ 4.

Der Vollständigkeitssatz für die affine Gruppe der Potentiale und ihre Zerfällung.

Satz 6. Jede irreduzible zulässige Darstellung $M(S) = (\mathfrak{M}_S, p_S)$ der Modulgruppe, in welcher mindestens eine reine Translation (\mathfrak{E}, p_L) mit $p_L \neq 0$ vorkommt, wird durch ein System von Potentialen tatsächlich realisiert. Das System ist durch diese Eigenschaft völlig bestimmt, nicht nur bis auf additive Konstanten.

Beweis. Die Darstellung habe den Grad f . Nach § 1, Hilfssatz 1 und 2 gibt es dann zunächst f Potentiale $j_n(\tau)$, ($n = 1, 2, \dots, f$), die wir wieder zu einem Vektor $j(\tau)$ zusammenfassen, derart, daß für die $2p + \sigma - 1$ Erzeugenden L, U_θ der Gruppe \mathfrak{R} aus (6), (7) gilt

$$(19) \quad \begin{aligned} j(L, \tau) &= j(\tau) + p_L, & p &= 1, \dots, 2p, \\ j(U_\theta \tau) &= j(\tau), & \theta &= 1, \dots, \sigma - 1. \end{aligned}$$

Die p_L sind dabei der vorgelegten Darstellung $M(L)$ entnommen. Die $j_n(\tau)$ erweisen sich nun bis auf additive Konstanten als die gesuchten Potentiale.

Denn da die L, U_θ die freien Erzeugenden der Gruppe \mathfrak{R} sind und diese Gruppe auch auf die Translationen $M(L) = (\mathfrak{E}, p_L)$ unserer Darstellung abgebildet ist, so folgt aus (19) zunächst

$$(20) \quad j(L\tau) = j(\tau) + p_L \quad \text{für alle } L \in \mathfrak{R}.$$

Also ist insbesondere der Vektor $j(\tau)$ nicht konstant, da ein p_L von Null verschieden sein soll.

Nun sei S eine beliebige Modulsstitution. Wir setzen

$$(21) \quad g(\tau) = j(S\tau)$$

und wollen erst zeigen, daß $g(\tau)$ sich von

$$g^*(\tau) = \mathfrak{M}_S \cdot j(\tau)$$

nur um einen additiven konstanten Vektor unterscheidet, weil die Differenz bei allen L aus \mathfrak{N} invariant bleibt. In der Tat folgt aus (20), (21)

$$(22) \quad g(S^{-1}LS\tau) = g(\tau) + p_L.$$

Übt man andererseits auf die Vektorgleichung

$$j(S^{-1}LS\tau) = j(\tau) + p_{S^{-1}LS}$$

die Transformation \mathfrak{M}_S aus und berücksichtigt, daß nach (12)

$$p_{S^{-1}LS} = \mathfrak{M}_S^{-1} \cdot p_L,$$

so folgt

$$g^*(S^{-1}LS\tau) = g^*(\tau) + p_L.$$

Da nun mit L auch $S^{-1}LS$ die ganze Gruppe \mathfrak{N} durchläuft, so erweist sich die Differenz $g^*(\tau) - g(\tau)$ bei der Gruppe \mathfrak{N} als periodenfrei, ist also ein konstanter Vektor p_S^* . Es gilt also für jedes S aus $\Gamma(1)$

$$(23) \quad j(S\tau) = \mathfrak{M}_S \cdot j(\tau) + p_S^*.$$

Da hiernach die Differentiale $dj_n(\tau)$ sich nach der irreduziblen Darstellung \mathfrak{M}_S umsetzen, so sind sie entweder linear unabhängig oder sie sind alle identisch Null. Letzteres ist nach Konstruktion nicht der Fall, also ist (\mathfrak{M}_S, p_S^*) aus (23) auch eine Darstellung von \mathfrak{G} . Sie stimmt mit der gegebenen (\mathfrak{M}_S, p_S) für alle S aus \mathfrak{N} überein, also kann sie nach Satz 1 durch Ersatz von $j_n(\tau)$ durch $j_n(\tau) + \text{const.}$ in die gegebene übergeführt werden.

Gäbe es noch eine zweite Lösung unseres Problems, so wäre die Differenz ein Potentialvektor, der sich nach der irreduziblen Darstellung $(\mathfrak{M}_S, 0)$ umsetzt. Er muß dann konstant sein, weil er bei \mathfrak{N} invariant bleibt. Dieser konstante Vektor α hat weiter nach Definition die Eigenschaft

$$(24) \quad \alpha = \mathfrak{M}_S \cdot \alpha.$$

Wäre er nicht Null, so würde die lineare Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{x} = t\alpha$ des x -Raumes durch die irreduzible Gruppe \mathfrak{M}_S in sich übergehen, dann müßte diese Teilmenge der ganze x -Raum, also $f = 1$ sein, und nach (24) wäre \mathfrak{M}_S die identische Darstellung, was gegen die Voraussetzung ist.

Nunmehr ergibt sich die Bestimmung der Vielfachheit r leicht durch Verbindung der Sätze 3, 4, 5, 6.

Es sei eine bestimmte irreduzible Darstellung $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\chi)$ der Faktorgruppe $\Gamma(1)/\mathfrak{M}$ gegeben. Ihr Charakter sei $\chi(S)$ und ihr Grad $f = f(\chi)$. Sie sei genau r mal in $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}$ enthalten. Dann gibt es also genau r Potentialvektoren $j^s(\tau)$ ($s = 1, \dots, r$) (mit f Komponenten), deren Differentiale linear unabhängig sind und die sich bei $\Gamma(1)$ nach einer zulässigen Darstellung (\mathfrak{M}_S, p'_S) mit gewissen p'_S umsetzen.

Andererseits wird nach dem Vollständigkeitssatz 6 jede zulässige Darstellung mit diesen \mathfrak{M}_S durch genau eine lineare Kombination

$$j(\tau) = \lambda_1 j^1(\tau) + \dots + \lambda_r j^r(\tau) + a$$

realisiert, worin die λ_s beliebige konstante Skalare und a ein konstanter Vektor ist, der nach Satz 5 an die einzige Bedingung

$$a - \mathfrak{M}_U \cdot a = 0$$

gebunden ist. Der zu $j(\tau)$ gehörige Vektor p_T aus der zulässigen Darstellung ist

$$p_T = \lambda_1 p'_1 + \dots + \lambda_r p'_r + c$$

mit

$$c = a - \mathfrak{M}_T \cdot a.$$

Aus $p_T = 0$ folgt $j(\tau) = \text{const.}$, also alle $\lambda_s = 0$ und daher auch $c = 0$. Mithin bilden die p_T eine lineare Schar von genau $r + W(\chi)$ unabhängigen Elementen ($W(\chi)$ ist in Satz 5 definiert). Andererseits sind die p_T nach Satz 3 die Lösungen des Gleichungssystems (14), deren Anzahl durch Satz 4 abgeschätzt ist, und damit folgt endlich

Satz 7. Es gilt die Ungleichung

$$(25) \quad f - (r + W(\chi)) \leq \frac{1}{2} \sum_{n \bmod 2} \chi(T^n) + \frac{1}{3} \sum_{n \bmod 3} \chi((TU)^n)$$

für jeden einfachen Charakter χ von $\Gamma(1)/\mathfrak{M}$, der nicht der Hauptcharakter ist.

Denn die linke Seite ist der Rang des Gleichungssystems (14), ausgedrückt durch die Anzahl der Lösungen.

Satz 8. In den Ungleichungen von Satz 4, 5 und 7 gilt das Gleichheitszeichen, wenn χ ein einfacher Nicht-Hauptcharakter ist, d. h.

$$(1) \quad r = r(\chi) = f - W(\chi) - \frac{1}{2} \sum_{n \bmod 2} \chi(T^n) - \frac{1}{3} \sum_{n \bmod 3} \chi((TU)^n),$$

$$W(\chi) = \frac{1}{N} \sum_{n \bmod N} \chi(U^n).$$

Beweis. Wir schreiben zur Abkürzung

$$(26) \quad S_N(\chi) = \frac{1}{N} \sum_{n \bmod N} \chi(U^n)$$

und entsprechend $S_2(\chi)$ und $S_3(\chi)$ für die beiden analogen Summen mit zwei und drei Gliedern auf der rechten Seite von (25). Die Ungleichungen (18) und (25) fassen wir zusammen zu

$$(27) \quad f(\chi) - r(\chi) \leq W(\chi) + S_2(\chi) + S_3(\chi) \leq S_N(\chi) + S_2(\chi) + S_3(\chi),$$

multiplizieren dies mit der positiven Zahl $f(\chi)$ und summieren über alle einfachen Charaktere χ , außer dem Hauptcharakter. Eine solche Summation sei mit $\sum_{\chi \neq 1}$ bezeichnet, während \sum_{χ} eine Summe über sämtliche einfachen Charaktere bedeutet. Wenn dann, wie wir zeigen wollen, die beiden äußeren aus (27) entstehenden Summen einander gleich sind, so muß offenbar in jeder der einzelnen Ungleichungen (27) bereits das Zeichen = gelten, und Satz 8 ist bewiesen.

Nach bekannten Formeln der Gruppentheorie ist nun

$$(28) \quad \sum_{\chi} f(\chi) \cdot \chi(S) = 0, \quad \text{also} \quad \sum_{\chi \neq 1} f(\chi) \cdot \chi(S) = -1,$$

wenn S nicht das Einheitsselement ist. Dagegen

$$(29) \quad \sum_{\chi \neq 1} f^2(\chi) = \mu - 1$$

und endlich nach Definition und Gleichung (5)

$$\sum_{\chi \neq 1} r(\chi) \cdot f(\chi) = 2p = 2 + \frac{\mu}{6N} (N - 6).$$

Aus (28), (29) folgt für die drei Summen

$$\sum_{\chi \neq 1} f(\chi) \cdot S_l(\chi) = \frac{\mu}{l} - 1 \quad \text{für} \quad l = 2, 3, N,$$

und dadurch erweisen sich in der Tat die beiden äußeren Seiten der entstehenden Ungleichungen gleich demselben Wert $\mu \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - 3$, womit alles bewiesen ist.

§ 5.

Die Riemannschen Periodenrelationen, ausgedrückt in den Vektoren p_{τ} .

Wir gehen jetzt zur Untersuchung der Perioden der Integrale 1. Gattung zu \mathfrak{R} über, die ja gewisse Kombinationen der Perioden der Potentiale sind. Die Perioden eines solchen einzelnen Integrals $j(\tau)$, d. h. die Zahlen a , wofür

$$j(L\tau) = j(\tau) + a, \quad (L \subset \mathfrak{R}),$$

sind völlig bestimmt, wenn man das System der konjugierten Integrale $j(S\tau)$ und die affinen Substitutionen kennt, nach welcher sich diese bei den beiden Erzeugenden U, T umsetzen. Indem wir uns von vornherein den homogenen Teil dieser Substitutionen gleich in irreduzible Bestandteile zerlegt denken,

haben wir also die verschiedenen Scharen von je 1 Integralen 1. Gattung zu ermitteln, deren Differentiale sich nach einer bestimmten irreduziblen Darstellung f -ten Grades von \mathfrak{G} umsetzen. Bei gegebener Darstellung \mathfrak{D} , fixiert durch die Matrizen $\mathfrak{M}_U, \mathfrak{M}_T$, ist also die Anzahl der linear unabhängigen Differentialvektoren 1. Gattung $dj(\tau)$, welche den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}dj(U\tau) &= \mathfrak{M}_U \cdot dj(\tau), \\dj(T\tau) &= \mathfrak{M}_T \cdot dj(\tau)\end{aligned}$$

genügen, gleich der Vielfachheit $\kappa = \kappa(\mathfrak{D})$, mit welcher \mathfrak{D} in \mathfrak{S} vertreten ist. In § 4 haben wir

$$\kappa(\mathfrak{D}) + \kappa(\overline{\mathfrak{D}}) = r$$

bestimmt. Das ist also eine gerade Zahl, wenn der Charakter χ von \mathfrak{D} reell ist.

Normieren wir die $j(\tau)$ durch Addition eines passenden konstanten Vektors durch die homogene Bedingung

$$p_U = 0,$$

so hängen die Perioden des Integralvektors $j(\tau)$ bei \mathfrak{R} nur ab von dem Vektor p_T , der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}(30) \quad j(U\tau) &= \mathfrak{M}_U \cdot j(\tau), \\j(T\tau) &= \mathfrak{M}_T \cdot j(\tau) + p_T\end{aligned}$$

definiert ist. Die möglichen p_T bilden eine lineare Schar und sind eine Teil-schar der $r + W(\chi)$ Lösungen von

$$\begin{aligned}(31) \quad (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_T) \cdot p &= 0, \\(\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_{TU} + \mathfrak{M}_T^2) \cdot p &= 0.\end{aligned}$$

Nun genügen bekanntlich die Perioden der Integrale 1. Gattung noch den Riemannschen Bilinearrelationen, die ursprünglich formuliert sind in der Ausdrucksweise der Topologie der Riemannschen Fläche. Die Umformung in die Sprache der Gruppe \mathfrak{R} habe ich früher^{*)} einmal durchgeführt; bei unserem Problem sind nun überdies alle Bedingungen nicht in den Erzeugenden der Gruppe \mathfrak{R} (die den Schnitten auf der Fläche entsprechen), sondern in dem Vektor p_T auszudrücken. Wir wollen diese Formeln jetzt aufstellen, sie erweisen sich als viel einfacher und sollen nun direkt ohne Benutzung meiner früheren Resultate hergeleitet werden.

Es ist zweckmäßig, hierbei auch gleich noch die Integrale 3. Gattung zu \mathfrak{R} zu berücksichtigen, soweit sie eindeutige Funktionen von τ sind. Ihre logarithmischen Singularitäten liegen nur am Rande der oberen τ -Halbebene,

^{*)} E. Hecke, Die Riemannschen Periodenrelationen für die ellipt. Modulfunktionen, Crelles Journal f. d. r. u. angew. Math. 167 (1931), S. 337.

d. h. in den rationalen Punkten, und wir setzen durchweg voraus, daß sie an einer solchen Stelle in der Ortsvariablen eine Entwicklung von der Form

$$c \cdot \log t + \text{reguläre Funktion von } t \text{ bei } t = 0$$

haben und in allen übrigen Punkten regulär sind. Sie sind auch zu definieren als die Funktionen $\gamma(\tau)$, deren Ableitungen $\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau}$ ganze Modulformen zu \mathfrak{N} von der Dimension -2 sind, welche nicht notwendig in allen rationalen Punkten verschwinden. Da die Differenz zweier Integrale 3. Gattung mit den gleichen logarithmischen Residuen c ein Integral 1. Gattung ist, so gibt es nur endlich viele linear unabhängige, und zusammen mit denen der 1. Gattung und der Konstanten bilden sie eine Schar von $p + \sigma$ linear homogen unabhängigen Funktionen, die offenbar bei allen Abbildungen von \mathfrak{G} in sich übergeht. Also kann man diese Schar wieder in bei den Abbildungen von \mathfrak{G} irreduzible Teilscharen zerlegen, und zu einer Darstellung $\mathfrak{D} = (\dots \mathfrak{M}_S \dots)$ von \mathfrak{G} gibt es dann neben den \times Integralen 1. Gattung noch solche Systeme 3. Gattung, die sich bei den Operationen U, T so verhalten:

$$(32) \quad \begin{aligned} g(U\tau) &= \mathfrak{M}_U \cdot g(\tau) + I, \\ g(T\tau) &= \mathfrak{M}_T \cdot g(\tau) + q. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $g(\tau)$ einen Integralvektor 3. Gattung, dessen Komponenten die f Integrale 3. Gattung $\gamma_s(\tau)$ sind, I, q sind konstante Vektoren. Wäre $I = 0$, so würde $g(\tau)$ bei $\tau = i\infty$ ohne Singularität sein, wie man aus der Diagonalgestalt von \mathfrak{M}_U erkennt, und würde daher auch in allen zu $\tau = \infty$ nach $\Gamma(1)$ äquivalenten Punkten regulär, also bereits ein Integral 1. Gattung sein. Aus (32) folgt

$$g(TU\tau) = \mathfrak{M}_{TU} \cdot g(\tau) + c,$$

wo

$$c = q + \mathfrak{M}_T \cdot I,$$

und da $g(\tau)$ eine affine Darstellung der Modulgruppe erzeugt, so muß wegen $T^2 = (TU)^2 = I$ wieder gelten:

$$(33) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_T) \cdot q &= 0, \\ (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_{TU} + \mathfrak{M}_{TU}^2) \cdot c &= 0. \end{aligned}$$

Zu einer gegebenen Darstellung $\mathfrak{M}_U, \mathfrak{M}_T$ kann es nur dann einen nicht regulären Vektor 3. Gattung geben, wenn unter den charakteristischen Wurzeln von \mathfrak{M}_U die 1 vorkommt, d. h. wenn

$$\text{Det. } |\mathfrak{E} - \mathfrak{M}_U| = 0.$$

Denn andernfalls läßt sich durch Übergang von g zu $g + \text{const.}$ der Vektor I in 0 überführen, was nur bei der ersten Gattung sein kann.

Die Riemannschen bilinearen Relationen und auch die Ungleichung für die quadratische Form kann man nun sehr übersichtlich und einfach in den Vektoren l, q, p_T auf folgende Art ausdrücken:

Es seien $j(\tau), g(\tau)$ zwei Integralvektoren, deren Differentiale sich bei $\Gamma(1)$ nach konjugiert komplexen Darstellungen \mathfrak{D} und $\overline{\mathfrak{D}}$ von \mathfrak{G} umsetzen, und zwar sei

$j(\tau)$ von 1. Gattung, $g(\tau)$ von 1. oder 3. Gattung.

Speziell sei also

$$(34) \quad g(U\tau) = \overline{\mathfrak{M}}_U \cdot g(\tau) + l; \quad g(T\tau) = \mathfrak{M}_T \cdot g(\tau) + q$$

und

$$(35) \quad (\mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{M}}_T) \cdot q = 0; \quad (\mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{M}}_T U + \overline{\mathfrak{M}}_T^2 U) \cdot c = 0 \text{ mit } c = q + \overline{\mathfrak{M}}_T \cdot l,$$

während für $j(\tau)$ die Gleichungen (30), (31) gelten sollen, wo wir p anstatt p_T schreiben.

Es sei ferner

$$\mathfrak{H} = (a_{rs}) \quad (r, s = 1, \dots, f) \quad (a_{rs} = \bar{a}_{sr})$$

die bei \mathfrak{D} invariante Hermiteische Matrix:

$$H(x, y) = \sum_{r,s} a_{rs} x_r y_s$$

soll invariant sein, wenn man auf die x die Substitution \mathfrak{M}_S und auf die y $\overline{\mathfrak{M}}_S$ ausübt. Wir schreiben diese Form als Matrix ersten Grades als Produkt

$$H(x, y) = x' \cdot \mathfrak{H} \cdot y.$$

Der Akzent bedeutet den Übergang zur transponierten Matrix, x' ist also der Zeilenvektor mit den Komponenten x_n , während y der Spaltenvektor mit den Komponenten y_s ist. Die Invarianz-Eigenschaft von \mathfrak{H} bedeutet:

$$(36) \quad \mathfrak{M}'_S \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_S = \mathfrak{H}.$$

Wir integrieren nun den Differentialausdruck

$$\sum_{r,s} a_{rs} j_r(\tau) \cdot d\gamma_s(\tau) = j'(\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(\tau)$$

über die Berandung des üblichen Fundamentalbereiches der Modulgruppe in positivem Sinne: Mit einem positiven c und dann $c \rightarrow +\infty$

auf der Geraden $\Re(\tau) = -\frac{1}{2}$ von $-\frac{1}{2} + ic$ bis $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$,

auf dem Einheitskreis von ϱ bis $\varrho + 1$,

auf der Geraden $\Re(\tau) = \frac{1}{2}$ von $\varrho + 1$ bis $\frac{1}{2} + ic$,

auf der Geraden von $\frac{1}{2} + ic$ bis $-\frac{1}{2} + ic$.

Dann ist das Integral über diesen geschlossenen Weg W

$$(37) \quad J(i, g) = \int_W i'(\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(\tau)$$

gleich 0, weil im Innern und auf dem Rande $i(\tau)$ und $\frac{dg}{d\tau}$ regulär nach Definition sind. Andererseits läßt sich dieses Integral durch die Vektoren p, q, l ausdrücken, indem wir die Tatsache benutzen, daß die Teile von W durch die Substitutionen U, T aufeinander bezogen sind.

$$(38) \quad \int_W = \int_{-\frac{1}{2}+ic}^0 + \int_{\frac{1}{2}+ic}^0 + \int_0^{\frac{1}{2}-ic} + \int_{\frac{1}{2}-ic}^0 + \int_{\frac{1}{2}+ic}^0.$$

Hier ist

$$\int_{\frac{1}{2}+ic}^0 i'(\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(\tau) = \int_{\frac{1}{2}}^0 i'(U\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(U\tau) = \int_{\frac{1}{2}}^0 i'(\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(\tau),$$

also die beiden ersten Summanden in (38) zusammen = 0. Ebenso ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}+ic} i'(\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(\tau) &= \int_0^1 i'(T\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(T\tau) = \int_0^1 (i'(\tau) \mathfrak{M}_T' + p') \cdot \mathfrak{H} \cdot d\overline{\mathfrak{M}}_T \cdot g(\tau) \\ &= \int_0^1 i'(\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(\tau) + \int_0^1 p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_T \cdot dg(\tau) \\ &= \int_0^1 i'(\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(\tau) + p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_T \cdot (g(1) - g(0)), \end{aligned}$$

und schließlich

$$J(i, g) = \int_W i'(\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(\tau) = p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_T \cdot (g(1) - g(0)) + \int_{\frac{1}{2}+ic}^0 \dots$$

Wegen

$$\mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_T = \mathfrak{M}_T'^{-1} \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{M}_T' \cdot \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_T \cdot p = -p$$

wird

$$J(i, g) = p' \cdot \mathfrak{H} \cdot (g(1) - g(0)) + \int_{\frac{1}{2}+ic}^0 \dots$$

In derselben Weise erhalten wir die Riemannsche Ungleichung, indem wir $\overline{i(\tau)}$ an Stelle von $i(\tau)$ nehmen und das Differential $i' \cdot \mathfrak{H} \cdot d\overline{i}$ längs W integrieren:

$$J(i, \overline{i}) = \int_W i'(\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot d\overline{i(\tau)} = p' \cdot \mathfrak{H} \cdot (\overline{i(1)} - \overline{i(0)}) + \int_{\frac{1}{2}+ic}^0 \dots$$

Und nun müssen die Werte der Integrale g, j in den Punkten i, e mit Hilfe von p, q, l ausgedrückt werden. Setzen wir zunächst in (34) $\tau = i$, so wird wegen $Ti = i$

$$g(i) = \overline{\mathfrak{M}_T} \cdot g(i) + q,$$

$$g(i) = \frac{1}{2} (g(i) + g(Ti)) = \frac{1}{2} q + \frac{1}{2} (\mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{M}_T}) \cdot g(i).$$

Und da

$$\mathfrak{H} \cdot (\mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{M}_T}) = (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_T') \cdot \mathfrak{H}, \quad (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_T) \cdot p = 0,$$

wird der Summand

$$p' \cdot \mathfrak{H} \cdot g(i) = \frac{1}{2} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot q + \frac{1}{2} p' \cdot (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_T') \cdot \mathfrak{H} \cdot g(i) = \frac{1}{2} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot q.$$

Ebenso ist e Fixpunkt von TU , und daher

$$\begin{aligned} g(e) &= \frac{1}{2} (g(e) + g(TUe)) + g((TU)^2 e) \\ &= \frac{1}{2} (\mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{M}_{TU}} + \overline{\mathfrak{M}_{TU}^2}) \cdot g(e) + \frac{2}{3} c + \frac{1}{3} \overline{\mathfrak{M}_{TU}} \cdot c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot g(e) &= \frac{2}{3} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot c + \frac{1}{3} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}_{TU}} \cdot c \\ &= \frac{2}{3} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot c - \frac{1}{3} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}_U} \cdot c, \end{aligned}$$

und daraus folgen die beiden Hauptformeln

Satz 9.

$$(39) \quad J(i, g) = \frac{1}{2} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot q - \frac{2}{3} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot c + \frac{1}{3} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}_U} \cdot c + \int_{\frac{1}{2} + i\epsilon}^{-\frac{1}{2} + i\epsilon} \dots,$$

$$(40) \quad J(j, \bar{j}) = -\frac{1}{3} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \bar{p} + \frac{1}{3} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}_U} \bar{p} + \int_{\frac{1}{2} + i\epsilon}^{-\frac{1}{2} + i\epsilon} ,$$

wenn $j(\tau)$ ein Integralvektor 1. Gattung, $g(\tau)$ ein solcher 1. oder 3. Gattung ist, deren Differentiale sich bei $\Gamma(1)$ nach konjugiert-komplexen Darstellungen von $\Gamma(1)/\mathfrak{R}$ umsetzen. \mathfrak{H} ist eine invariante Hermite'sche Form, und die Periodenvektoren p, q, c sind durch (20), (34), (35) definiert.

Die Irreduzibilität der Darstellung wurde bei dem Beweis nicht benutzt.

Ist nun speziell auch $g(\tau)$ von 1. Gattung, so ist $c = q$ und der von c abhängige Zusatzterm wird für $c \rightarrow \infty$ offenbar gleich 0, weil der Integrand alsdann auf dem Integrationsweg gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Ebenso verschwindet auch in der zweiten Gleichung der Zusatzterm für jeden zulässigen Integralvektor $j(\tau)$ von 1. Gattung.

Der dann resultierende bilineare Ausdruck

$$J(j, g) = -\frac{1}{3} p' \cdot (\mathfrak{H} - 2 \mathfrak{H} \overline{\mathfrak{M}_U}) \cdot q$$

für zwei Integrale 1. Gattung läßt sich nun, ebenso wie auch $J(j, \bar{j})$, unter Benutzung der linearen Gleichungen für p, q noch folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_U \cdot q &= -p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_{T U} \cdot q = p' \cdot \mathfrak{H} \cdot (\mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{M}}_{T U}^2) \cdot q \\ &= p' \cdot \mathfrak{H} \cdot (\mathfrak{E} + \overline{\mathfrak{M}}_{U-1 T}) \cdot q = p' \cdot \mathfrak{H} \cdot (\mathfrak{E} - \overline{\mathfrak{M}}_U^{-1}) \cdot q, \\ 6 J(j, g) &= -p' \cdot \mathfrak{H} \cdot q + 2 p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_U \cdot q \\ &= p' \cdot \mathfrak{H} \cdot q - 2 p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_U^{-1} \cdot q; \end{aligned}$$

also ist $J(j, g)$ auch gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Werte

$$(41) \quad 6 J(j, g) = p' \cdot (\mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_U - \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_U^{-1}) \cdot q.$$

Setzen wir nun

$$(42) \quad \mathfrak{B} = i(\mathfrak{H} \overline{\mathfrak{M}}_U - \mathfrak{H} \overline{\mathfrak{M}}_U^{-1}) = i(\mathfrak{H} \overline{\mathfrak{M}}_U - \overline{\mathfrak{M}}_U \cdot \mathfrak{H}),$$

so ist

$$(43) \quad \mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}'$$

eine Hermitesche Matrix. Während nun wegen der Regularität des Integranden schließlich die Gleichung $J(j, g) = 0$ folgt, wird die Bedeutung von

$$J(j, \bar{j}) = \frac{1}{6i} p' \cdot \mathfrak{B} \cdot \bar{p}$$

durch folgenden Hilfssatz gegeben:

Hilfssatz 4. Ist (a_{rs}) eine positiv definite Hermitesche Matrix des Grades f und sind w_1, \dots, w_f analytische Funktionen, so ist

$$i \int \sum_{r,s} a_{rs} w_r d\bar{w}_s > 0,$$

wenn das Integral über den gesamten Rand eines Gebietes in positivem Sinne erstreckt ist, wo alle w_r regulär und eindeutig sind, außer wenn alle w_r konstant sind.

Beweis. Man transformiere durch eine lineare homogene Substitution mit nicht-verschwindender Determinante die w_r in gewisse Verbindungen φ_r , so daß

$$\sum_{r,s} a_{rs} w_r d\bar{w}_s = \sum_r \varphi_r d\bar{\varphi}_r.$$

Ist nun $\varphi = u + iv$ mit reellem u, v , so ist

$$\int \varphi d\bar{\varphi} = \int (u + iv) d(u - iv) = \int (u du + v dv) + i \int (v du - u dv),$$

und wenn das Integral über den gesamten geschlossenen Rand erstreckt wird,

$$\frac{1}{2} i \int \varphi d\bar{\varphi} = \frac{1}{2} \int (u dv - v du) > 0,$$

weil dieses Integral bekanntlich gleich dem Dirichletschen Integral der Potentialfunktion u über das Innere des Bereiches ist.

Somit lauten schließlich die Riemannschen Relationen für die Integrale 1. Gattung, ausgedrückt in den Grundvektoren, welche bei der Substitution T auftreten:

Satz 10. Es seien $j(\tau)$, $g(\tau)$ zwei Integralvektoren 1. Gattung zu \mathfrak{R} , deren Differentiale sich bei $\Gamma(1)$ nach konjugiert-komplexen Darstellungen $\mathfrak{D} = (\mathfrak{M}_g)$ und $\overline{\mathfrak{D}} = (\overline{\mathfrak{M}}_g)$ von $\mathfrak{G} = \Gamma(1)/\mathfrak{R}$ eines Grades f umsetzen, $j(\tau)$ sei nicht konstant und ferner sei speziell bei U, T

$$\begin{aligned} j(U\tau) &= \mathfrak{M}_U \cdot j(\tau), & g(U\tau) &= \overline{\mathfrak{M}}_U \cdot g(\tau), \\ j(T\tau) &= \mathfrak{M}_T \cdot j(\tau) + p, & g(T\tau) &= \overline{\mathfrak{M}}_T \cdot g(\tau) + q. \end{aligned}$$

Endlich bedeute \mathfrak{H} eine bei der Darstellung \mathfrak{D} invariante positive Hermitesche Matrix

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_g \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_g = \overline{\mathfrak{H}}'; \quad \mathfrak{B} = i(\mathfrak{H} \overline{\mathfrak{M}}_U - \mathfrak{M}_U \cdot \mathfrak{H}) = \overline{\mathfrak{B}}'.$$

Dann gilt

$$(44) \quad p' \cdot \mathfrak{B} \cdot q = 0, \quad p' \cdot \mathfrak{B} \cdot \bar{p} > 0.$$

Für spätere Anwendungen auf spezielle Normalteiler \mathfrak{R} ziehen wir aus Gleichung (39), wenn $g(\tau)$ von 3. Gattung ist, noch die Folgerung: Das Zusatzglied

$$\int_{\frac{1}{2} + i\epsilon}^{-\frac{1}{2} + i\epsilon} i'(\tau) \cdot \mathfrak{H} \cdot dg(\tau)$$

ist mit $\epsilon \rightarrow \infty$ auch gleich 0 für Integrale 3. Gattung $g(\tau)$, sofern der Integralvektor 1. Gattung $j(\tau)$ bei $\tau = i\infty$ verschwindet, d. h. sofern das konstante Glied in der Potenzreihe nach $e^{\frac{2\pi i \tau}{N}}$ für $j(\tau)$ gleich 0 ist. Das ergibt die Relation für die Perioden 1. und 3. Gattung:

Satz 11. Es sei $j(\tau)$ ein Integralvektor 1. Gattung, $g(\tau)$ ein solcher 3. Gattung, deren Differentiale sich nach konjugiert-komplexen Darstellungen umsetzen, und zwar sei

$$g(U\tau) = \mathfrak{M}_U \cdot g(\tau) + I; \quad g(T\tau) = \overline{\mathfrak{M}}_T \cdot g(\tau) + q; \quad c = q + \overline{\mathfrak{M}}_T \cdot I,$$

während im übrigen die Bezeichnungen des vorigen Satzes gelten. Wenn dann überdies noch $j(\infty) = 0$ vorausgesetzt wird, so besteht die Relation

$$(45) \quad 3 p' \cdot \mathfrak{H} \cdot q - 4 p' \cdot \mathfrak{H} \cdot c + 2 p' \cdot \mathfrak{H} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_T \cdot c = 0.$$

§ 6.

Die Normalintegrale 1. Gattung von \mathfrak{R} zu einer irreduziblen reellen Darstellung der Abbildungsgruppe.

Mit Hilfe dieser Relationen soll nun eine Normierung des vollen Systems derjenigen Integrale 1. Gattung vorgenommen werden, welche zu einer festen

irreduziblen Darstellung von \mathfrak{G} gehören, in derselben Weise, wie nach Riemann das volle System aller p Integrale eines algebraischen Gebildes derart normiert wird, daß das Periodensystem die bekannte Riemannsche Normalform erhält.

Je nach der Natur der betreffenden Darstellung \mathfrak{D} gibt es nun drei wesentlich verschiedene Typen jener Relationen und demgemäß drei verschiedene Typen der Normierung:

1. Die irreduzible Darstellung \mathfrak{D} ist mit einer reellen Darstellung äquivalent. Das ist der bei den Kongruenzgruppen $\mathfrak{R} = \Gamma(N)$ hauptsächlich vorkommende Fall.
2. Die irreduzible Darstellung \mathfrak{D} hat reellen Charakter, ist aber nicht mit einer reellen Darstellung äquivalent. Dieser Fall kommt bei Kongruenzgruppen von Primzahlstufe überhaupt nicht vor.
3. Die irreduzible Darstellung \mathfrak{D} hat nicht-reellen Charakter. Bei den Kongruenzgruppen von Primzahlstufe $N = q$ tritt dies nur für $q \equiv 3 \pmod{4}$ ein, und zwar gibt es dann für dieses q nur zwei solche Darstellungen. Sie haben den Grad $f = \frac{q-1}{2}$ und für ihre Vielfachheiten $\kappa(\mathfrak{D}), \kappa(\overline{\mathfrak{D}})$ ist die Summe natürlich wieder durch die Formel für r (Gleichung (1)) gegeben, während ihre Differenz gleich der Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{-q})$ ist.

Weiterhin soll hier nur der Typus 1 näher diskutiert werden, auf den sich, da man vorläufig nur Kongruenzgruppen als Normalteiler genauer kennt, zunächst das Hauptinteresse konzentriert. Mit diesen Resultaten sollen dann zur Illustrierung ihrer Tragweite im nächsten Paragraphen einige wesentlich neue Aussagen für die Integrale der Kongruenzgruppen $\mathfrak{R} = \Gamma(q)$, wo q eine Primzahl ist, formuliert werden.

Es sei also \mathfrak{D} eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G} = \Gamma(1)/\mathfrak{R}$ vom Typus 1. Wir setzen sie gleich als reell voraus, und der Zahlkörper, der durch ihre Koeffizienten definiert wird, heiße $K(\mathfrak{D})$. Wir wenden Satz 10 auf \mathfrak{D} an. Die beiden Differentialvektoren $dj(\tau)$, $dg(\tau)$, von denen in Satz 10 die Rede ist, setzen sich also nun nach derselben Darstellung \mathfrak{D} um. In Gleichung (42) ist dann \mathfrak{H} eine reelle symmetrische Matrix aus $K(\mathfrak{D})$, \mathfrak{M}_U ist reell und

$$(46) \quad \mathfrak{B} = i\mathfrak{A}, \text{ wo } \mathfrak{A} = (\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{M}_U - \mathfrak{M}'_U \cdot \mathfrak{H}) = -\mathfrak{A}'$$

eine alternierende Matrix des Grades f in $K(\mathfrak{D})$ ist.

Setzt sich der Differentialvektor 1. Gattung $dj(\tau)$ bei $\Gamma(1)$ nach \mathfrak{D} um und erzeugt $j(\tau)$ eine zulässige affine Darstellung, so gilt das gleiche für $j(\tau) + a$, wenn der konstante Vektor a so gewählt ist, daß $a - \mathfrak{M}_U \cdot a = 0$. Zu $j(\tau) + a$ gehört dann aber bei T der Grundvektor

$$(47) \quad p^* = p + a - \mathfrak{M}_T \cdot a,$$

wenn p zu $j(\tau)$ gehört. Die Menge aller möglichen p bildet eine Teilschar der Vektoren \mathfrak{x} mit der Eigenschaft

$$(48) \quad (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_T) \cdot \mathfrak{x} = 0, \quad (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_{T \cup U} + \mathfrak{M}_{T \cup V}^2) \cdot \mathfrak{x} = 0.$$

Diese Vektoren \mathfrak{x} spannen nach Satz 5, 8 eine Mannigfaltigkeit von $2\kappa + S_N(\chi)$ Dimensionen auf, dabei ist κ durch Gl. (1) definiert; wir benutzen den Übergang von p zu p^* nach (47), um durch zusätzliche Bedingungen diese Dimensionszahl auf 2κ herabzudrücken. Dies geschieht durch irgendwelche weitere $S_N(\chi)$ homogene lineare Gleichungen, welche wir für p fordern. Zum Beispiel:

a) Ist der Integralvektor $j(\tau)$ durch seine Potenzreihenentwicklung gegeben, so ist es das einfachste, die additive Konstante durch die Forderung

$$(49) \quad j(\infty) = 0$$

eindeutig festzulegen. Sie hat natürlich $p_U = 0$ zur Folge.

b) In der Schar der p^* aus (47) gibt es ebenfalls genau einen Vektor, der auch noch die Orthogonalitätsbedingung

$$(50) \quad p^* \cdot (a - \mathfrak{M}_T \cdot a) = 0 \quad \text{für alle } a \text{ mit } a - \mathfrak{M}_U \cdot a = 0$$

erfüllt.

Die Übersetzung der Bedingung (49) in eine Bedingung für p führt durch das Transzendente hindurch: Die Forderung $j(\infty) = 0$ läßt sich mit Hilfe der Integrale 3. Gattung, die zu \mathfrak{D} gehören, vermöge Satz 11 formulieren. Und für die Kongruenzgruppen $\mathfrak{N} = \Gamma(N)$ kennt man die Perioden dieser Integrale 3. Gattung, weil diese Integrale sich nach einem Fundamentaltheorem durch die Logarithmen von invarianten Funktionen der Gruppe \mathfrak{N} ausdrücken lassen und deren Perioden ja Vielfache von $2\pi i$ sind. Diese Tatsache ist für die Anwendung auf Thetareihen späterhin von Bedeutung.

Für die allgemeine Durchführung der Theorie setzen wir jetzt b) als Zusatzforderung an und haben damit folgendes Problem:

Unter den 2κ Lösungsvektoren \mathfrak{x} der Gleichungen

$$(51) \quad (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_T) \cdot \mathfrak{x} = 0; \quad (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}_{T \cup U} + \mathfrak{M}_{T \cup V}^2) \cdot \mathfrak{x} = 0,$$

$$(52) \quad \mathfrak{x}' \cdot (a - \mathfrak{M}_T a) = 0 \quad \text{für alle } a \text{ mit } a - \mathfrak{M}_U a = 0$$

bilden die bei den Integralen 1. Gattung von \mathfrak{D} auftretenden Grundvektoren p eine lineare Teilschar mit κ Erzeugenden. Für zwei beliebige unter ihnen, p, q , gelten stets die Bedingungen

$$p' \cdot \mathfrak{A} \cdot q = 0, \quad p' \cdot i\mathfrak{A} \cdot \bar{p} > 0.$$

Man führe ein Koordinatensystem im \mathfrak{x} -Raum ein, in welchem diese Bedingungen möglichst einfach lauten, und bestimme ein möglichst einfaches System von Erzeugenden der p -Schar.

Hierzu sei zunächst g^e ($e = 1, \dots, 2\kappa$) ein vollständiges System unabhängiger Lösungen ξ von (51), (52), die wir außerdem mit Komponenten aus $K(\mathfrak{D})$ gewählt denken. Mit zwei beliebigen Vektoren dieser Schar

$$\xi = \sum_{\alpha=1}^{2\kappa} x_{\alpha} \cdot g^{\alpha}, \quad \eta = \sum_{\alpha=1}^{2\kappa} y_{\alpha} \cdot g^{\alpha}$$

bilden wir die alternierende Form

$$(53) \quad A(x, y) = \xi' \cdot \mathfrak{A} \cdot \eta = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2\kappa} x_{\alpha} \cdot y_{\beta} \cdot C_{\alpha\beta}, \quad \text{wo } C_{\alpha\beta} = g'^{\alpha} \cdot \mathfrak{A} \cdot g^{\beta}.$$

Übergang von einem System g^{α} zu einem anderen bedeutet offenbar für $A(x, y)$ Transformation dieser bilinearen Form durch kogrediente Substitutionen der x_{α}, y_{α} und umgekehrt. Es ist nun bekanntlich stets möglich, eine solche alternierende Form durch kogrediente Substitutionen der Variablen auf die Normalform

$$\sum_{\alpha=1}^{\kappa} e_{\alpha} (x_{\alpha} y_{\alpha+\kappa} - x_{\alpha+\kappa} y_{\alpha}), \quad \text{wo } e_{\alpha} = 0 \text{ oder } 1,$$

zu bringen, und zwar mit Koeffizienten, die dem Körper der $C_{\alpha\beta}$, d. h. also dem Körper $K(\mathfrak{D})$ angehören. Wir denken uns daher von vornherein diese Normalgestalt bereits erzielt, also die g^e so in $K(\mathfrak{D})$ gewählt, daß

$$(54) \quad \left. \begin{aligned} g'^{\alpha} \cdot \mathfrak{A} \cdot g^{\beta} &= g'^{\alpha+\kappa} \cdot \mathfrak{A} \cdot g^{\beta+\kappa} = 0 \\ g'^{\alpha} \cdot \mathfrak{A} \cdot g^{\beta+\kappa} &= \begin{cases} e_{\alpha} & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases} \end{aligned} \right\} \text{für } 1 \leq \alpha, \beta \leq \kappa$$

mit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{M}_U - \mathfrak{M}'_U \cdot \mathfrak{H}.$$

Bei dieser Wahl des Koordinatensystems im ξ -Raum ist also¹⁰⁾

$$(55) \quad A(x, y) = \xi' \cdot \mathfrak{A} \cdot \eta = \sum_{\alpha} e_{\alpha} (x_{\alpha} y_{\alpha+\kappa} - x_{\alpha+\kappa} y_{\alpha}).$$

Jetzt sei $j^e(\tau)$ ($e = 1, \dots, \kappa$) ein volles System von κ Integralvektoren 1. Gattung zu \mathfrak{D} , deren Grundvektoren p^e der Zusatzbedingung (52) genügen. Dann drücken sich diese Vektoren p^e durch die g^{α} in der Gestalt

$$(56) \quad p^e = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^e g^{\alpha} + \sum_{\alpha} c_{\alpha+\kappa}^e g^{\alpha+\kappa}$$

mit eindeutig bestimmten c_{α}^e aus. Und für beliebige nicht sämtlich verschwindende Zahlen u_e ist mit

$$(57) \quad p = \sum_e u_e p^e,$$

$$(58) \quad p' \cdot \mathfrak{A} \cdot \bar{p} \neq 0.$$

¹⁰⁾ Ein Zeichen \sum ohne näheren Zusatz soll weiterhin in diesem Paragraphen eine Summation über die ganzen Zahlen $\alpha = 1, \dots, \kappa$ bedeuten.

Hieraus folgt

Hilfssatz 5. Die Determinante der ersten κ^2 Koeffizienten in (56) ist

$$\text{Det. } (c_{\alpha}^{\beta}) \neq 0.$$

Beweis. Andernfalls ließen sich mit κ nicht sämtlich verschwindende Zahlen u_{ϱ} so finden, daß

$$\sum_{\varrho} u_{\varrho} c_{\alpha}^{\varrho} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \kappa,$$

und mit diesen Werten u_{ϱ} würde für p nach (55), (57) sich ergeben

$$p' \cdot \mathfrak{A} \cdot \bar{p} = 0$$

gegen die bewiesene Ungleichung (58).

Weiter folgt

Hilfssatz 6. In der alternierenden Form (55)

$$A(x, y) = x' \cdot \mathfrak{A} \cdot y$$

sind alle e_{α} von 0 verschieden, also $= 1$.

Beweis. Wäre etwa $e_1 = 0$, so bestimme man die κ Zahlen u_{ϱ} aus

$$\sum_{\varrho=1}^{\kappa} u_{\varrho} c_{\alpha}^{\varrho} = \begin{cases} 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha > 1, \end{cases}$$

was nach dem vorigen Hilfssatz möglich ist. Für den damit gebildeten Vektor

$$p = \sum_{\varrho} u_{\varrho} p^{\varrho} = g^1 + \sum_{\varrho, \alpha} u_{\varrho} c_{\alpha}^{\varrho} g^{\alpha + \kappa} = g^1 + \sum_{\alpha} x_{\alpha + \kappa} g^{\alpha + \kappa}$$

ist aber offenbar $p' \cdot \mathfrak{A} \cdot \bar{p} = 0$, was unmöglich ist.

Nach Fixierung des Koordinatensystems der g^{α} durch die Bedingungen (54), ($A(x, y)$ soll die Normalform mit allen $e_{\alpha} = 1$ haben), wähle man jetzt die κ Integralvektoren $j^{\varrho}(\tau)$ dazu — die man füglich als die *Normalintegrale* zu diesen g^{α} zu bezeichnen hätte — in folgender eindeutig bestimmten Weise: Bei den entsprechenden Grundvektoren p^{ϱ} , ausgedrückt in den 2κ Vektoren g^{α} nach (56) soll die Matrix

$$(59) \quad (c_{\alpha}^{\varrho}) = \text{Einheitsmatrix des Grades } \kappa$$

sein. Nach Hilfssatz 5 sind diese p^{ϱ} und damit die $j^{\varrho}(\tau)$ eindeutig bestimmt, und es gibt also ein System von Konstanten für die $c_{\alpha + \kappa}^{\varrho}$

$$(60) \quad \tau_{\alpha \varrho} = c_{\alpha + \kappa}^{\varrho}, \quad (\alpha, \varrho = 1, \dots, \kappa),$$

so daß

$$(61) \quad p^{\varrho} = g^{\varrho} + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \tau_{\alpha \varrho} g^{\alpha + \kappa}, \quad (\varrho = 1, \dots, \kappa).$$

Dann folgt endlich das Schlußresultat

Satz 12. Die so definierten $\tau_{\alpha \varrho}$ bilden eine symmetrische quadratische Matrix des Grades κ , deren imaginärer Teil die Matrix einer positiven quadratischen Form ist.

Beweis. Die bilineare Gleichung

$$p' \cdot \mathfrak{H}^e \cdot p'' = 0$$

lautet wegen (55) mit $e_a = 1$

$$\tau_{e\sigma} - \tau_{\sigma e} = 0.$$

Bildet man weiter mit dem allgemeinen Vektor der p -Schar

$$p = \sum_e u_e p^e = \sum_e u_e g^e + \sum_{e, \alpha} u_e \tau_\alpha g^{\alpha+e}$$

den Ausdruck

$$p' \cdot \mathfrak{H} \cdot p = A(x, \bar{x}) \quad \text{mit} \quad x_\alpha = u_\alpha, \\ x_{\alpha+\kappa} = \sum_e u_e \tau_{\alpha e}, \quad (\alpha = 1, \dots, \kappa),$$

so kommt

$$A(x, \bar{x}) = \sum_\alpha (x_\alpha \bar{x}_{\alpha+\kappa} - \bar{x}_\alpha x_{\alpha+\kappa}) = \sum_{\alpha, e} u_\alpha \bar{u}_e (\bar{\tau}_{\alpha e} - \tau_{\alpha e}),$$

und wegen

$$i \cdot A(x, \bar{x}) > 0$$

ist die Behauptung bewiesen.

Wir sprechen das Gesamtergebnis noch in einem besonderen Satze aus:

Satz 13. Die κ unabhängigen Integralvektoren 1. Gattung $j^e(\tau)$, welche zu einer bestimmten reellen irreduziblen Darstellung \mathfrak{D} mit dem Koeffizientenkörper $K(\mathfrak{D})$ gehören, lassen sich so wählen, daß mit gewissen Konstanten $\tau_{\alpha e}$

$$j^e(U\tau) = \mathfrak{M}_U \cdot j^e(\tau), \\ (62) \quad j^e(T\tau) = \mathfrak{M}_T \cdot j^e(\tau) + g^e + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \tau_{\alpha e} \cdot g^{\alpha+\kappa}, \quad e = 1, 2, \dots, \kappa.$$

Hierbei hat $(\tau_{\alpha e})$ die in Satz 12 angegebene Eigenschaft einer Riemannschen Periodenmatrix, die 2κ Vektoren g^α sind gewisse, schon aus den beiden Matrizen $\mathfrak{M}_U, \mathfrak{M}_T$ rational berechenbare Vektoren mit Komponenten in $K(\mathfrak{D})$, die allein durch die Bedingungen (51) (52) (54) eingeschränkt sind.

Für die Perioden von $j^e(\tau)$ bei einer Substitution L aus \mathfrak{R} folgt dann

$$(63) \quad j^e(L\tau) = j^e(\tau) + \mathfrak{P}_L \cdot (g^e + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \tau_{\alpha e} g^{\alpha+\kappa}).$$

Die Matrix \mathfrak{P}_L ist eine durch L bestimmte, von e unabhängige Matrix aus dem Matrizenring, der durch die Potenzprodukte der $\mathfrak{M}_U, \mathfrak{M}_T$ und ihre linearen Verbindungen mit ganzen rationalen Koeffizienten gebildet wird.

Die weitere Entwicklung muß dann den Begriff der Ganzzahligkeit in dieser Theorie der Perioden in den Vordergrund stellen. Denn man hat in der Theorie der algebraischen Gebilde vom Geschlechte κ die 2κ Vektoren g^α als das Analogon zu irgendwelchen 2κ Querschnitten anzusehen, die die Riemannsche Fläche einfach zusammenhängend machen. So wie es da not-

wendig ist, von solchen allgemeinen Schnittsystemen zu einem kanonischen System überzugehen, so muß man bei unserem Problem unter Rücksicht auf die arithmetische Natur der Koeffizienten in $\mathfrak{M}_U, \mathfrak{M}_T$ gewisse ausgezeichnete Koordinatensysteme der g^n zugrunde legen.

Von besonderem Interesse sind diese Aussagen, wenn der Körper $K(\mathfrak{D})$ algebraisch bekannt, also z. B. der kleinste, von vornherein mögliche Körper ist, nämlich der durch den Charakter von \mathfrak{D} erzeugte. Das ist dann ein total reeller (Abelscher) Zahlkörper. So ist es im Falle der Kongruenzgruppen, die wir nun näher untersuchen wollen.

§ 7.

Die irreduziblen Darstellungen der Modulargruppe mod q im Körper ihres Charakters.

Es sei jetzt der Normalteiler \mathfrak{N} speziell die Gruppe $\Gamma(q)$ der Moduls substitutionen, deren Koeffizientenschema kongruent der Identität nach einem festen Modul q ist, und q sei eine Primzahl > 2 . Die Faktorgruppe $\Gamma(1)/\Gamma(q)$ ist die binäre inhomogene Modulargruppe $\mathfrak{M}(q) \bmod q$ (mit Determinante $\equiv 1 \pmod{q}$). Ihre einfachen Charaktere sind bekannt¹¹⁾. Die Grade f der irreduziblen Darstellungen \mathfrak{D} , die nicht die identischen sind, sind

$$f = q, \quad \frac{q+\varepsilon}{2}, \quad q+1, \quad q-1, \quad (\varepsilon = (-1)^{\frac{q-1}{2}}).$$

Alle Charaktere sind reell, außer für $q \equiv 3 \pmod{4}$ die beiden des Grades $\frac{q+\varepsilon}{2}$, deren Werte konjugiert-komplexe Zahlen aus dem Körper $K(\sqrt{-q})$ sind. Um unsere Theorie anwenden zu können, müssen wir aber auch die Darstellungen selbst kennen, und zwar solche in möglichst einfachen Körpern. Hier gilt nun folgender Satz:

Satz 14. *Jede irreduzible Darstellung der $\mathfrak{M}(q)$ ist äquivalent mit einer solchen, deren Koeffizienten im Körper ihres Charakters liegen.*

Insbesondere ist also mit der obenerwähnten Ausnahme jede Darstellung mit einer reellen äquivalent, und es kann also auf sie die Theorie aus den vorigen Paragraphen angewendet werden.

¹¹⁾ Tabellen für die einfachen Charaktere der Modulargruppe finden sich an folgenden Stellen: G. Frobenius, Sitzungsab. d. Berliner Akad. (1896), S. 985ff.; H. Feldmann, Über das Verhalten der Modulfunktionen von Primzahlstufe bei beliebigen Moduls substitutionen, Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg VIII (1931), S. 323; I. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, Crelles Journ. f. d. r. u. angew. Math. 132 (1906), S. 128, sowie auch in meiner unter ²⁾ zitierten Arbeit.

Den Beweis für Satz 14 führen wir durch Konstruktion einer Darstellung im Körper $K(\chi)$, und zwar geschieht das für jeden Grad f auf besondere Weise:

1. $f = q$. Die einzige Darstellung des Grades q hat rationalen Charakter. Sie entsteht aus der bekannten Darstellung von $\mathfrak{M}(q)$ als Permutationsgruppe in $q + 1$ Variablen durch Abspaltung der identischen Darstellung und ist daher im rationalen Zahlkörper realisierbar.

2. $f = \frac{q+1}{2}$. Die zwei Darstellungen dieses Grades sind zunächst bekannt in einer Gestalt aus $K(\zeta)$, wo $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{q}}$, während der Körper $K(\chi) = K(\sqrt{\varepsilon q})$ ist. Die Matrizen $\mathfrak{M}_U, \mathfrak{M}_T$ bedeuten folgende Substitutionen:

a) $q \equiv 1 \pmod{4}$

$$(64) \quad \begin{cases} U: x_n \rightarrow \zeta^{\frac{n^2}{2}} \cdot x_n, \\ T: x_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{q}} \left(x_0 + \sum_{i=1}^{\frac{q-1}{2}} (\zeta^{ni} + \zeta^{-ni}) x_i \right), \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, \frac{q-1}{2};$$

b) $q \equiv 3 \pmod{4}$

$$(65) \quad \begin{cases} U: x_n \rightarrow \zeta^{\frac{n^2}{2}} \cdot x_n, \\ T: x_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-q}} \sum_{i=1}^{\frac{q-1}{2}} (\zeta^{ni} - \zeta^{-ni}) x_i, \end{cases} \quad n = 1, \dots, \frac{q-1}{2}.$$

Dabei ist $\sqrt{\pm q}$ positiv bzw. positiv imaginär, der Exponent $\frac{n^2}{2}$ ist mod q zu nehmen. Ersetzt man in diesen Formeln alle algebraischen Zahlen durch ihre Konjugierten in $K(\zeta)$ (d. h. $\zeta \rightarrow \zeta^a$, $\sqrt{\pm q} \rightarrow \left(\frac{a}{q}\right) \sqrt{\pm q}$), so entstehen ebenfalls irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{M}(q)$, und zwar insgesamt je zwei nicht-äquivalente.

Daß nun diese Darstellungen mit solchen aus $K(\sqrt{\varepsilon q})$ äquivalent sind, folgt aus einem allgemeinen Theorem von Herrn I. Schur¹²⁾: Aus Spur und Grad der Substitution \mathfrak{M}_T (mit der Periode 2) berechne man die charakteristischen Wurzeln von \mathfrak{M}_T , $+1$ hat die Vielfachheit $p = \frac{f + \chi(\mathfrak{M}_T)}{2}$, -1 die Vielfachheit $n = \frac{f - \chi(\mathfrak{M}_T)}{2}$. Die zwei irreduziblen Darstellungen der Untergruppe (T, T^2) ; $z' = \pm z$ sind also in \mathfrak{D} p - bzw. n -mal enthalten. Nach dem zitierten Satz von Schur ist dann aber der „Index“ des Charakters χ

¹²⁾ I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsber. d. Berliner Akad. 1906, S. 177, Satz IXa.

von \mathfrak{D} in bezug auf den rationalen Zahlkörper ein Teiler von p und von n , also auch von $p - n = 1$, d. h. \mathfrak{D} ist im Körper $K(\chi)$ realisierbar.

Explizite Formeln für $q \equiv 3 \pmod{4}$ habe ich in einer früheren Arbeit¹³⁾ gegeben.

3. $f = q + 1$. Die Charaktere eines solchen \mathfrak{D} , sind nach der Tabelle in¹¹⁾ bestimmte Zahlen aus dem reellen Unterkörper des Körpers der primitiven t -ten Einheitswurzeln, wo t alle Teiler von $\frac{q-1}{2}$ außer 1 und 2 durchläuft. Da diese Ausdrücke bei Übergang von q zur Konjugierten q^{-1} (und nur bei diesen Automorphismen) invariant bleiben, so gibt es zu jedem dieser t genau $\frac{1}{2} \varphi(t)$ verschiedene einfache Charaktere des Grades $q + 1$. Der Körper $K(\chi)$ ist der reelle Unterkörper $K(q + q^{-1})$. Eine Darstellung \mathfrak{D} , im Körper $K(q)$ läßt sich leicht angeben. Wir müssen zeigen, daß diese mit einer solchen aus $K(q + q^{-1})$ äquivalent ist. Man erhält \mathfrak{D} , folgendermaßen:

Man führe $q^2 - 1$ unabhängige Variable $x(a_1, a_2)$ mit zwei ganzzahligen Indizes a_1, a_2 ein, wo a_1, a_2 nur mod q in Betracht kommen, und ordne jeder binären ganzzahligen Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit Determinante 1 folgende Permutation der x zu:

$$(66) \quad x(a_1, a_2) \rightarrow x(a_1, a_2)|S = x(a_1 a + a_2 c, a_1 b + a_2 d). \\ x(0, 0) \text{ sei } = 0.$$

Diese Permutationen bilden offenbar eine Darstellung der homogenen Modulargruppe $\mathfrak{M}_2(q)$. Wir wollen diese Darstellung in irreduzible Bestandteile des Grades $q + 1$ zerlegen. Wir werden so auch alle Darstellungen der inhomogenen Gruppe $\mathfrak{M}(q)$ von diesem Grade erhalten und wollen bei dieser Gelegenheit auch die hier vorkommenden Darstellungen der homogenen Gruppe $\mathfrak{M}_2(q)$ diskutieren, über die sich ein bemerkenswerter Satz ergeben wird.

Es bedeute $\psi(n)$ einen nicht-reellen Restcharakter der rationalen Zahlen n mod q

$$(67) \quad \psi(n) \text{ nicht-reell.}$$

Wir führen folgende Verbindungen der x ein:

$$y(a_1, a_2, \psi) = \sum_{l \bmod q} \psi(l) \cdot x(l a_1, l a_2).$$

Da offenbar für festes ψ die y bei den Permutationen der x genau dieselben Permutationen erfahren, andererseits wegen

$$(68) \quad y(r a_1, r a_2, \psi) = \bar{\psi}(r) \cdot y(a_1, a_2, \psi), \text{ wenn } (r, q) = 1,$$

¹³⁾ E. Hecke, Bestimmung der Perioden gewisser Integrale durch die Theorie der Klassenkörper, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 727.

nur höchstens $\frac{q^2-1}{q-1} = q+1$ unabhängige y vorhanden sind, so wird durch die y eine Darstellung der $\mathfrak{M}_\lambda(q)$ in höchstens $q+1$ Variablen definiert. Wegen (68) lassen sich die y durch folgende $q+1$ Größen ausdrücken:

$$(69) \quad \begin{aligned} z(n) &= y(1, n, \psi), \quad n \bmod q, \\ z(\infty) &= y(0, 1, \psi). \end{aligned}$$

Wegen

$$y(a_1, a_2, \psi) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \psi(-1) \cdot y(a_1, a_2, \psi)$$

liegt mit $\psi(-1) = +1$ bereits eine Darstellung der inhomogenen $\mathfrak{M}(q)$ vor, während bei $\psi(-1) = -1$ eine Darstellung erst der homogenen $\mathfrak{M}_\lambda(q)$ vorliegt. Aus der Charakterentabelle (auch für die homogene $\mathfrak{M}_\lambda(q)$) stellt man fest, daß der Charakter der — offensichtlich monomialen — Darstellung \mathfrak{D} in den z wirklich ein einfacher Charakter von $\mathfrak{M}_\lambda(q)$ ist, und daß wir die t -te Einheitswurzel ϱ , welche zur Definition des Charakters von \mathfrak{D} in der Tabelle dient, mit der Zahl $\psi(q)$ für eine feste Primitivzahl g von q identifizieren können.

$$(70) \quad \psi(g) = \varrho.$$

Für U und T ergibt sich speziell

$$\begin{aligned} U: \quad & \begin{cases} z(n) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y(1, n+1, \psi) = z(n+1), \\ z(\infty) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y(0, 1, \psi) = z(\infty); \end{cases} \\ T: \quad & \begin{cases} z(n) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = y(n, -1, \psi) = \bar{\psi}(n) \cdot z(-n^{-1}), \quad n \neq 0 \\ z(0) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = y(0, -1, \psi) = \psi(-1) \cdot z(\infty), \\ z(\infty) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = y(1, 0, \psi) = z(0). \end{cases} \end{aligned}$$

Die Darstellung hat reellen Charakter, und man bestätigt in der Tat leicht, daß folgende lineare Verbindungen der z bei U und T konjugiert-komplexe Substitutionen zu denen der z erfahren:

$$(71) \quad \begin{aligned} u(l) &= z(\infty) + \sum_{n \bmod q} \psi(n) \cdot z(n+l), \quad l \bmod q, \\ u(\infty) &= \psi(-1) \sum_n z(n). \end{aligned}$$

Fassen wir wieder die u und die z zu je einem Spaltenvektor u, z zusammen und schreiben die letzten Gleichungen (71) mit einer quadratischen Matrix \mathfrak{A}

$$(72) \quad u = \mathfrak{A} \cdot z,$$

so rechnet man leicht aus, daß

$$(73) \quad \mathfrak{A} \cdot \bar{\mathfrak{A}} = q \cdot \psi(-1) \cdot \mathfrak{E},$$

während überdies die Matrizen \mathfrak{M}_g für die aus (72) folgenden Substitutionen der z durch die Transformation \mathfrak{A} in ihre konjugiert-komplexen übergehen:

$$(74) \quad \overline{\mathfrak{M}}_g = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}_g \cdot \mathfrak{A}^{-1}.$$

Ist nun die Darstellung $\overline{\mathfrak{M}}_g$ mit einer reellen Darstellung \mathfrak{R}_g äquivalent, so gibt es eine umkehrbare Matrix \mathfrak{B} derart, daß

$$(75) \quad \overline{\mathfrak{M}}_g = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{R}_g \cdot \mathfrak{B}^{-1}.$$

Wegen der Irreduzibilität von $\overline{\mathfrak{M}}_g$ muß dann

$$(76) \quad \mathfrak{A} = \lambda \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}^{-1}, \quad \mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{A}} = \lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \mathfrak{E}$$

mit einer skalaren Größe λ sein. Das kann aber nach (73) nur für $\psi(-1) = +1$, d. h. für die Darstellungen der inhomogenen $\mathfrak{M}(q)$ der Fall sein. Und so ergibt sich folgende bemerkenswerte Eigenschaft der Modulargruppe:

Satz 15. *Diejenigen irreduziblen Darstellungen der homogenen $\mathfrak{M}_\lambda(q)$ vom Grade $q+1$, welche nicht schon eine solche der inhomogenen $\mathfrak{M}(q)$ sind, haben reellen Charakter, sind aber keiner reellen Darstellung äquivalent.*

Andererseits folgt aber für $\psi(-1) = +1$ der zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz. Wir wählen nämlich, was, wie wir zeigen werden, immer möglich ist, eine Zahl ω aus $K(q)$ mit der Eigenschaft

$$(77) \quad \omega \cdot \bar{\omega} = q,$$

setzen

$$\mathfrak{C} = \omega^{-1} \cdot \mathfrak{A}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{C} \cdot \bar{\mathfrak{C}} = \mathfrak{E},$$

so daß wieder $\overline{\mathfrak{M}}_g = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{M}_g \cdot \mathfrak{C}^{-1}$. Mit einer Zahl μ aus $K(q)$ bilde man jetzt

$$(78) \quad \mathfrak{F} = \mu \mathfrak{C} + \bar{\mu} \bar{\mathfrak{C}} = \mu \mathfrak{C} \cdot \bar{\mathfrak{C}} + \bar{\mu} \mathfrak{C} = \mathfrak{C} (\bar{\mu} \mathfrak{C} + \mu \bar{\mathfrak{C}}) = \mathfrak{C} \cdot \bar{\mathfrak{F}} = \bar{\mathfrak{F}} \cdot \mathfrak{C}.$$

Nimmt man jetzt μ so, daß die Determinante von \mathfrak{F} nicht 0 ist, also $-\frac{\mu}{\bar{\mu}}$ verschieden von den charakteristischen Wurzeln der Matrix \mathfrak{C} , so ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{F} \cdot \bar{\mathfrak{F}}^{-1}$,

$$(79) \quad \bar{\mathfrak{F}} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_g \cdot \bar{\mathfrak{F}}^{-1} = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{M}_g \cdot \mathfrak{F}^{-1}.$$

Diese Darstellung ist also reell, ist mit \mathfrak{M}_g äquivalent und liegt offenbar in $K(q)$, also schon in $K(q + q^{-1})$, was zu beweisen war.

Die Existenz der Zahl ω mit der Bedingung (77) sieht man so ein: q ist eine primitive t -te Einheitswurzel. Enthält t einen ungeraden Primfaktor p , so sei $\psi_0(n)$ ein Restcharakter mod q , dessen Werte p -te Einheitswurzeln sind, der aber nicht der Hauptcharakter ist. Dann hat die Lagrangesche Wurzelzahl

$$A = \sum_{n \bmod q} \psi_0(n) \zeta^n$$

bekanntlich den Betrag \sqrt{q} :

$$(80) \quad A \cdot \bar{A} = q,$$

während A^p dem Körper der p -ten Einheitswurzeln, also jedenfalls dem Körper $K(q)$ angehört. Die Zahl

$$(81) \quad \omega = \frac{A^p}{q^{\frac{p-1}{2}}}$$

ist dann eine Lösung von (77). Hat aber t keinen ungeraden Teiler, so ist es, weil größer als 2, durch 4 teilbar, und, weil t Teiler von $\frac{q-1}{2}$, ist $q \equiv 1 \pmod{4}$. Eine solche Primzahl q ist aber Norm einer ganzen Zahl ω des Körpers der 4. Einheitswurzeln¹⁴⁾.

4. $f = q - 1$. Die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{M}(q)$ des Grades $q - 1$ sind weniger leicht zugänglich. Ich habe vor einigen Jahren in Vorlesungen gezeigt, wie man explizite übersichtliche Formeln für sie durch Benutzung des Kronecker-Produktes aus den Darstellungen der Grade $\frac{q \pm 1}{2}$ erhalten kann. In den Formeln für den Charakter einer \mathfrak{D}_{q-1} kommt wieder eine primitive t -te Einheitswurzel σ vor, wo aber nun t ein Teiler von $\frac{q+1}{2}$ und $t > 2$ sein muß, derart, daß insgesamt $\frac{1}{2} \varphi(t)$ verschiedene Darstellungen \mathfrak{D}_{q-1} zu den verschiedenen σ mit dem gleichen t gehören, wobei σ und σ^{-1} die gleiche \mathfrak{D}_{q-1} ergeben. Der Charakter χ von \mathfrak{D}_{q-1} erzeugt den reellen Körper $K(\sigma + \sigma^{-1})$. Man kann eine Darstellung des Grades $q - 1$ angeben, die zu einer bestimmten primitiven t -ten Einheitswurzel σ gehört, deren Koeffizienten aber erst im reellen Unterkörper der primitiven $2t$ -ten Einheitswurzeln liegen. Für ungerade t ist damit alles bewiesen. Für grade t , die ja nur bei $q \equiv 3 \pmod{4}$ vorkommen können, ist aber noch die Heranziehung eines tiefen zahlentheoretischen Satzes über Zahlnormen dieses relativ-quadratischen Körpers bezüglich des Körpers $K(\chi)$ erforderlich, um eine Darstellung im Körper $K(\chi)$ herzuleiten. Auch hier gilt wieder der Satz, daß jede solche Darstellung \mathfrak{D}_{q-1} in dem reellen Körper ihres Charakters realisiert werden kann.

Daß in den Fällen 3., 4. eine reelle Darstellung möglich ist, folgt auch aus den allgemeinen Sätzen von Frobenius und Schur¹⁵⁾; indessen brauchen wir die Realisierung im Körper $K(\chi)$ und die genaue Kenntnis derselben.

Eine ausführliche Behandlung dieser Gruppen wird in einer eben abgeschlossenen Hamburger Arbeit von G. Laudi gegeben werden.

¹⁴⁾ Ist der Charakter $\psi(n)$ reell, so wird man durch die alsdann reduzible Gruppe der y auf die Darstellungen mit $f = q$ und $\frac{q+s}{2}$ geführt.

¹⁵⁾ G. Frobenius und I. Schur. Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen, Sitz.-Ber. Akad. Berlin 1906.

§ 8.

Die Normalperioden für die Integrale der Kongruenzgruppe $\Gamma(q)$.

Numerische Beispiele.

Wir können jetzt auf diese Gruppen $\mathfrak{N} = \Gamma(q)$ die oben entwickelte Theorie für die Integralgruppe und die Integralperioden anwenden. Ich gebe zunächst einige numerische Beispiele und bediene mich dabei der folgenden Abkürzungen:

Für $f = q \pm 1$ soll $\mathfrak{D}_f^{(t)}(t)$, wo t ein Teiler von $\frac{q \mp 1}{2}$, d. h. von $q - \frac{f}{2}$ und $t > 2$ ist, eine der eben unter 3., 4. beschriebenen Darstellungen sein, deren Charakter mit der primitiven t -ten Einheitswurzel ϱ oder σ gebildet ist. Da in der Integralgruppe \mathfrak{S} solche $\mathfrak{D}_f^{(t)}(t)$ mit algebraisch konjugiertem Charakter, d. h. mit demselben f, t gleich oft vorhanden sind, so tritt in \mathfrak{S} gleich das volle Aggregat $\sum_i \mathfrak{D}_f^{(t)}(t)$ eine ganze Anzahl von Malen auf, wobei diese Summe aus den $\frac{1}{2} \varphi(t)$ verschiedenen Darstellungen mit demselben t , d. h. für die verschiedenen konjugierten ϱ oder σ besteht. An einer solchen Summe soll noch die wichtige Anzahl der Summanden $\frac{1}{2} \varphi(t)$ besonders angegeben werden in der Form

$$\sum_{\left(\frac{1}{2} \varphi(t)\right)} \mathfrak{D}_f^{(t)}(t).$$

Für $t = 3, 4, 6$ besteht diese Summe nur aus einem Glied und soll dann auch nur als $\mathfrak{D}_f(t)$ geschrieben werden.

Für die ersten Primzahlen q ergibt sich so die folgende Übersicht über die Zusammensetzung der Integralgruppe $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(q)$ der q -ten Stufe:

$$\mathfrak{S}(7) = \mathfrak{D}_7,$$

$$\mathfrak{S}(11) = \mathfrak{D}_6 + \mathfrak{D}_{11} + \mathfrak{D}_{10}(3),$$

$$\mathfrak{S}(13) = \mathfrak{D}_{14}(6) + \sum_{(7)} \mathfrak{D}_{13}^{(7)}(7),$$

$$\mathfrak{S}(17) = \mathfrak{D}_{17} + \sum_{(9)} \mathfrak{D}_{16}^{(9)}(8) + 2 \mathfrak{D}_{16}(3) + \sum_{(8)} \mathfrak{D}_{16}^{(8)}(9),$$

$$\mathfrak{S}(19) = \mathfrak{D}_9 + \mathfrak{D}_{19} + \sum_{(9)} \mathfrak{D}_{18}^{(9)}(9) + 2 \sum_{(8)} \mathfrak{D}_{18}^{(8)}(5) + \sum_{(6)} \mathfrak{D}_{18}^{(6)}(10),$$

$$\mathfrak{S}(23) = 3 \mathfrak{D}_{11} + 2 \mathfrak{D}_{23} + \sum_{(6)} \mathfrak{D}_{22}^{(6)}(11) + 2 \mathfrak{D}_{22}(4) + 2 \mathfrak{D}_{22}(3) + 2 \mathfrak{D}_{22}(6) + \sum_{(12)} \mathfrak{D}_{22}^{(12)}(12).$$

Diese Tabelle kann berechnet werden aus den bekannten einfachen Charakteren χ von \mathfrak{D}_f mit der Formel § 4, Satz 8 — außer für die beiden

nicht-reellen Darstellungen des Grades $\frac{q-1}{2}$, welche bei $q \equiv 3 \pmod{4}$ existieren. Für $f = \frac{q-1}{2}$ liefert der Satz nur die Summe der Vielfachheiten

$$\kappa(\mathfrak{D}_f) + \kappa(\overline{\mathfrak{D}}_f).$$

Die Differenz $\kappa(\mathfrak{D}) - \kappa(\overline{\mathfrak{D}})$ ist, wie ich früher gezeigt habe¹³⁾, gleich der Klassenzahl h des Körpers $K(\sqrt{-q})$. Andererseits werden durch binäre Thetareihen vom Typus

$$(82) \quad \vartheta(\tau, r, \sqrt{-q}) = \sum_{\mu \equiv r \pmod{\sqrt{-q}}} \mu \cdot e^{2\pi i \tau \frac{\mu^2}{q}}$$

(μ durchläuft die ganzen Zahlen aus $K(\sqrt{-q})$, welche kongruent der rationalen Zahl $r \pmod{\sqrt{-q}}$ sind) genau h linear unabhängige Systeme von je $f = \frac{q-1}{2}$ Modulformen (-2) -ter Dimension zu $\Gamma(q)$ erzeugt, die sich alle bei $\Gamma(1)$ nach derselben Darstellung \mathfrak{D}_f umsetzen und die durch Integration nach τ Integrale 1. Gattung zur $\Gamma(q)$ ergeben¹⁴⁾. Für die kleinen Werte von q

$$q = 7, 11, 19, 23, 31, 47, 71,$$

wo noch

$$\kappa\left(\mathfrak{D}_{\frac{q-1}{2}}\right) + \kappa\left(\overline{\mathfrak{D}}_{\frac{q-1}{2}}\right) = h,$$

folgt also aus der Existenz jener $h \cdot f$ Thetareihen, daß $\kappa(\mathfrak{D}_f) = 0$ sein muß. Die Perioden dieser h speziellen Integralsysteme sind nun bekannt. Die Grundvektoren p_x dieser Integrale sind nämlich in Gestalt unendlicher Reihen gegeben, und bei ihrer näheren Untersuchung zeigt sich, daß sie die Werte elliptischer Modulfunktionen für singuläre Argumente aus dem Körper $K(\sqrt{-q})$ sind. Über diese Zahlen lassen sich mit der Theorie der komplexen Multiplikation so genaue Aussagen machen, daß ich beweisen konnte¹⁵⁾:

Satz 16. *Unter den $h \cdot \frac{q-1}{2}$ Integralen 1. Gattung dieser Schar kann man die unabhängigen so auswählen, daß deren Perioden bei $\Gamma(q)$ immer ganze Zahlen aus $K(\sqrt{-q})$ sind.*

Diese Integrale nehmen überhaupt, auch hinsichtlich ihres Verhaltens gegenüber dem Operator T_n , eine Sonderstellung ein und sind also überdies elliptische Integrale.

Von den übrigen Darstellungen \mathfrak{D}_f , die also nach § 6 sämtlich im Körper ihres reellen Charakters realisierbar sind, betrachten wir zunächst die mit rationalem Charakter, also mit $f = q$ und von denen mit $f = q \pm 1$ die mit $t = 3, 4, 6$.

¹⁴⁾ E. Hecke, Zur Theorie der ellipt. Modulfunktionen, Math. Annalen 97 (1926), S. 210.

Satz 13 zeigt, daß die Perioden dieser κ Systeme auf eine Periodenmatrix $(\tau_{\alpha\beta})$ führen. Bei festem n erfährt die n -te Komponente jeder der Integralvektoren unter einer Substitution L aus $\Gamma(q)$ den additiven Zuwachs

$$(83) \quad g^e + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} g_{\alpha} \cdot \tau_{\alpha e},$$

wo g^e, g_{α} ganze rationale Zahlen bedeuten.

Das endgültige Ziel der Theorie ist nun nicht die Bestimmung der $\tau_{\alpha\beta}$ selbst, da diese ja keineswegs eindeutig fixiert sind, sondern noch von der in hohem Maße willkürlichen Auswahl der Koordinatenvektoren im 2κ -dimensionalen g -Raum abhängen. Vielmehr hat man invariante Aussagen über die $\tau_{\alpha\beta}$ zu suchen, welche unabhängig von diesen willkürlichen Elementen sind. Das Problem ist daher etwa so zu formulieren:

Welches sind die Werte der Modulfunktionen κ -ten Grades, die zu periodischen Funktionen von κ Variablen mit dem Periodensystem (83) gehören? Im allgemeinen wird die Matrix $(\tau_{\alpha\beta})$ des Grades κ nicht zu Integralperioden eines algebraischen Gebildes vom Geschlechte κ gehören (Riemannsche Perioden), sondern ein allgemeineres, Jacobisches Periodengitter aufspannen. Nur für $f = q$ ist stets das erstere der Fall, denn zu einem Integralvektor $j(\tau)$, der sich nach \mathfrak{D}_q umsetzt, gibt es stets eine lineare Verbindung der Kom-

ponenten $\sum_{n=1}^{\kappa} \lambda_n j_n(\tau)$, welche bereits bei der Untergruppe $\Gamma_0(q)$ (d. h. $c \equiv 0 \pmod{q}$) invariant ist. Die Vielfachheit κ von \mathfrak{D}_q in \mathfrak{S} ist gleich dem Geschlecht von $\Gamma_0(q)$. Und das Periodenproblem für \mathfrak{D}_q ist identisch mit dem Periodenproblem für das algebraische Gebilde der Invarianten von $\Gamma_0(q)$.

Bei den anderen Darstellungen \mathfrak{D}_f gibt es keine Untergruppe $\Gamma^*(q)$ zwischen $\Gamma(q)$ und $\Gamma(1)$ von der Art, daß alle Invarianten von $\Gamma^*(q)$ nur in der Darstellung \mathfrak{D}_f , aber in keiner anderen vorkommen. Das läßt sich beweisen auf Grund der Kenntnis sämtlicher Untergruppen der $\mathfrak{M}(q)$.

Eine wichtige invariante Aussage läßt sich in einem speziellen Fall machen, wenn nämlich $\kappa = 1$. Dann sind offenbar unter den Perioden (83) nur zwei unabhängige enthalten und das Integral ist elliptisch:

Satz 17. *Ist eine Darstellung \mathfrak{D}_f mit rationalem Charakter in der Integralgruppe \mathfrak{S} nur einfach enthalten, so sind die zugehörigen f Integrale elliptisch.*

Speziell entsteht so für die erste nicht-triviale $\Gamma(q)$ eine über den klassischen Bestand der Theorie hinausgehende Aussage:

Satz 18. *Für das Gebilde $\Gamma(11)$ der Stufe 11, vom Geschlecht $p = 26$, lassen sich die 26 Integrale 1. Gattung als elliptische Integrale wählen.*

Denn die Integrale von \mathfrak{D}_f haben nach Satz 16 nur Perioden, die ganze Zahlen aus $K(\sqrt{-q})$ sind, und $\mathfrak{D}_{11}, \mathfrak{D}_{10}$ haben rationalen Charakter und die Vielfachheit 1.

Über das Gebilde $\Gamma_0(11)$ vom Geschlecht 1, dessen Perioden die zu \mathfrak{D}_{11} zusammensetzen, ist durch Fricke¹⁷⁾ bekannt, daß der Wert der „Weierstraß-Invariante“ dieses elliptischen Gebildes eine rationale Zahl, aber keine ganze Zahl ist. Daraus folgt, daß die Periode τ_{11} selbst sicher *nicht* eine imaginär-quadratische Zahl ist. Denn für solche Argumente ist die Weierstraß-Invariante bekanntlich eine ganze algebraische Zahl.

Ähnliches gilt nach den numerischen Resultaten von Fricke auch für $q = 17$ und 19 , wo $\Gamma_0(q)$ ebenfalls das Geschlecht 1 hat.

Schließlich ist der allgemeine Fall der Darstellungen $\mathfrak{D}_\gamma^{(l)}(t)$ der, daß der Körper $K(\chi)$ ihres Charakters ein total reeller (Abelscher) Zahlkörper vom Grade $n = \frac{1}{2} \varphi(t)$ ist.

Sei zunächst noch $\kappa = 1$, wie etwa bei $q = 13$. Jede der drei Darstellungen $\mathfrak{D}_l^{(0)}(7)$ ($l = 1, 2, 3$) mit konjugierten Koeffizienten aus dem reellen kubischen Unterkörper der 7. Einheitswurzeln $K(\sigma + \sigma^{-1})$ wird durch einen Integralvektor 1. Gattung mit 12 Komponenten realisiert. Dabei nehmen wir natürlich an, daß wir die Koordinatenvektoren g^a in den drei Darstellungen ebenfalls als konjugierte Größen aus dem kubischen Körper gewählt haben. Betrachten wir etwa die erste Komponente dieser drei Integralvektoren! Nach (63) ist das allgemeinste simultane Periodensystem dieser drei Integrale bei einer beliebigen Substitution L aus $\Gamma(q)$ von folgender Gestalt:

$$(84) \quad j_1^{(l)}(L\tau) = j_1^{(l)}(\tau) + \mu^{(l)} + \lambda^{(l)} \cdot \tau_{11}^{(l)}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Hier sind μ, λ Zahlen aus dem kubischen Körper mit beschränktem Nenner, und die oberen Indizes l bezeichnen die algebraischen Konjugierten.

Derartige besondere Periodensysteme für periodische Funktionen von drei Variablen sind nun schon bei anderen Problemen aufgetreten, es sind die Hilbertschen Periodensysteme über dem total reellen Körper $K(\sigma + \sigma^{-1})$; und die oben erwähnten invarianten Verbindungen der drei Größen $\tau_{11}^{(l)}$, deren Bestimmung als das Ziel der Theorie erscheint, sind die Hilbertschen Modulfunktionen der drei Variablen $\tau_{11}^{(l)}$ über dem Körper $K(\sigma + \sigma^{-1})$. Sie sind invariant, wenn man auf die drei Argumente $\tau_{11}^{(l)}$ die konjugierten Substitutionen der Modulgruppe dieses total reellen kubischen Körpers ausübt. Die Thetareihen, aus denen sich diese invarianten Funktionen zusammenbauen lassen, haben die Gestalt

$$(85) \quad \sum_{\mu} \exp \left\{ \pi i \sum_{l=1}^3 \mu^{(l)2} \cdot \tau_{11}^{(l)} \right\}, \quad (\exp x = e^x),$$

wo μ alle ganzen Zahlen eines Ideals aus dem Körper durchläuft, während der obere Index l bei den μ die Konjugierten bezeichnet.

Allgemein findet man so:

¹⁷⁾ R. Fricke, Die ellipt. Funktionen und ihre Anwendungen, Leipzig 1922, Bd. II, S. 403 ff.

Satz 19. Das Periodenproblem für die $n = \frac{1}{2} \varphi(t)$ algebraisch-konjugierten Darstellungen $\mathfrak{D}_f^{(l)}(t)$ ($l = 1, \dots, n$) ist, wenn die Vielfachheit κ derselben in der Integralgruppe gleich 1 ist, gleichbedeutend mit der Bestimmung der Werte Hilbertscher Modulfunktionen von n Variablen über dem total reellen Körper n -ten Grades, der durch die Charaktere der Darstellungen $\mathfrak{D}_f^{(l)}(t)$ bestimmt ist.

Im allgemeinsten Falle ist endlich auch noch $\kappa > 1$. Dann sind die fraglichen Periodensysteme für $n \cdot \kappa$ Variablen simultan anzusetzen und haben folgenden Typus

$$\gamma^{l,e} + \sum_{a=1}^{\kappa} \gamma_a^{(l)} \tau_{ae}^{(l)}, \quad \begin{matrix} e = 1, 2, \dots, \kappa, \\ l = 1, 2, \dots, n. \end{matrix}$$

Hier sind die γ wieder ganze Zahlen aus dem Körper $K(\chi)$ der Charaktere, wobei die Indizes l an den γ die Konjugierten bezeichnen. An Stelle der Hilbertschen Modulgruppe des Körpers $K(\chi)$ im Falle $\kappa = 1$ tritt nun eine Gruppe von Transformationen der n Matrizen $(\tau_{ae}^{(l)})$ ($l = 1, \dots, n$), die man etwa als die Gruppe der Riemannschen Periodentransformationen in dem Körper $K(\chi)$ (anstatt wie gewöhnlich in dem rationalen Zahlkörper) bezeichnen müßte. Diese Gruppe ist bisher noch nicht systematisch studiert worden. An Stelle der oben angegebenen Thetareihen bei $\kappa = 1$ treten bei der Bildung der Invarianten dieser Gruppe jetzt folgende Thetareihen auf:

$$(86) \quad \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} \exp \left\{ \pi i \sum_{l=1}^n Q^{(l)}(\mu_1^{(l)}, \mu_2^{(l)}, \dots, \mu_n^{(l)}) \right\}.$$

Hier sind

$$Q^{(l)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\kappa} \tau_{\alpha\beta}^{(l)} x_{\alpha} x_{\beta}, \quad (l = 1, 2, \dots, n),$$

n quadratische Formen in κ Variablen und die μ durchlaufen die ganzen Zahlen des reellen Körpers $K(\chi)$, deren Konjugierte durch den oberen Index l bezeichnet sind.

In vielen Fällen sind nun die Integrale 1. Gattung zu $\Gamma(q)$ bekannt in Gestalt von Potenzreihen nach $e^{2\pi i \tau}$, die auf arithmetischem Wege, mit Hilfe von quaternären definiten ganzzahligen quadratischen Formen, erklärt sind. Ist Q_4 eine solche quadratische Form, so entstehen diese Integrale aus den vierfachen Reihen

$$(87) \quad \vartheta(\tau, Q_4) = \sum_{n_1, \dots, n_4} \exp \{ 2\pi i \tau Q_4(n_1, \dots, n_4) \},$$

(wo für die ganzzahligen n_1, \dots, n_4 eventuell noch Kongruenzen nach einem festen Modul als Summationsbedingungen hinzutreten) durch Integration nach τ , nachdem man noch einen passenden Teilwert der Weierstraßschen \wp -Funktion für die Perioden τ und 1 addiert hat, wodurch an Stelle von ϑ eine Spitzenform tritt. Nun zeigt die formale Integration, daß die Grund-

vektoren p_T eines solchen Systems von Thetareihen sich sehr einfach auf die Werte der zugehörigen Dirichlet-Reihen

$$(88) \quad \varphi(s, Q_4) = \sum_{(n)} \frac{1}{Q_4(n_1, \dots, n_4)^s}$$

im Punkte $s = 1$, dem Symmetriepunkte der Funktionalgleichung dieser Dirichlet-Reihen, zurückführen lassen. Darnach stehen also diese Werte mit den Perioden $\tau_{\alpha, s}$ in engstem Zusammenhang. Und es entsteht das Problem, die arithmetischen Konsequenzen weiter zu verfolgen, die sich aus den Symmetrieeigenschaften der $\tau_{\alpha, s}$ für diese Dirichlet-Reihen ergeben. Die Reihen scheinen ein Analogon zu den Bernoullischen Zahlen für die zu Q_4 gehörigen Quaternionenkörper zu sein. Man wird so, auch unter Heranziehung meiner Theorie der Euler-Produkte und des Operators T_n auf ganz neuartige Beziehungen zwischen der Arithmetik der ganzzahligen quadratischen Formen und der Funktionentheorie geführt.

(Eingegangen am 30. 10. 1938.)

Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsstitutionen.

Von

Bruno Schoeneberg in Hamburg.

Ist $\sum_{i,k=1}^{2r} a_{ik} n_i n_k$ eine positiv-definite quadratische Form in einer geraden Anzahl von Variablen mit ganzen rationalen Koeffizienten, so stellt bekanntlich die Thetareihe

$$\sum_{n_1, \dots, n_{2r}} e^{\pi i \tau \sum_{i,k=1}^{2r} a_{ik} n_i n_k}$$

eine eindeutige ganze Modulform der Dimension $-r$ und einer Stufe, die von der Diskriminante der quadratischen Form abhängt, dar. Diese Abhängigkeit ist bisher nicht untersucht. Zu ihrer Bestimmung, die in dieser Arbeit vorgenommen wird, wendet man auf die Thetareihe die Transformationsformel an und gelangt so zu einem System von endlich vielen, nicht notwendig linear unabhängigen Funktionen, das die ursprüngliche Reihe enthält und sich bei der vollen Modulgruppe linear homogen umsetzt. Aus der Beschaffenheit der Umsetzkoeffizienten wird bewiesen, daß alle diese Funktionen zu einer angebbaren Stufe gehören. Diese Bestimmungen sind für den Fall, daß die quadratische Form die Normenform eines Ideals aus einem imaginär-quadratischen Zahlkörper ist, von Herrn Hecke¹⁾ und für den Fall der Quaternionen von mir²⁾ vorgenommen worden. Die Herleitung der Ergebnisse geschieht gleich für eine allgemeinere Klasse von Funktionen. Diese Funktionen entstehen dadurch, daß man auf die Thetareihen einen gewissen Differenzierungsprozeß wiederholt anwendet und die so entstandenen Funktionen miteinander linear kombiniert. Hiervon sind die binären differenzierten Reihen bekannt, die zu den Größencharakteren der imaginär-quadratischen Zahlkörper führen. Die Koeffizienten unserer Funktionen sind die Kugelfunktionen in bezug auf die benutzte quadratische Form in ganzzahligen Argumenten. Als Stufe ergibt sich ein Wert, in den außer der Diskriminante noch der größte

¹⁾ Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Annalen 97 (1926), S. 210.

²⁾ Indefinite Quaternionen und Modulfunktionen, Math. Annalen 113 (1936), S. 380.

gemeinsame Teiler der $(2r-1)$ -reihigen Unterdeterminanten von (a_{ik}) eingeht. Bei der Durchführung der vorliegenden Aufgabe treten mehrfache Gaußsche Summen auf. Zu ihrer Berechnung ziehe ich das funktionentheoretische Verhalten der verallgemeinerten Thetafunktionen heran. Dadurch wird eine erhebliche Vereinfachung erzielt. Als Anwendung unserer Ergebnisse bringe ich einige neue Tatsachen über den Zusammenhang gewisser quadratischer Formen der Determinante 1 mit den Koeffizienten von $\Delta(\tau)$.

Herrn Hecke, der mich zur Beschäftigung mit diesen Fragen angeregt und durch wertvolle Ratschläge unterstützt hat, danke ich an dieser Stelle.

Wir bedienen uns im folgenden der Vektorschreibweise und bezeichnen durch

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_{2r})$$

die Gesamtheit der $2r$ Variablen n_i . Weiter sei $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ die ganze rationale Matrix einer positiv-definiten quadratischen Form in $2r$ Variablen und $D = |a_{ik}|$ ihre Determinante. Von \mathfrak{A} setzen wir $a_{ik} = a_{ki}$ und

$$a_{ii} \equiv 0 \pmod{2}$$

für alle i und k voraus. Der Wert von $\sum_{i,k=1}^{2r} a_{ik} n_i n_k$ ist also für alle ganzen n_i eine gerade Zahl. Die Voraussetzung $a_{ii} \equiv 0 \pmod{2}$ muß nötigenfalls durch Multiplikation mit 2 erreicht werden. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\sum_{i,k=1}^{2r} a_{ik} n_i n_k = \mathfrak{A}(n, n),$$

$$\sum_{i,k=1}^{2r} a_{ik} m_i n_k = \mathfrak{A}(m, n),$$

$$\sum_{i=1}^{2r} m_i n_i = (mn).$$

Den Vektor, dessen i -te Komponente $\sum_{k=1}^{2r} a_{ik} n_k$ ist, bezeichnen wir durch

$$\left\{ \sum_{k=1}^{2r} a_{ik} n_k \right\} = \mathfrak{A}(n).$$

Der Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist die Reihe

$$(1) \quad \vartheta = \sum_n e^{-\pi t \mathfrak{A}(n+u, n+u)},$$

in der $t > 0$ ist, u einen variablen Vektor bedeutet und n alle Vektoren mit ganzen rationalen Komponenten durchläuft. Um die erwähnte allgemeinere Klasse von Funktionen einzuführen, wenden wir auf ϑ den Operator

$$\Omega = \sum_{r=1}^{2r} l_r \frac{\partial}{\partial u_r} \quad \text{mit beliebigem } (l_1, \dots, l_{2r}) = 1$$

an, dessen n -malige Wiederholung durch \mathfrak{L}^n bezeichnet sei. Vorher bemerken wir noch:

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{A}(n+u, n+u)) = 2\mathfrak{A}(1, n+u),$$

$$\mathfrak{L}^2(\mathfrak{A}(n+u, n+u)) = 2\mathfrak{L}(\mathfrak{A}(1, n+u)) = 2\mathfrak{A}(1, 1).$$

Dann ist

$$(2) \quad \mathfrak{L}(\theta) = -2\pi t \sum_n \mathfrak{A}(1, n+u) e^{-\pi i \mathfrak{A}(n+u, n+u)}.$$

Durch nochmalige Anwendung des Operators \mathfrak{L} ergibt sich

$$\mathfrak{L}^2(\theta) = -2\pi t \sum_n (\mathfrak{A}(1, 1) - 2\pi t \mathfrak{A}(1, n+u)) e^{-\pi i \mathfrak{A}(n+u, n+u)}.$$

Jetzt machen wir über 1 die Voraussetzung $\mathfrak{A}(1, 1) = 0$. Dann ist

$$\mathfrak{L}^2(\theta) = (-2\pi t)^2 \sum_n (\mathfrak{A}(1, n+u))^2 e^{-\pi i \mathfrak{A}(n+u, n+u)}$$

eine Funktion, die in übersichtlicher Weise aus $\mathfrak{L}(\theta)$ hervorgeht. Das gleiche gilt auch bei wiederholter Anwendung von \mathfrak{L} :

$$(3) \quad \mathfrak{L}^k(\theta) = (-2\pi t)^k \sum_n (\mathfrak{A}(1, n+u))^k e^{-\pi i \mathfrak{A}(n+u, n+u)}.$$

Wir ziehen jetzt die Transformationsformel für Thetafunktionen heran:

$$\sum_n e^{-\pi i \mathfrak{A}(n+u, n+u)} = \frac{1}{t^r |\sqrt{D}|} \sum_n e^{-\pi \frac{\mathfrak{A}^{-1}(n, n)}{t} + 2\pi i(nu)}.$$

Dabei ist \mathfrak{A}^{-1} die zu \mathfrak{A} inverse Matrix.

Ersetzen wir in dieser Formel t durch $-i\tau$, so erhalten wir als Gleichung zwischen analytischen Funktionen für $Jm(\tau) > 0$:

$$(4) \quad \sum_n e^{\pi i \tau \mathfrak{A}(n+u, n+u)} = \frac{1}{(-i\tau)^r |\sqrt{D}|} \sum_n e^{-\frac{\pi i \mathfrak{A}^{-1}(n, n)}{\tau} + 2\pi i(nu)}.$$

Die Anwendung von \mathfrak{L}^k auf diese Gleichung führt zu:

$$(5) \quad \sum_n (\mathfrak{A}(1, n+u))^k e^{\pi i \tau \mathfrak{A}(n+u, n+u)} = \frac{(-i)^k}{(-i\tau)^{r+k} |\sqrt{D}|} \sum_n (1n)^k e^{-\frac{\pi i \mathfrak{A}^{-1}(n, n)}{\tau} + 2\pi i(nu)}.$$

Hieraus folgt für $u = \frac{h}{N}$ mit ganzem rationalem h und natürlichem, zunächst beliebigem N :

$$(6) \quad \frac{1}{N^k} \sum_{n \equiv h \pmod{N}} (\mathfrak{A}(1, n))^k e^{\pi i \tau \frac{\mathfrak{A}(n, n)}{N^2}} = \frac{(-i)^k}{(-i\tau)^{r+k} |\sqrt{D}|} \sum_n (1n)^k e^{-\frac{\pi i \mathfrak{A}^{-1}(n, n)}{\tau} + \frac{2\pi i(nh)}{N}}.$$

An Stelle des Summationszeichens n führen wir rechts ein neues durch die Substitution $n = \mathfrak{A}(x)$ ein. Wegen $x = \mathfrak{A}^{-1}(n) = \frac{\mathfrak{A}_1(n)}{D_1}$ mit ganzen \mathfrak{A}_1

und D_1 ist dann die Summe über alle rationalen x mit dem Nenner D_1 und der Bedingung $\mathfrak{A}(D_1 x) \equiv 0 \pmod{D_1}$ zu erstrecken. Als D_1 sind die Zahlen $\frac{D}{K_1}$, wo K_1 der größte gemeinsame Teiler der $(2r-1)$ -reihigen Unterdeterminanten A_{ik} von \mathfrak{A} ist, und deren Vielfache möglich. Unter ihnen wählen wir eine für das Folgende geeignete aus. Vorher bemerken wir, daß die Unterdeterminanten A_{ik} gerade Zahlen sind. Das folgt leicht daraus, daß die zugehörigen Matrizen \mathfrak{A}_i ganz, symmetrisch, von ungeradem Grade sind und in der Hauptdiagonale gerade Elemente besitzen. Die ausgewählte Zahl sei

$$N = \frac{D}{K},$$

wobei

$$K = \left(\frac{A_{11}}{2}, \frac{A_{22}}{2}, \dots, \frac{A_{2r-1, 2r-1}}{2}, A_{ik} \right)$$

ist und somit den größten gemeinsamen Teiler der A_{ik} und der durch 2 geteilten A_{ii} bedeutet. Dieses N soll auch der Wert des schon in (6) gebrauchten N sein. Jetzt wird die rechte Seite von (6), wenn wir wieder über n summieren,

$$(6') = \frac{(-i)^k}{(-i\tau)^{r+k} N^k |\sqrt{D}|} \sum_{\substack{n \\ \mathfrak{A}(n) \equiv 0 \pmod{N}}} (\mathfrak{A}(l, n))^k e^{-\frac{\pi i \mathfrak{A}(n, n)}{\tau N^2} + \frac{2\pi i \mathfrak{A}(n, h)}{N^2}}$$

Beachten wir noch, daß wegen $\mathfrak{A}(n) \equiv 0 \pmod{N}$ der Wert $\mathfrak{A}(n, h) \pmod{N^2}$ nur von $n \pmod{N}$ abhängt, so ergibt sich für (6) die Gestalt

$$(7) \quad \sum_{n \equiv h \pmod{N}} (\mathfrak{A}(l, n))^k e^{\frac{\pi i \tau \mathfrak{A}(n, n)}{N^2}} \\ = \frac{(-i)^r}{(-i\tau)^{r+k} |\sqrt{D}|} \sum_{\substack{g \pmod{N} \\ \mathfrak{A}(g) \equiv 0 \pmod{N}}} e^{\frac{2\pi i \mathfrak{A}(g, h)}{N^2}} \sum_{n \equiv g \pmod{N}} (\mathfrak{A}(l, n))^k e^{-\frac{\pi i \mathfrak{A}(n, n)}{N^2}}$$

Wir machen jetzt über h die Voraussetzung

$$\mathfrak{A}(h) \equiv 0 \pmod{N}$$

und haben dann auf der linken Seite von (7) eine derjenigen Funktionen, die rechts durch die innere Summe dargestellt wurden. Ersetzen wir noch τ durch $-\frac{1}{\tau}$, so sagt (7) aus, daß sich das System der Funktionen

$$(8) \quad \sum_{n \equiv h \pmod{N}} (\mathfrak{A}(l, n))^k e^{\frac{\pi i \tau \mathfrak{A}(n, n)}{N^2}},$$

in dem h alle ganzen Vektoren \pmod{N} mit $\mathfrak{A}(h) \equiv 0 \pmod{N}$ durchläuft, bei der Substitution $-\frac{1}{\tau}$ linear in sich umsetzt. Da in (7) von dem Parameter l nur die Verbindung $(\mathfrak{A}(l, n))^k$ linear und homogen auftritt, gilt dieselbe

Formel auch, wenn man $(\mathfrak{A}(1, u))^k$ durch ein beliebiges homogenes Polynom $P_k(u)$ der Dimension k ersetzt, das sich in der Gestalt

$$(9) \quad P_k(u) = \sum_{(l)} c_l (\mathfrak{A}(1, u))^k$$

darstellen läßt³⁾. Da die Reihen (8) bei der Substitution $\tau + 1$ den Faktor $e^{\frac{2\pi i}{N^2} \mathfrak{A}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})}$ aufnehmen, ist ihr Verhalten auch hier von 1 unabhängig. Daher definieren wir jetzt mit ganzem \mathfrak{h} und $\mathfrak{A}(\mathfrak{h}) \equiv 0 \pmod{N}$

$$(10) \quad \vartheta(\tau; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k) = \sum_{n \equiv \mathfrak{h} \pmod{N}} P_k(n) e^{\frac{2\pi i}{N^2} \mathfrak{A}(n, n)}.$$

Aus unserer Festlegung von N und $\mathfrak{A}(\mathfrak{h}) \equiv 0 \pmod{N}$ folgt, daß der Exponent $\frac{\frac{1}{2} \mathfrak{A}(n, n)}{N^2}$ in der Summe nur den Nenner N hat.

Das Verhalten unserer Funktionen bei Moduls substitutionen wird bestimmt durch:

$$\text{I. } \vartheta(\tau + 1; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k) = e^{\frac{2\pi i}{N^2} \mathfrak{A}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})} \vartheta(\tau; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k),$$

$$\text{II. } \vartheta\left(-\frac{1}{\tau}; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k\right) = \frac{(-i)^k \tau^{r+k}}{|\sqrt{D}|} \sum_{\substack{g \pmod{N} \\ \mathfrak{A}(g) \equiv 0 \pmod{N}}} e^{\frac{2\pi i}{N^2} \mathfrak{A}(\mathfrak{h}, g)} \vartheta(\tau; g, \mathfrak{A}, P_k).$$

Formel I. folgt daraus, daß der Wert von $\frac{\frac{1}{2} \mathfrak{A}(n, n)}{N^2} \pmod{1}$ nur von $n \pmod{N}$ abhängt. Formel II. ergibt sich unmittelbar aus (7) in Verbindung mit (9).

Im übrigen gelten noch die Beziehungen:

$$\vartheta(\tau; \mathfrak{h}_1, \mathfrak{A}, P_k) = \vartheta(\tau; \mathfrak{h}_2, \mathfrak{A}, P_k), \quad \text{wenn } \mathfrak{h}_1 \equiv \mathfrak{h}_2 \pmod{N},$$

$$\vartheta(\tau; -\mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k) = (-1)^k \vartheta(\tau; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k).$$

Zur Durchführung der weiteren Rechnung wird noch folgende, für jedes natürliche n gültige Gleichung gebraucht:

$$(11) \quad \vartheta(\tau; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k) = \frac{1}{n^k} \sum_{\substack{g \equiv \mathfrak{h} \pmod{N} \\ g \pmod{n} \equiv 1}} \vartheta(n\tau; g, n\mathfrak{A}, P_k).$$

³⁾ Die Schar der Funktionen $P_k(u)$ mit festem k ist offenbar invariant bei denjenigen Transformationen der u , die $\mathfrak{A}(u, u)$ in sich überführen. Außerdem läßt sich leicht zeigen, daß die $P_k(u)$ orthogonal zu allen homogenen Polynomen niedrigeren Grades sind. Hierbei soll f zu g orthogonal heißen, wenn $\int \dots \int f g dU = 0$. Wir

bezeichnen daher die $P_k(u)$ als Kugelfunktionen in bezug auf \mathfrak{A} , da diese Orthogonalitätsbedingung sich auch umgekehrt als hinreichend für die Kennzeichnung der $P_k(u)$ erweisen.

Diese Formel ergibt sich aus der Reihe (10), wenn man beachtet, daß in der mit \mathfrak{N} statt mit \mathfrak{A} gebildeten Reihe N durch $\mathfrak{n} N$ und $P_k(n)$ durch $\mathfrak{n}^k P_k(n)$ zu ersetzen ist.

Es soll nun das Verhalten der Reihen bei beliebigen Modulsstitutionen $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ bestimmt werden. Diese Bestimmung geschieht bis Gleichung (14) im wesentlichen nach der unter ¹⁾ genannten Arbeit von Herrn Hecke. Für $c = 0$ ist das Verhalten durch I. gegeben. Sei also $c \neq 0$ und, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $c > 0$. Wir benutzen die Identität

$$\frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(a\tau+d)}$$

und wenden die Gleichungen (11), I. und II. an. Dann erhalten wir:

$$(12) \quad \frac{\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k\right) (ic)^r |\sqrt{D}|}{(c\tau+d)^{r+k}} = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \bmod N \\ \mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \equiv 0 \pmod{N}}} \varphi(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}) \vartheta(\tau; \mathfrak{t}, \mathfrak{A}, P_k).$$

Dabei ist

$$(13) \quad \varphi(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}) = \sum_{\substack{a \bmod cN \\ g \equiv \mathfrak{h} \pmod{N}}} e^{2\pi i a \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{A}(g, 0)}{cN^2} + 2\pi i \frac{\mathfrak{A}(g, \mathfrak{t})}{cN^2} + 2\pi i d \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{A}(\mathfrak{t}, \mathfrak{t})}{cN^2}}$$

Dieser Ausdruck hängt von \mathfrak{t} nur mod. N ab. Denn, wie man leicht zeigt, ist

$$\varphi(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}) = e^{-2\pi i \frac{bd \cdot \frac{1}{2}\mathfrak{A}(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}) + b\mathfrak{A}(\mathfrak{h}, \mathfrak{t})}{N^2}} \varphi(\mathfrak{h} + d\mathfrak{t}, 0).$$

Diese allgemein gültigen Formeln nehmen bei geeigneten Voraussetzungen über $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine sehr einfache Gestalt an. Sei zunächst $d \equiv 0 \pmod{N}$. Dann ist

$$\frac{\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k\right) (ic)^r |\sqrt{D}|}{(c\tau+d)^{r+k}} = \varphi(\mathfrak{h}, 0) \sum_{\mathfrak{t} \bmod N} e^{-2\pi i \frac{b\mathfrak{A}(\mathfrak{h}, \mathfrak{t})}{N^2}} \vartheta(\tau; \mathfrak{t}, \mathfrak{A}, P_k).$$

Hierauf wenden wir noch einmal II. an, indem wir von τ zu $-\frac{1}{\tau}$ übergehen. Dann erhalten wir:

$$\frac{\vartheta\left(\frac{b\tau-a}{d\tau-c}; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k\right)}{(d\tau-c)^{r+k}} = \frac{\varphi(\mathfrak{h}, 0)}{(-c)^r D} \sum_{\mathfrak{g}, \mathfrak{t} \bmod N} e^{2\pi i \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}-b\mathfrak{h})}{N^2}} \vartheta(\tau; \mathfrak{g}, \mathfrak{A}, P_k).$$

Nun ist aber

$$\sum_{\substack{\mathfrak{t} \bmod N \\ \mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \equiv 0 \pmod{N}}} e^{2\pi i \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}-b\mathfrak{h})}{N^2}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{g} - b\mathfrak{h} \not\equiv 0 \pmod{N}, \\ D, & \text{wenn } \mathfrak{g} - b\mathfrak{h} \equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Somit ergibt sich, wenn wir noch die Matrix $\begin{pmatrix} b, & -a \\ d, & -c \end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ ersetzen, für alle Modulusubstitutionen mit $c \equiv 0 \pmod{N}$ und $d > 0$

$$(14) \quad \frac{\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \mathfrak{h}, P_k\right)}{(c\tau+d)^{r+\frac{1}{2}}} = \frac{\varphi(\mathfrak{h}, 0)}{d^r} \vartheta(\tau; a\mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k).$$

Zur Berechnung von $\varphi(\mathfrak{h}, 0)$ beachten wir, daß in

$$\varphi(\mathfrak{h}, 0) = \sum_{\substack{g \bmod dN \\ g \equiv \mathfrak{h} \pmod{N}}} e^{2\pi i b \frac{\frac{1}{2} \mathfrak{W}(g, g)}{dN^2}}$$

wegen $ad \equiv 1 \pmod{N}$ über alle

$$g \equiv ad\mathfrak{h} + Ng_1 \pmod{dN},$$

wo $g_1 \bmod d$ läuft, zu summieren ist. Hierdurch wird

$$\varphi(\mathfrak{h}, 0) = e^{2\pi i \frac{ab \cdot \frac{1}{2} \mathfrak{W}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})}{N^2}} \sum_{g \bmod d} e^{2\pi i \frac{b \cdot \frac{1}{2} \mathfrak{W}(g, g)}{d}}$$

Für das Weitere ziehen wir das funktionentheoretische Verhalten der ϑ heran und bedenken, daß $\varphi(\mathfrak{h}, 0)$ nicht von P_k abhängt und so mit Hilfe der sicher nicht identisch verschwindenden Reihen mit $k=0$ umgeformt werden kann. Wir setzen

$$\frac{1}{d^r} \sum_{g \bmod d} e^{2\pi i \frac{b \cdot \frac{1}{2} \mathfrak{W}(g, g)}{d}} = \Phi(b, d).$$

Dann folgt aus (14) und I., wenn τ durch $\tau + n$ mit ganzem n ersetzt wird und $k=0$ angenommen ist, bei $d+nc > 0$

$$\Phi(b, d) = \Phi(b+na, d+nc).$$

Das aber heißt, daß $\Phi(b, d)$ für alle n im Körper jeder $(d+nc)$ -ten Einheitswurzeln liegt und damit rational sein muß. Wegen $(b, d) = 1$ ist durch die Abbildung $e^{2\pi i \frac{b}{d}} \rightarrow e^{2\pi i \frac{1}{d}}$ ein Automorphismus des Körpers der d -ten Einheitswurzeln bestimmt. Bei diesem wird $\Phi(b, d)$ auf $\Phi(1, d)$ abgebildet. Da diese Werte schon als rational erkannt sind, ist

$$\Phi(b, d) = \Phi(1, d) = \Phi(1, d+nc).$$

In dieser Gleichung kann $c=N$ gesetzt werden, da mit $\begin{pmatrix} a, & b \\ c'N, & d \end{pmatrix}$ auch $\begin{pmatrix} a, & b \\ N, & d \end{pmatrix}$ eine zulässige Substitution ist. Daher gilt, wenn wir

$$\Phi(1, d) = S(d)$$

setzen,

$$S(d) = S(d') \text{ bei } d \equiv d' \pmod{N}.$$

Wird auf (14) die zulässige Substitution $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ angewandt, so ergibt sich

$$S(dd') = S(d) \cdot S(d').$$

Da $S(d)$ für alle zu N teilerfremden $d > 0$ erklärt ist, ist es für positive d ein Restklassencharakter mod. N . Daher nimmt $S(d)$ nur die Werte ± 1 an. Erklären wir $S(d)$ für negative d durch $S(-d) = (-1)^r S(d)$, so erhalten wir statt (14) folgende, für alle Modulsubstitutionen mit $c \equiv 0 \pmod{N}$ gültige Formel:

$$(15) \quad \frac{\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k\right)}{(c\tau+d)^{r+k}} = S(d) \cdot e^{\frac{2\pi i}{N^2} ab \cdot \frac{1}{2} \mathfrak{W}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})} \vartheta(\tau; a\mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k).$$

Wir sehen jetzt, daß $S(d_1) = S(d_2)$ bei $d_1 \equiv d_2 \pmod{N}$ auch richtig ist, wenn die d_1, d_2 verschiedene Vorzeichen haben. Denn bei der Substitution $\tau \rightarrow \tau + nN$ mit ganzem n bleibt die rechte Seite der Gleichung invariant, andererseits wird wegen der linken Seite $S(d)$ zu $S(d + cnN)$, wo für $d + cnN$ beide Vorzeichen durch geeignete Wahl von n möglich sind. Der Wert der Exponentialgröße wird durch den Übergang von b zu $b + anN$ nicht geändert. Damit ist die Behauptung über $S(d)$ bewiesen. Die allgemeine Gültigkeit von $S(d_1) \cdot S(d_2) = S(d_1 d_2)$ für alle zu N teilerfremden d_1, d_2 ist nach dem schon Gesagten trivial. Daher stellt $S(d)$ für positive und negative d einen Restcharakter mod. N dar. Aus (15) folgt nun für jede Modulsubstitution mit $a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \pmod{N}$

$$\frac{\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k\right)}{(c\tau+d)^{r+k}} = \vartheta(\tau; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k).$$

Das heißt:

Die $\omega_2^{-(r+k)} \vartheta\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k\right)$ sind ganze Modulformen in ω_1, ω_2 von der Dimension $(-r+k)$, welche bei allen homogenen Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe der Stufe N invariant bleiben.

Zur Bestimmung des in (15) auftretenden $S(d)$ für alle Substitutionen mit $c \equiv 0 \pmod{N}$ ersetzen wir bei positivem d in

$$S(d) = \frac{1}{d^r} \sum_{\mathfrak{g} \pmod{d}} e^{\frac{2\pi i}{d} \frac{1}{2} \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})}$$

den Wert d durch eine ungerade positive Primzahl $p_d \equiv d \pmod{N}$ derart, daß $\frac{1}{2} \mathfrak{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \pmod{p_d}$ ganzzahlig auf Hauptachsen transformierbar ist.

Dann erhalten wir bei Benutzung des allgemeinen quadratischen Restsymbols von Jacobi:

$$\begin{aligned} S(d) = S(p_d) &= \frac{1}{p_d^r} \sum_{z_r \bmod p_d} e^{2\pi i \frac{\sum_{r=1}^{2r} a_r z_r^2}{p_d}} = \frac{1}{p_d^r} \prod_{r=1}^{2r} \sum_{z_r \bmod p_d} e^{2\pi i \frac{a_r z_r^2}{p_d}} \\ &= \frac{1}{p_d^r} \prod_{r=1}^{2r} \left(\frac{a_r}{p_d} \right) \left((-1)^{\frac{p_d-1}{2}} p_d \right)^r = \left(\frac{\prod_{r=1}^{2r} a_r}{p_d} \right) \left((-1)^{\frac{p_d-1}{2}} \right)^r. \end{aligned}$$

Wegen $\prod_{r=1}^{2r} a_r \equiv 2^{-2r} D \pmod{p_d}$ ist also:

$$S(d) = \left(\frac{D}{p_d} \right) \left((-1)^{\frac{p_d-1}{2}} \right)^r = \left(\frac{(-1)^r D}{p_d} \right).$$

Hier ist $(D, p_d) = 1$, da $(N, p_d) = 1$ ist und N und D , wie man leicht sieht, die gleichen Primteiler haben. Für $(-1)^r D \equiv 0$ oder $1 \pmod{4}$ ist $S(d) = \left(\frac{(-1)^r D}{d} \right)$. Die anderen Fälle, in denen der Wert des Restsymbols von dem in seiner Restklasse gewählten p_d abhängt, treten demnach nicht auf. *Gerade quadratische Formen mit $(-1)^r D \equiv 2$ oder $3 \pmod{4}$ gibt es also nicht.* Mit dem Charakter $\chi(n)$, der durch

$$\chi(n) = \left(\frac{(-1)^r D}{n} \right), \quad (n, D) = 1, \quad n > 0,$$

$$\chi(n) = (-1)^r \chi(-n), \quad (n, D) = 1, \quad n < 0$$

oder bei ungeradem D auf Grund des Reziprozitätsgesetzes auch durch

$$\chi(n) = \left(\frac{n}{D} \right), \quad n \geq 0$$

erklärt ist, nimmt jetzt unser Ergebnis folgende Gestalt an: Für jede Modulsstitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \equiv 0 \pmod{N}$ ist:

$$(16) \quad \frac{\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k\right)}{(c\tau+d)^{r+k}} = \chi(d) e^{2\pi i \frac{ab \cdot \frac{1}{2} \mathfrak{A}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})}{N^2}} \theta(\tau; a\mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k).$$

Wählen wir aus den Funktionen $\theta(\tau; \mathfrak{h}, \mathfrak{A}, P_k)$ bei festem \mathfrak{A} und P_k ein volles System linear unabhängiger Funktionen aus, so definieren die Gleichungen I. und II. eine Darstellung der Modulgruppe $\Gamma(1)/\Gamma(N)$. Die in dieser enthaltene Darstellung von $\Gamma_0(N)/\Gamma(N)$ kann nach Gleichung (16) als monomiale Darstellung gewählt werden.

Wir gehen noch kurz auf die Verhältnisse im imaginär-quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{-D})$ mit der Diskriminante $-D$ ein. Dazu sei \mathfrak{a} ein ganzes Ideal aus $K(\sqrt{-D})$ mit der Basis (α_1, α_2) und der Norm $|N\mathfrak{a}| = A$, $\mu = n_1\alpha_1$

+ $n_2 \alpha_2 \approx n$ eine Zahl aus a und μ' die Konjugierte. Dann setzen wir $\frac{1}{2} \mathfrak{A}(n, n) = \frac{\mu \mu'}{A}$. N wird jetzt gleich D , und die Summationsbedingung $\mathfrak{A}(h) \equiv 0 \pmod{D}$ ist eine Aussage über die Differente $\sqrt{-D}$. Wegen $\mathfrak{A}(l, l) = 0$ ist

$$\mathfrak{A}(l, n) = \mu \text{ bzw. } \mu'.$$

Damit nimmt die Reihe (8) hier die Gestalt

$$(17) \quad \vartheta_k(\tau; \varrho, a, \sqrt{-D}) = \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho(a\sqrt{-D}) \\ (\varrho \equiv 0 \pmod{a})}} \mu^{k-1} e^{2\pi i \tau \frac{\mu \mu'}{A D}}$$

an. Hiervon sind die Funktionen für $k = 1$ und $k = 2$ seit langem bekannt und untersucht.

Jetzt sollen mit Hilfe unserer Ergebnisse einige neue Tatsachen aus der Arithmetik hergeleitet werden. Dazu beachten wir, daß unsere Formen dann und nur dann zur Stufe 1 gehören, wenn die Determinanten $|a_{ik}| = D(\mathfrak{A})$ der quadratischen Form $\mathfrak{A}_{2r}(n, n) = \sum_{i,k=1}^{2r} a_{ik} n_i n_k$ den Wert 1 haben. Denn N und D besitzen die gleichen Primteiler. Wir machen von jetzt an die Voraussetzung $D = 1$ und schreiben statt (10)

$$(18) \quad \vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{2r}, P_k) = \sum_n P_k(n) e^{2\pi i \tau \frac{1}{2} \mathfrak{A}_{2r}(n, n)}.$$

Für diese Reihen ist nach II.:

$$(19) \quad \frac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\tau^{r+k}} = (-i)^k \vartheta(\tau).$$

Diese Gleichung kann aber bei $k = 0$ nur für $\tau \equiv 0 \pmod{4}$ erfüllt sein. Das sieht man, wenn für τ ein positiv-imaginärer Wert eingesetzt wird.

Demnach erhalten wir folgenden Satz: Wenn $\mathfrak{A}_{2r}(n, n) = \sum_{i,k=1}^{2r} a_{ik} n_i n_k$ eine positive quadratische Form mit ganzen a_{ik} , geraden a_{ii} und $D(\mathfrak{A}) = |a_{ik}| = 1$ ist, muß die Anzahl der Variablen durch 8 teilbar sein. Diese Bedingung ist auch hinreichend für die Existenz einer Form der beschriebenen Art. Denn für 8 Variable ist seit Minkowski die Form

$$\mathfrak{A}_8 = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0, & . & . & . & . & 0 \\ 1, & 2, & 1, & . & . & . & . & . \\ 0, & 1, & 4, & 3, & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 3, & 4, & 5, & . & . & . \\ 0, & . & . & 5, & 20, & 3, & . & . \\ 0, & . & . & . & 3, & 12, & 1, & . \\ 0, & . & . & . & . & 1, & 4, & 1 \\ 0, & . & . & . & . & . & 1, & 2 \end{pmatrix}$$

bekannt. Damit sind für die anderen durch 8 teilbaren Variablenzahlen Formen der in Frage stehenden Art durch $\mathfrak{H}_8(n, n) + \mathfrak{H}_8(n', n') + \dots$ gegeben.

Die zu \mathfrak{H}_8 gehörige θ -Reihe $\theta(\tau; \mathfrak{H}_8, 1) = \sum_n e^{2\pi i \tau \frac{1}{2} \mathfrak{H}_8(n, n)}$ ist bis auf eine Konstante mit der Eisenstein-Reihe $G_4(\tau)$ identisch.

$$(20) \quad \theta(\tau; \mathfrak{H}_8, 1) = c G_4(\tau).$$

Vergleicht man die konstanten Glieder, so ergibt sich

$$(21) \quad \sum_n e^{2\pi i \tau \frac{1}{2} \mathfrak{H}_8(n, n)} = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2\pi i n \tau}$$

mit $\sigma_3(n) = \sum_{d|n, d>0} d^3$. Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl n durch die quadratische Form $\frac{1}{2} \mathfrak{H}_8(n, n)$ ist also gleich $240 \sigma_3(n)$. Wie man sofort sieht, sind die Darstellungsanzahlen für jede andere Form in 8 Variablen, die unseren Bedingungen genügt, die gleichen. Daraus folgt, daß alle geraden quadratischen Formen in 8 Variablen mit der Determinante 1 einem Formengeschlecht angehören. Daß sogar ihre Klassenzahl 1 ist, hat kürzlich Herr Mordell⁴⁾ bewiesen.

Für $k > 0$ sind die Reihen (18) Spitzenformen der Dimension $-(k+r)$. Daher verschwinden alle $\theta(\tau; \mathfrak{H}_8, P_k)$ identisch für $k+4 < 12$. Aber für die Dimension -12 existiert als Spitzenform $\Delta(\tau)$, und unsere Reihen $\theta(\tau; \mathfrak{H}_8, P_8)$ liefern wirklich $c \Delta(\tau)$ mit von Null verschiedenem c . Daß $c \neq 0$ ist, hat Herr Hecke, wie er mir mündlich mitteilte, durch Ausrechnen bestätigt. Dazu ist die genaue Kenntnis der Darstellungen von 1 durch $\frac{1}{2} \mathfrak{H}_8$ notwendig. Wir erhalten also, wenn wir die multiplikative Konstante in P_8 hineinziehen,

$$(22) \quad \Delta(\tau) = \sum_n P_8(n) e^{2\pi i \tau \frac{1}{2} \mathfrak{H}_8(n, n)}.$$

Diese Gleichung liefert als eine neue arithmetische Kennzeichnung für die Koeffizienten von $\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n \tau}$ die Identität

$$c(n) = \sum_{\frac{1}{2} \mathfrak{H}_8(m, m) = n} P_8(m).$$

Eine Form der Dimension -12 erhalten wir noch auf einem anderen Wege, nämlich durch $(\theta(\tau; \mathfrak{H}_8, 1))^3 = \theta(\tau; \mathfrak{H}_{24}, 1)$ mit der quadratischen

⁴⁾ L. J. Mordell, The definite quadratic forms in eight variables with determinant unity, Liouville Journal de Math. XVII (1938). Dort wird auch die einfachere Gestalt dieser Form angegeben:

$$\mathfrak{H} = \sum_{i=1}^8 x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^8 x_i \right)^2 - 2x_1x_2 - 2x_3x_8,$$

welche Korkine und Zolotareff entdeckt haben [Math. Annalen 6 (1873)].

Form $\mathfrak{A}_{24} = \mathfrak{A}_8(n, n) + \mathfrak{A}_8(n', n') + \mathfrak{A}_8(n'', n'')$, die unsere Voraussetzungen erfüllt. $\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}, 1)$ ist keine Spitzenform und bildet daher zusammen mit $\Delta(\tau)$ eine Basis für die ganzen Formen der Dimension -12 . Die durch \mathfrak{A}_{24} repräsentierte Klasse von geraden quadratischen Formen in 24 Variablen mit der Determinante 1 ist aber nicht die einzige Klasse dieser Art. Dies Ergebnis erhalten wir mit Hilfe der Theorie von Siegel⁵⁾. Danach gilt folgender Satz: Wenn $\overline{\mathfrak{A}}_{24}$ alle Formenklassen desselben Geschlechts durchläuft, ist

$$\sum_{\overline{\mathfrak{A}}_{24}} c(\overline{\mathfrak{A}}_{24}) \vartheta(\tau; \overline{\mathfrak{A}}_{24}, 1) = c G_{12}(\tau).$$

Dabei ist $G_{12}(\tau)$ die Eisensteinsche Reihe der Dimension -12 ; c und die $c(\overline{\mathfrak{A}}_{24})$ sind von Null verschieden. Wären nun alle diese Thetareihen linear abhängig von der einen mit \mathfrak{A}_{24} gebildeten, also dieser gleich, so folgte mit einer Konstanten a

$$\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}, 1) = a \cdot G_{12}(\tau) = a (691 + 65520 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n) e^{2\pi i n \tau})$$

($\sigma_{11}(n)$ = Summe der 11. Teilerpotenzen von n) mit Benutzung des Wertes der Bernoullischen Zahl B_8 . Dann müßte also $a = \frac{1}{691}$ sein, aber damit würde bereits der Koeffizient mit $n = 1$ keine ganze Zahl sein, wie es auf der linken Seite dieser Gleichung der Fall ist. Es gibt also noch mindestens eine weitere Klasse, repräsentiert etwa durch \mathfrak{A}_{24}^* , und die ϑ -Reihen $\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}, 1)$ und $\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}^*, 1)$ sind linear unabhängig. Außerdem ist keine von ihnen mit $G_{12}(\tau)$ bis auf einen konstanten Faktor identisch. Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(23) \quad \vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}, 1) - \vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}^*, 1) = c \Delta(\tau),$$

$$(24) \quad \vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}, 1) = \alpha G_{12}(\tau) + \beta \Delta(\tau),$$

$$\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}^*, 1) = \alpha G_{12}(\tau) + \beta^* \Delta(\tau)$$

mit von Null verschiedenen $c, \alpha, \beta, \beta^*$. Diese Gleichungen liefern eine neue Kennzeichnung der Koeffizienten $c(n)$ von $\Delta(\tau)$. Nach (23) messen die $c(n)$ den Unterschied der Darstellungsanzahlen in den einzelnen Klassen. Nach (24) sind sie ein Maß für den Unterschied der Koeffizienten von $\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}, 1)$ bzw. $\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}^*, 1)$ gegen die Koeffizienten von $\alpha G_{12}(\tau)$. Bekanntlich sind nun die Koeffizienten von $G_{12}(\tau)$ von der Größenordnung $n^{11-\epsilon}$ und die von $\Delta(\tau)$ von der Größenordnung n^6 . Die Anzahlen der Darstellungen einer natürlichen Zahl haben für $\frac{1}{2} \mathfrak{A}_{24}$ und $\frac{1}{2} \mathfrak{A}_{24}^*$ also den gleichen asymptotischen Wert, und die Fehler sind von gleicher Größenordnung und werden durch die Koeffizienten von $\Delta(\tau)$ gemessen.

⁵⁾ Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Ann. of Math. (2) 36 (1935).

Aus (20) und der linearen Unabhängigkeit von $\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}, 1)$ und $\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}^*, 1)$ folgt noch ein Ergebnis für die ganzen Modulformen einer durch 4 teilbaren Dimension. Diese Formen $f_{4k}(\tau)$ lassen sich bekanntlich in der Form

$$f_{4k}(\tau) = \sum_{4\mu + 12\tau = 4k} a_{\mu} \cdot g_4^{\mu} g_6^{2\tau}$$

durch die Reihen G_4 und G_6^2 ausdrücken. Nun ist aber $G_4(\tau) = c \vartheta(\tau; \mathfrak{A}_8, 1)$ und $G_6^2 = a \vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}, 1) + b \vartheta(\tau; \mathfrak{A}_{24}^*, 1)$. Daraus folgt, daß das volle System $f_{4k}(\tau)$ der Modulformen der Dimension $-4k$ durch die $8k$ -fachen Thetareihen mit geraden quadratischen Formen der Determinante 1 erzeugt wird. Statt zur Darstellung der $f_{4k}(\tau)$ die Polynome in G_4, G_6^2 heranzuziehen, kann man auch, wie man sofort sieht, die Polynome in G_4 und Δ benutzen. Wegen (20) und (22) lassen sich dann die $f_{4k}(\tau)$ durch die Potenzprodukte in $\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_8, 1)$ und $\vartheta(\tau; \mathfrak{A}_8, P_8)$ mit festem \mathfrak{A}_8 linear ausdrücken.

Es wäre noch interessant zu untersuchen, wieweit man mit den differenzierten Thetareihen der festen Form $\mathfrak{A}_8(n, n)$ allein für die lineare Darstellung der ganzen Modulformen auskommt.

(Eingegangen am 26. 10. 1938.)

Über Interpolationsreihen.

Von

Ernst Lammell in Prag.

Von A. Ostrowski¹⁾ stammt der folgende Lückensatz: Gibt es in $f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu} z^{\lambda_{\mu}}$ unendlich viele Indizes $\mu = \mu_k$ ($k = 1, 2, \dots$), für welche bei festem positiven Θ

$$\lambda_{\mu_k+1} - \lambda_{\mu_k} > \Theta \lambda_{\mu_k}$$

gilt, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(z)$, worin

$$\Delta_0(z) = \sum_{\mu=0}^{\mu_1} c_{\mu} z^{\lambda_{\mu}} \text{ und für } k > 0 \quad \Delta_k(z) = \sum_{\mu=\mu_k+1}^{\mu_k+1} c_{\mu} z^{\lambda_{\mu}}$$

ist, gleichmäßig in der Umgebung einer jeden regulären Stelle der Peripherie des Konvergenzkreises.

Als Spezialfall ist hierin ein von Hadamard²⁾ herrührender Lückensatz enthalten, welcher lautet: Die Potenzreihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu} z^{\lambda_{\mu}}$ ist dann über ihren Konvergenzkreis hinaus nicht fortsetzbar, sobald

$$\lambda_{\mu+1} - \lambda_{\mu} > \Theta \lambda_{\mu}$$

gilt, wobei $\Theta > 0$ und von μ unabhängig ist.

Daß das Vorhandensein von Lücken keine notwendige Bedingung für die Nichtfortsetzbarkeit einer Potenzreihe über ihren Konvergenzkreis hinaus ist, zeigt besonders eine zuerst von Pólya³⁾ bewiesene Vermutung von Fatou: Ist $\sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu} z^{\mu}$ eine beliebige vorgegebene Potenzreihe mit endlichem Konvergenzkreis, dann gibt es Zahlen ε_{μ} mit $\varepsilon_{\mu}^2 = 1$, so daß $\sum_{\mu=0}^{\infty} \varepsilon_{\mu} c_{\mu} z^{\mu}$ über den Konvergenzkreis hinaus nicht fortsetzbar ist.

¹⁾ A. Ostrowski, Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten. Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften 1921, Stück XXXIV, S. 557—565.

²⁾ J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leurs développements de Taylor, J. de math. (4) 8 (1892), p. 101—186.

³⁾ G. Pólya und A. Hurwitz, Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes. Acta math. 40 (1916), S. 179—183.

Die vorangehenden Sätze über Potenzreihen wollen wir auf Reihen von der Form

$$(1) \quad A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} \prod_{v=1}^{\lambda_{\mu}} \frac{z-a_v}{1-\bar{a}_v z}, \quad |a_v| \leq \varrho < 1; \quad v = 1, 2, \dots$$

übertragen, wobei die A_{μ} und a_v Konstante sind.

Satz 1. $f(z)$ sei eine für jeden Wert von z aus $|z| < 1$ reguläre Funktion. Gibt es dann in der zu $f(z)$ gehörigen Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} \prod_{v=1}^{\lambda_{\mu}} \frac{z-a_v}{1-\bar{a}_v z} \quad ^4), \quad |a_v| \leq \varrho < 1; \quad v = 1, 2, \dots$$

unendlich viele Indizes $\mu = \mu_k$ ($k = 1, 2, \dots$), für welche bei festem Θ

$$\lambda_{\mu_k+1} - \lambda_{\mu_k} > \Theta \lambda_{\mu_k}, \quad 1 + \Theta > \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^3$$

gilt, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(z)$, worin $\Delta_0(z) = \sum_{\mu=0}^{\mu_1} A_{\mu} \prod_{v=1}^{\lambda_{\mu}} \frac{z-a_v}{1-\bar{a}_v z}$

und für $k > 0$ $\Delta_k(z) = \sum_{\mu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} A_{\mu} \prod_{v=1}^{\lambda_{\mu}} \frac{z-a_v}{1-\bar{a}_v z}$ ist, gleichmäßig in der

Umgebung einer jeden regulären Stelle auf $|z| = 1$.

Satz 2. Die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} \prod_{v=1}^{\lambda_{\mu}} \frac{z-a_v}{1-\bar{a}_v z} \quad ^5), \quad |a_v| \leq \varrho < 1; \quad v = 1, 2, \dots$$

habe den Einheitskreis $|z| < 1$ zum Konvergenzkreis. Sie ist dann über $|z| = 1$ hinaus nicht fortsetzbar, sobald

$$\lambda_{\mu+1} - \lambda_{\mu} > \Theta \lambda_{\mu} \quad \text{gilt, wobei} \quad 1 + \Theta > \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^3$$

ist und Θ von μ nicht abhängt.

Satz 3.

$$A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} \prod_{v=1}^{\lambda_{\mu}} \frac{z-a_v}{1-\bar{a}_v z}, \quad |a_v| \leq \varrho < 1; \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

sei eine beliebige Reihe von der Form (1), welche den Einheitskreis $|z| < 1$ zum Konvergenzkreis besitzt. Dann gibt es Zahlen ε_{μ} mit $\varepsilon_{\mu}^2 = 1$, so daß

$$\varepsilon_0 A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \varepsilon_{\mu} A_{\mu} \prod_{v=1}^{\lambda_{\mu}} \frac{z-a_v}{1-\bar{a}_v z}$$

über $|z| = 1$ hinaus nicht fortsetzbar ist.

⁴⁾ Ist $\lambda_{\mu} = 0$, so soll $\prod_{v=1}^{\lambda_{\mu}} \frac{z-a_v}{1-\bar{a}_v z} = 1$ gesetzt werden.

⁵⁾ Siehe Fußnote ⁴⁾.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Die Reihe

$$(1) \quad A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} \prod_{r=1}^{\mu} \frac{z - a_r}{1 - \bar{a}_r z}, \quad |a_r| \leq \varrho < 1; \quad r = 1, 2, \dots$$

sei für eine Stelle $z = z_0$ aus $\varrho < |z| < \frac{1}{\varrho}$ konvergent.

Ist $\varrho < |z_0| \leq 1$, so konvergiert die Reihe (1) für

$$(2) \quad |z| < \frac{|z_0|(1 + \varrho^2) - 2\varrho}{1 + \varrho^2 - 2\varrho|z_0|}$$

absolut und überdies gleichmäßig in

$$(2') \quad |z| \leq Z_1 < \frac{|z_0|(1 + \varrho^2) - 2\varrho}{1 + \varrho^2 - 2\varrho|z_0|}.$$

Ist $1 < |z_0| < \frac{1}{\varrho}$, so konvergiert die Reihe (1) für

$$(3) \quad |z| < \frac{|z_0|(1 + \varrho^2) + 2\varrho}{1 + \varrho^2 + 2\varrho|z_0|}$$

absolut und überdies gleichmäßig in

$$(3') \quad |z| \leq Z_2 < \frac{|z_0|(1 + \varrho^2) + 2\varrho}{1 + \varrho^2 + 2\varrho|z_0|}.$$

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Ungleichungen:

Wenn $|a| \leq \varrho < 1$ ist, so gilt für $|z| \leq 1$

$$(4) \quad \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|} \leq \frac{|z| + \varrho}{1 + \varrho|z|}$$

und für $\varrho \leq |z| \leq 1$

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \geq \frac{|z| - |a|}{1 - |a||z|} \geq \frac{|z| - \varrho}{1 - \varrho|z|},$$

für $|z| \geq 1$

$$(5) \quad \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \geq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|} \geq \frac{|z| + \varrho}{1 + \varrho|z|}$$

und für $1 \leq |z| \leq \frac{1}{\varrho}$

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| - |a|}{1 - |a||z|} \leq \frac{|z| - \varrho}{1 - \varrho|z|}.$$

Zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnungsweise ein:

$$(6) \quad \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} = \varphi(z, a), \quad \frac{|z| - \varrho}{1 - \varrho|z|} = \varphi(|z|, \varrho)$$

und

$$\frac{|z| + \varrho}{1 + \varrho|z|} = \varphi(|z|, -\varrho).$$

Es ist

$$(7) \quad A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} \prod_{r=1}^{\mu} \varphi(z, a_r) = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} \prod_{r=1}^{\mu} \varphi(z_0, a_r) \prod_{r=1}^{\mu} \frac{\varphi(z, a_r)}{\varphi(z_0, a_r)}.$$

Da nach Voraussetzung die Reihe (1) für $z = z_0$ konvergiert, so muß es ein festes positives A mit der Eigenschaft geben, so daß

$$|A_0| < A \quad \text{und} \quad |A_{\mu}| \prod_{r=1}^{\mu} \varphi(z_0, a_r) < A; \quad \mu = 1, 2, \dots$$

ist. Wir erhalten so aus (7)

$$(8) \quad |A_0| + \sum_{\mu=1}^{\infty} |A_{\mu}| \prod_{r=1}^{\mu} |\varphi(z, a_r)| < A \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \prod_{r=1}^{\mu} \left| \frac{\varphi(z, a_r)}{\varphi(z_0, a_r)} \right| \right).$$

Ist $\varrho < |z_0| \leq 1$, so wird mit Rücksicht auf (4) für $|z| \leq 1$

$$\prod_{r=1}^{\mu} \left| \frac{\varphi(z, a_r)}{\varphi(z_0, a_r)} \right| \leq \left(\frac{\varphi(|z|, -\varrho)}{\varphi(|z_0|, \varrho)} \right)^{\mu}.$$

Nun bleibt $\frac{\varphi(|z|, -\varrho)}{\varphi(|z_0|, \varrho)} < 1$, so lange $|z|$ die Ungleichung (2) erfüllt. Damit ist nach (8) für diejenigen Werte von z die absolute Konvergenz der Reihe (1) bewiesen, welche der Bedingung (2) genügen.

Die gleichmäßige Konvergenz für

$$|z| \leq Z_1 < \frac{|z_0|(1 + \varrho^2) - 2\varrho}{1 + \varrho^2 - 2\varrho|z_0|}$$

ergibt sich sofort, da für solche Werte von z

$$\frac{\varphi(|z|, -\varrho)}{\varphi(|z_0|, \varrho)} \leq q(Z_1) < 1$$

ist.

Ist $1 < |z_0| < \frac{1}{\varrho}$, so wird für $|z| \leq 1$ wegen (4) und (5)

$$\prod_{r=1}^{\mu} \left| \frac{\varphi(z, a_r)}{\varphi(z_0, a_r)} \right| \leq \left(\frac{\varphi(|z|, -\varrho)}{\varphi(|z_0|, -\varrho)} \right)^{\mu}.$$

Weil $\varphi(|z|, -\varrho) < \varphi(|z_0|, -\varrho)$ gilt, sobald $|z| < |z_0|$ ist und da nach Voraussetzung $|z| \leq 1 < |z_0|$ ist, so wird für $|z| \leq 1$

$$\frac{\varphi(|z|, -\varrho)}{\varphi(|z_0|, -\varrho)} \leq q < 1.$$

Mit Hilfe von (8) erhalten wir also das Ergebnis, daß (1) für $|z| \leq 1$ absolut und gleichmäßig konvergiert, sobald $1 < |z_0| < \frac{1}{\varrho}$ ist.

Ist $1 < |z_0| < \frac{1}{\varrho}$ und $0 \leq |z| \leq \frac{1}{\varrho}$, so ergibt sich wegen (5)

$$\prod_{r=1}^{\mu} \left| \frac{\varphi(z, a_r)}{\varphi(z_0, a_r)} \right| \leq \left(\frac{\varphi(|z|, \varrho)}{\varphi(|z_0|, -\varrho)} \right)^{\mu}.$$

Nun ist $\varphi(|z|, \varrho) < \varphi(|z_0|, -\varrho)$, wenn $|z|$ der Ungleichung (3) genügt. Damit ist nach (8) die absolute Konvergenz der Reihe (1) für

$$1 \leq |z| < \frac{|z_0|(1+\varrho^2)+2\varrho}{1+\varrho^2+2\varrho|z_0|}$$

gezeigt. Die gleichmäßige Konvergenz für

$$1 \leq |z| \leq Z_2 < \frac{|z_0|(1+\varrho^2)+2\varrho}{1+\varrho^2+2\varrho|z_0|}$$

ergibt sich sofort, da für solche Werte von z

$$\frac{\varphi(|z|, \varrho)}{\varphi(|z_0|, -\varrho)} \leq q(Z_2) < 1$$

ist.

Aus dem eben bewiesenen Hilfssatze folgt mit Rücksicht auf (2) und (2'): Ist eine Reihe von der Form (1) für jeden Wert von z aus $|z| < 1$ konvergent, so stellt sie eine daselbst reguläre Funktion von z dar⁶⁾.

Hilfssatz 2. Ist $f(z)$ eine für jeden Wert von z aus $|z| < 1$ reguläre Funktion, so läßt sie sich in eine Reihe von der Form (1) entwickeln, welche für $|z| \leq r$ mit beliebigem $r < 1$ gleichmäßig konvergiert. Für die Koeffizienten $\{A_\mu\}$, ($\mu = 0, 1, 2, \dots$) gelten die Integraldarstellungen

$$(9) \quad A_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} \frac{f(z)}{z-a_1} dz, \quad A_1 = \frac{1-\bar{a}_1 a_2}{2\pi i} \oint_{|z|=r_1} \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)} dz$$

und für $\mu \geq 2$

$$(10) \quad A_\mu = \frac{1-\bar{a}_\mu a_{\mu+1}}{2\pi i} \oint_{|z|=r_\mu} \frac{f(z)}{(z-a_\mu)(z-a_{\mu+1})} \prod_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{z-a_\nu}{1-\bar{a}_\nu z} dz,$$

worin

$$1 > r_\nu > |a_\nu|; \quad \nu = 1, 2, \dots, \mu+1$$

ist⁷⁾.

Um diesen Hilfssatz zu beweisen, gehen wir von einer von R. Lagrange herrührenden Identität aus, die wir so umschreiben, daß sie sich auf die Reihen von der Form (1) anwenden läßt⁸⁾. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-z} &= \frac{1}{z-a_1} + \frac{1-\bar{a}_1 a_2}{(z-a_1)(z-a_2)} \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z} + \frac{1-\bar{a}_2 a_3}{(z-a_2)(z-a_3)} \frac{z-a_2}{1-\bar{a}_2 z} \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z} + \\ &+ \dots + \frac{1-\bar{a}_n a_{n+1}}{(z-a_n)(z-a_{n+1})} \prod_{\nu=1}^n \frac{z-a_\nu}{1-\bar{a}_\nu z} + \frac{1}{z-z} \frac{z-a_{n+1}}{1-\bar{a}_{n+1} z} \prod_{\nu=1}^n \frac{z-a_\nu}{1-\bar{a}_\nu z}. \end{aligned}$$

⁶⁾ E. Lammell, Zum Interpolationsproblem im Einheitskreise regulärer Funktionen. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 66 (1936/37), S. 57–62.

⁷⁾ Vgl. die in Fußnote ⁶⁾ zitierte Arbeit.

⁸⁾ R. Lagrange, Mémoire sur les séries d'interpolation. Acta Math. 64 (1935), S. 6.

Durch Multiplikation mit $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ und Integration längs $|\zeta| = r_n$ mit

$$1 > r_n > |a_\nu|; \nu = 1, 2, \dots, n+1 \quad \text{und} \quad |z| < r_n$$

erhalten wir

$$f(z) = A_0 + \sum_{\mu=1}^n A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{z - a_\nu}{1 - \bar{a}_\nu z} + R_{n+1}(z),$$

wenn $\{A_\mu\}$, ($\mu = 0, 1, 2, \dots, n$) durch (9) und (10) erklärt sind und

$$R_{n+1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z - a_{n+1}}{\zeta - a_{n+1}} \prod_{\nu=1}^n \frac{z - a_\nu}{1 - \bar{a}_\nu z} d\zeta$$

gesetzt wird.

Für $|z| \leq r < r_n < 1$ und $r_n > \varrho$ ergibt sich mit Hilfe von (4)

$$|R_{n+1}(z)| < \frac{M(r_n)}{r_n - r} \frac{r + \varrho}{r_n - \varrho} \left(\frac{\frac{r + \varrho}{1 + \varrho r}}{\frac{r_n - \varrho}{1 - \varrho r_n}} \right)^n,$$

worin $M(r_n) = \max_{|z| \leq r_n} |f(z)|$ bedeutet.

Wählen wir $r_n < 1$ so, daß $\frac{r + \varrho}{1 + \varrho r} < \frac{r_n - \varrho}{1 - \varrho r_n}$ wird, was immer möglich ist, dann wird für das so bestimmte r_n für $|z| \leq r < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(z)| = 0,$$

w. z. b. w.

§ 2.

Beweis der Sätze.

a) Beweis des Satzes 1.

Den Beweis dieses Satzes bilden wir dem von Ostrowski für den Fall der Potenzreihen gegebenen Beweise nach.

$z = 1$ sei eine reguläre Stelle der Funktion $f(z)$. Dann legen wir um $z = \frac{1}{2}$ als Mittelpunkt drei Kreise mit den Radien l_1 , l_2 und l_3 , für welche

$$(11) \quad \varrho < \frac{1}{2} + l_1 < 1 < \frac{1}{2} + l_2 < \frac{1}{2} + l_3 < \frac{1}{\varrho}$$

ist und $f(z)$ sich in $|z - \frac{1}{2}| \leq l_3$ noch regulär verhält.

Der Hauptgedanke des Ostrowskischen Beweisganges liegt nun darin, daß man auf die Funktion

$$(12) \quad R_n(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(z)$$

den Dreikreisesatz anwendet, welcher

$$(13) \quad \log \frac{l_3}{l_1} \log M_2^{(n)} \leq \log \frac{l_3}{l_2} \log M_1^{(n)} + \log \frac{l_1}{l_2} \log M_3^{(n)}$$

ergibt, worin

$$M_i^{(n)} = \max_{|z - \frac{1}{2}| \leq l_i} |R_n(z)|; \quad i = 1, 2, 3$$

ist, und Radien l_i ($i = 1, 2, 3$) aufsucht, für die die rechte Seite von (13) bei $n \rightarrow \infty$ nach $-\infty$ konvergiert. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} M_2^{(n)} = 0$. Hieraus folgt

nach (12) die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(z)$ in $|z - \frac{1}{2}| \leq l_2$ und damit wegen (11) in einer hinreichend kleinen Umgebung von $z = 1$.

Ist $z = z_0$ eine von $z = 1$ verschiedene reguläre Stelle der Funktion $f(z)$ auf $|z| = 1$, so kann man diese durch eine passende Drehung nach $z = 1$ bringen. Der Typus der Reihen (1) ändert sich hierbei nicht, und insbesondere bleiben die Lücken erhalten.

Um für $M_1^{(n)}$ und $M_3^{(n)}$ eine besondere Schranke zu finden, suchen wir zunächst eine Abschätzung der Koeffizienten $\{A_\mu\}$, ($\mu = 0, 1, 2, \dots$) durchzuführen.

Ist $\lambda_\mu \geq 2$, so erhalten wir nach (10)

$$A_\mu = \frac{1 - \bar{a}_{\lambda_\mu} a_{\lambda_\mu + 1}}{2\pi i} \oint_{|\zeta| = r_\mu} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a_{\lambda_\mu})(\zeta - a_{\lambda_\mu + 1})} \prod_{v=1}^{\lambda_\mu - 1} \frac{\zeta - a_v}{1 - \bar{a}_v \zeta} d\zeta,$$

wobei $1 > r_\mu > |a_v|$; $v = 1, 2, \dots, \lambda_\mu, \lambda_\mu + 1$ ist.

Wählen wir

$$(14) \quad r_\mu = L', \quad \frac{1}{2} + l_1 < L' < 1$$

und setzen wir $M(L') = \max_{|z| \leq L'} |f(z)|$, so ergibt sich mit Hilfe von (4) und (6)

$$|A_\mu| \leq \frac{(1 + \varrho^2) M(L')}{(L' - \varrho)^2 \{\varphi(L', \varrho)\}^{\lambda_\mu - 1}} = \frac{(1 + \varrho^2) M(L')}{(L' - \varrho)(1 - \varrho L') \{\varphi(L', \varrho)\}^{\lambda_\mu}}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die gleiche Abschätzung auch für die Fälle $\lambda_\mu = 0, 1$ gilt.

Es ist mithin

$$(15) \quad |A_\mu| \leq \frac{S'(L', \varrho)}{\{\varphi(L', \varrho)\}^{\lambda_\mu}}, \quad S'(L', \varrho) = \frac{(1 + \varrho^2) M(L')}{(L' - \varrho)(1 - \varrho L')}.$$

Nun wird nach (12)

$$M_1^{(n)} \leq \sum_{\mu = n_n + 1}^{\infty} |A_\mu| \{\varphi(L_1, -\varrho)\}^{\lambda_\mu},$$

wenn

$$(16) \quad L_i = \frac{1}{2} + l_i; \quad i = 1, 2, 3$$

ist. L' soll nicht nur gemäß (14) bestimmt werden, sondern auch noch so, daß

$$(17) \quad \varphi(L_1, -\varrho) < \varphi(L', \varrho)$$

ist. Dann wird wegen (15)

$$\begin{aligned} M_1^{(n)} &\leq S'(L', \varrho) \sum_{\mu=\mu_n+1}^{\infty} \left\{ \frac{\varphi(L_1, -\varrho)}{\varphi(L', \varrho)} \right\}^{2\mu} < S'(L', \varrho) \sum_{\lambda=\mu_n+1}^{\infty} \left\{ \frac{\varphi(L_1, -\varrho)}{\varphi(L', \varrho)} \right\}^{\lambda} \\ &= S'(L', \varrho) \left\{ \frac{\varphi(L_1, -\varrho)}{\varphi(L', \varrho)} \right\}^{2\mu_n+1} \frac{1}{1 - \frac{\varphi(L_1, -\varrho)}{\varphi(L', \varrho)}}, \end{aligned}$$

also

$$(18) \quad M_1^{(n)} < S_1(L', L_1, \varrho) \left\{ \frac{\varphi(L_1, -\varrho)}{\varphi(L', \varrho)} \right\}^{2\mu_n+1}$$

Setzen wir $M = \max_{|z-\frac{1}{2}| \leq l_3} |f(z)|$, so wird nach (5), (16), (15) und da

$$\varphi(L', \varrho) < \varphi(L_3, \varrho)$$

ist,

$$\begin{aligned} M_3^{(n)} &< M + \sum_{\mu=0}^{\mu_n} |A_{\mu}| \left\{ \varphi(L_3, \varrho) \right\}^{2\mu} \leq M + \sum_{\mu=0}^{\mu_n} \frac{S'(L', \varrho)}{\left\{ \varphi(L', \varrho) \right\}^{2\mu}} \left\{ \varphi(L_3, \varrho) \right\}^{2\mu} \\ &< \left\{ \frac{\varphi(L_3, \varrho)}{\varphi(L', \varrho)} \right\}^{2\mu_n} \left(M + \frac{S'(L', \varrho)}{1 - \frac{\varphi(L', \varrho)}{\varphi(L_3, \varrho)}} \right), \end{aligned}$$

also

$$(19) \quad M_3^{(n)} < S_3(L', L_3, \varrho) \left\{ \frac{\varphi(L_3, \varrho)}{\varphi(L', \varrho)} \right\}^{2\mu_n}.$$

Durch Einsetzen von (18) und (19) in (13) ergibt sich

$$\begin{aligned} \log \frac{l_3}{l_1} \log M_3^{(n)} &\leq \lambda_{\mu_n+1} \log \frac{l_3}{l_2} \log \frac{\varphi(L_1, -\varrho)}{\varphi(L', \varrho)} \\ &\quad + \lambda_{\mu_n} \log \frac{l_3}{l_1} \log \frac{\varphi(L_3, \varrho)}{\varphi(L', \varrho)} + S, \end{aligned}$$

worin S nicht von n abhängt.

Beachtet man, daß nach Voraussetzung

$$\lambda_{\mu_n+1} - \lambda_{\mu_n} > \Theta \lambda_{\mu_n} \quad \text{oder} \quad \lambda_{\mu_n+1} > (1 + \Theta) \lambda_{\mu_n}$$

sein soll, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} (20) \quad \log \frac{l_3}{l_1} \log M_3^{(n)} &\leq -\lambda_{\mu_n} \log \frac{\varphi(L_1, -\varrho)}{\varphi(L', \varrho)} \left\{ \frac{\log \frac{l_3}{l_1} \log \frac{\varphi(L_3, \varrho)}{\varphi(L', \varrho)}}{\log \frac{l_3}{l_2} \log \frac{\varphi(L_1, -\varrho)}{\varphi(L', \varrho)}} - (1 + \Theta) \right\} + S. \end{aligned}$$

Wählen wir

$$\varphi(L_1, -\varrho) = 1 - \sigma t, \quad \varphi(L', \varrho) = 1 - t^2, \\ \varphi(L_2, \varrho) = 1 + t^2 \quad \text{und} \quad \varphi(L_3, \varrho) = 1 + \sigma t,$$

so wird wegen (11)

$$l_1 = \frac{1 - \frac{2-\varrho}{1-\varrho}\sigma t}{2\left(1 + \frac{\varrho}{1-\varrho}\sigma t\right)}, \quad l_2 = \frac{1 + \frac{2-\varrho}{1+\varrho}t^2}{2\left(1 + \frac{\varrho}{1+\varrho}t^2\right)}$$

und

$$l_3 = \frac{1 + \frac{2-\varrho}{1+\varrho}\sigma t}{2\left(1 + \frac{\varrho}{1+\varrho}\sigma t\right)}.$$

Dann geht für $t \rightarrow 0$ der erste Ausdruck in der geschwungenen Klammer von (20) gegen $\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^2$.

Ist nun nach Voraussetzung $1 + \Theta > \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^2$, so kann man durch passende Wahl von $t > 0$ erreichen, daß die geschwungene Klammer in (20) negativ wird und damit für $n \rightarrow \infty$ die rechte Seite von (20) nach $-\infty$ konvergiert.

Wir wollen noch zeigen, daß

$$(21) \quad -\frac{\log \frac{l_2}{l_1} \log \frac{\varphi(L_3, \varrho)}{\varphi(L', \varrho)}}{\log \frac{l_3}{l_2} \log \frac{\varphi(L_1, -\varrho)}{\varphi(L', \varrho)}}$$

nach keinem kleineren Werte als $\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^2$ konvergieren kann, wie man auch den Mittelpunkt $z = k$ der drei Kreise auf $(0, 1)$ wählen mag und in welcher Art man auch L_i ($i = 1, 2, 3$) und L' , wobei

(22) $k + l_i = L_i$, $i = 1, 2, 3$ und $\varrho < L_1 < L' < 1 < L_2 < L_3 < \frac{1}{\varrho}$ sein soll, gegen 1 konvergieren läßt.

Es ist wegen (22)

$$-\frac{\log \frac{\varphi(L_3, \varrho)}{\varphi(L', \varrho)}}{\log \frac{\varphi(L_1, -\varrho)}{\varphi(L', \varrho)}} > \frac{\log \frac{L_3 - \varrho}{1 - \varrho L_3}}{\log \frac{1 + \varrho L_1}{L_1 + \varrho}}$$

und

$$\frac{\log \frac{l_2}{l_1}}{\log \frac{l_3}{l_2}} > \frac{\log \frac{1-k}{l_1}}{\log \frac{1-k}{l_2}} = \frac{\log \frac{1}{1 - \frac{1-L_1}{1-k}}}{\log \left(1 + \frac{L_3-1}{1-k}\right)}$$

Nun ist

$$\lim_{L_3 \rightarrow 1} \frac{1}{L_3 - 1} \log \frac{L_3 - \varrho}{1 - \varrho L_3} = \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \quad \text{und} \quad \lim_{L_1 \rightarrow 1} \frac{1 - L_1}{\log \frac{1 + \varrho L_1}{L_1 + \varrho}} = \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho}.$$

Wenn wir schließlich

$$(23) \quad \frac{\log \frac{1}{1 - \frac{1 - L_1}{1 - k}}}{1 - L_1} \cdot \frac{L_3 - 1}{\log \left(1 + \frac{L_3 - 1}{1 - k}\right)}$$

betrachten und hierin

$$\frac{1 - L_1}{1 - k} = x_1 \quad \text{und} \quad \frac{L_3 - 1}{1 - k} = x_3$$

setzen, so geht (23) in

$$\frac{\log \frac{1}{1 - x_1}}{x_1} \cdot \frac{x_3}{\log(1 + x_3)}$$

über. Aus (22) geht hervor, daß $x_3 > 0$ und $0 < x_1 < 1$ ist.

Da aber

$$\frac{\log \frac{1}{1 - x_1}}{x_1} \quad \text{für } 0 < x_1 < 1 \quad \text{und} \quad \frac{x_3}{\log(1 + x_3)} \quad \text{für } x_3 > 0$$

monoton wachsend ist und beide Ausdrücke für $x_1 \rightarrow 0$ bzw. $x_3 \rightarrow 0$ nach Eins konvergieren, so ist unsere Behauptung bewiesen.

b) Beweis des Satzes 2.

Es wird die Folge der Partialsummen von (1) mit den Partialsummen der im Satze 1 auftretenden Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)$ identisch. Hätte also die durch die Reihe (1) dargestellte, im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ auf $|z| = 1$ eine reguläre Stelle, so wäre nach Satz 1 die Reihe (1) auch noch für Stellen außerhalb des Einheitskreises $|z| > 1$ konvergent und dann könnte nach Hilfssatz 1 der Einheitskreis $|z| < 1$ nicht Konvergenzkreis sein.

c) Beweis des Satzes 3.

Der Hurwitzsche Beweis⁹⁾ für den analogen Satz bei Potenzreihen läßt sich gleichlautend übertragen, da nach Satz 2 eine Reihe von der Form (1), welche den Einheitskreis zum Konvergenzkreise hat, sich über $|z| = 1$ hinaus nicht fortsetzen läßt, sobald nur die zwischen den aufeinanderfolgenden Gliedern auftretenden Lücken hinreichend rasch anwachsen.

⁹⁾ Siehe Fußnote 2).

(Eingegangen am 29. 6. 1938.)

Randwertaufgabe und Greensche Funktion der Potentialtheorie bei Außengebieten und die Beziehungen zu den Innengebieten.

Von

Ernst Richard Neumann in Marburg.

In dieser und der anschließenden Arbeit soll der Zusammenhang zwischen den Potentialproblemen für das Innen- und Außengebiet ein und derselben geschlossenen Kurve oder Fläche behandelt werden. Um das erfolgreich tun zu können, und um einen bisher störenden Ausnahmefall zu beseitigen, bedarf es beim Außengebiet gewisser Abänderungen in den üblichen Definitionen.

Diese Dinge und die sich dann in sehr einfacher Form darstellenden Zusammenhänge zwischen Innen- und Außengebiet werden in diesem ersten Aufsatz auseinandergesetzt, und zwar einheitlich für den Fall des logarithmischen Potentials in der Ebene und des Newtonschen Potentials im Raume. Die zweite Arbeit führt dann nur noch den ebenen Fall weiter und behandelt den Zusammenhang zwischen den Riemannschen Abbildungsfunktionen solcher komplementärer Gebiete.

§ 1.

Allgemeines.

Im Außengebiet einer geschlossenen Kurve oder Fläche σ ist eine Funktion durch die Potentialeigenschaften und durch ihre Randwerte (Rdw.) allein noch nicht eindeutig bestimmt, es bedarf noch einer näheren Festsetzung über das Verhalten im Unendlichen. Bezüglich dieses sind bisher hauptsächlich zwei Festsetzungen gemacht:

1. Man hat Funktionen X_a betrachtet, die sich im Unendlichen „wie ein Potential“ (d. h. ganz im Endlichen gelegener Massen) verhalten, also wie $k \cdot T$, wenn T die Grundleösung der Potentialgleichung für einen Pol o (den beliebig im Endlichen gelegenen „Grundpunkt“) bedeutet:

$$T_p = \begin{cases} \log \frac{1}{E_p} & \text{in der Ebene,} \\ \frac{1}{E_p} & \text{im Raume.} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} p = \text{Aufpunkt,} \\ E = \text{Entfernung vom Grundpunkte } o. \end{array} \right)$$

Es empfiehlt sich, wie ich in meinen „Beiträgen“¹⁾ gezeigt habe, diese Forderung, die Differenz $X_a - kT_a$ solle bei wachsender Entfernung E vom Grundpunkt gegen 0 gehen (wenigstens im Raume), dahin zu verstärken, daß man fordert, daß sogar noch das Produkt

$$I \quad E^{h-1} (X - kT) \text{ gegen } 0 \text{ konvergiert}^2). \quad \left(h = \begin{array}{l} 1 \text{ in der Ebene,} \\ 2 \text{ im Raume.} \end{array} \right)$$

Dann werden nämlich die in der älteren Literatur immer noch besonders gemachten Annahmen über das Verhalten der Differentialquotienten von X im Unendlichen entbehrlich.

Funktionen, die den Potentialbedingungen genügen³⁾ und im Unendlichen dieses Verhalten I zeigen, habe ich in den Beiträgen als „harmonische Funktionen“ des Außengebietes bezeichnet. Ich werde aber jetzt diesen Namen in etwas allgemeinerer Bedeutung gebrauchen und diese speziellen Funktionen, eben wegen ihres Verhaltens, wie Potentiale als „Potentialfunktionen“ bezeichnen.

2. Neben diesen Potentialfunktionen hat man dann noch Funktionen Φ_a betrachtet, die im Unendlichen gegen einen konstanten Wert C konvergieren, und zwar wieder so rasch, daß mit wachsender Entfernung vom Grundpunkt sogar noch das Produkt

$$II \quad E^{h-1} (\Phi - C) \text{ gegen } 0 \text{ konvergiert.}$$

Diese Funktionen sind von C. Neumann als „Fundamentalfunktionen“ bezeichnet⁴⁾, wenn er sie auch etwas anders definiert. (Die sachliche Überein-

¹⁾ *Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie* (Preisschriften der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig bei Teubner 1912). — Als „Studien“ zitiere ich entsprechend kurz meine *Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie* (in derselben Sammlung 1905).

²⁾ In der Landauschen Bezeichnungsweise wäre dieses Verhalten im Unendlichen charakterisiert durch $X_a = kT_a + o\left(\frac{1}{E_a^{h-1}}\right)$.

³⁾ Wegen deren genauerer Präzisierung vgl. Beitr. S. 8. — Ich gebe auch sonst im folgenden wesentlich nur den Aufbau im großen an und vor allem das, worin ich von früheren Darstellungen abweiche. Wegen der Einzelausführungen sei auf diese verwiesen, wie z. B. wegen aller Existenz- und Konvergenzfragen. — Schon deshalb seien über σ die in meinen Studien (S. 1–5) und Beiträgen (S. 1) gemachten Voraussetzungen beibehalten.

⁴⁾ Diesen Namen wendet C. Neumann bei Außengebieten zum ersten Male in seiner ersten Abhandlung *Über die Methode des arithmetischen Mittels* an (Leipziger Abhandlungen Bd. XIII, 1887), dem Begriff nach treten diese Funktionen aber bei C. Neumann schon in seinen *Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential* auf (Leipzig bei Teubner 1877); man vgl. daselbst z. B. S. 282 und 293. —

stimmung beider Definitionen habe ich in den Beiträgen S. 10–15 eingehend dargetan.)

Es stellt sich nun aber, wie wohl Plemelj zuerst betont hat, als zweckmäßig heraus, auch noch Funktionen Ω in den Bereich der Betrachtungen zu ziehen, die weder das reine Verhalten von Potential- noch von Fundamentalfunktionen zeigen, sondern ein gemischtes Verhalten: die sich nämlich, kurz gesagt, wie $k \cdot T + K$ verhalten, wo k und K Konstanten sind, oder genauer: für die bei passender Wahl von k und K auch noch das Produkt

III $E^{\lambda-1}(\Omega - (kT + K))$ gegen 0 konvergiert.

Funktionen mit den Potentialeigenschaften, die im Unendlichen dieses Verhalten III zeigen, wollen wir allgemeine „harmonische Funktionen“ nennen.

Jeder solchen harmonischen Funktion Ω sind also zwei Konstanten k und K charakteristisch: von ihnen wollen wir die erstere den „Massenfaktor“ nennen, weil sie in dem Falle, daß Ω durch das Potential innerhalb oder auf σ gelegener Materie dargestellt wird, deren Gesamtmasse angibt (während dann $K = 0$ ist). Unmittelbar sieht man nun, daß die harmonische Funktion sowohl die Potential- wie auch die Fundamentalfunktionen als Spezialfälle ($K = 0$ bzw. $k = 0$) umfassen.

Die Kenntnis dieser beiden Spezialfälle, die ich in meinen Beiträgen eingehend behandelt habe, gestattet nun aber auch sogleich die analogen Eigenschaften unserer allgemeinen harmonischen Funktionen Ω zu beweisen: Ein Vergleich von III mit I lehrt, daß man $\Omega - K$ als eine Potentialfunktion mit dem Massenfaktor k ansehen kann. Danach ergibt sich aber sofort (nach Beiträge S. 20) für die Ableitungen der harmonischen Funktionen das Resultat, daß mit wachsendem E

(D) $E^{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial r}$ gegen $-k \cos(r, E)$ konvergiert, (r = beliebige Richtung)

und daß auch hier für den Zusammenhang zwischen Funktion und Wert des Massenfaktors (wie Beiträge S. 19) die Beziehung gilt:

$$(1) \quad k = -\frac{1}{2\pi} \int_{(\omega)} \frac{\partial \Omega}{\partial N_{\omega}} d\omega.$$

Dabei bedeutet (wie auch im folgenden) ω eine beliebige σ umschließende Kurve oder Fläche und N_{ω} deren äußere Normale.

Ich hebe dies hervor zur Richtigstellung einer irrigen Bemerkung bei Plemelj in seinen *Potentialtheoretischen Studien* (Preisschriften der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig bei Teubner 1911), daselbst S. 4.

Denken wir uns sodann zwei harmonische Funktionen Ω_1 und Ω_2 gegeben mit den charakteristischen Konstanten k_1, K_1 bzw. k_2, K_2 , so liefert die Formel 12, S. 22 der Beiträge, angewandt auf die Potentialfunktionen $\Omega_1 - K_1$ und $\Omega_2 - K_2$, d. i.

$$\int_{(\sigma)} \left[(\Omega_1 - K_1) \frac{\partial (\Omega_2 - K_2)}{\partial N_{\sigma}} - (\Omega_2 - K_2) \frac{\partial (\Omega_1 - K_1)}{\partial N_{\sigma}} \right] d\omega = 0$$

in Verbindung mit (1) die folgende Verallgemeinerung jener Formel:

$$(2) \quad \int_{(\sigma)} \left(\Omega_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial N_{\sigma}} - \Omega_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial N_{\sigma}} \right) d\omega = 2h\pi (k_1 K_2 - k_2 K_1).$$

Andererseits lehrt aber eine Vergleichung von III mit II, daß man, wenigstens wenn wir den Grundpunkt in das Innere von σ verlegen (um die Stetigkeit in \mathfrak{A} nicht zu stören), auch die Differenz $\Omega - k \cdot \mathbf{T}$ als eine Fundamentalfunktion mit der charakteristischen Konstanten $C = K$ ansehen kann, und aus dieser Auffassung ergibt sich nach Beiträge S. 25:

$$(3) \quad K = \int (\Omega_{\sigma} - k \mathbf{T}_{\sigma}) \varrho_{\sigma} d\sigma = \int \Omega_{\sigma} \varrho_{\sigma} d\sigma - k \cdot \Gamma,$$

wenn ϱ die Dichtigkeit der „natürlichen Belegung“ von σ bedeutet, d. h. der Gleichgewichtsverteilung einer dem von σ begrenzt gedachten Konduktor mitgeteilten Ladung 1 von Elektrizität (bzw. in der Ebene: von einem fingierten Fluidum mit logarithmischem Potentialgesetz), und wenn Γ den zugehörigen inneren Potentialwert darstellt.

Bevor wir nun die Folgerungen aus der wichtigen Gleichung (3) ziehen, wollen wir noch bei dem Potential dieser natürlichen Belegung verweilen, für das wir im Außenraum \mathfrak{A} immer den Buchstaben Π gebrauchen werden, so daß also ϱ , Γ und Π durch folgende Relationen erklärt sind:

$$(4) \quad \int \varrho_{\sigma} d\sigma = 1, \quad \int \varrho_{\sigma} T_{\sigma 1} d\sigma = \Gamma, \quad \int \varrho_{\sigma} T_{\sigma 2} d\sigma = \Pi_{\sigma}.$$

Dieses Potential Π stellt augenscheinlich eine Potentialfunktion des Gebietes \mathfrak{A} dar (mit $k = 1$), und wenn wir noch irgendeine Konstante additiv hinzufügen, bleibt es immer wenigstens noch eine harmonische Funktion. Danach ist also

$$(4) \quad \Pi_{\sigma} - \Gamma \text{ eine harmonische Funktion von } \mathfrak{A} \text{ mit den Rdw. } 0,$$

und zwar mit den Konstanten $k = 1$ und $K = -\Gamma$, — sicher ist sie also nicht identisch 0. Aus der Existenz einer solchen Funktion folgt aber, daß harmonische Funktionen Ω durch ihre Rdw. noch nicht bestimmt sind: man kann ja immer, ohne an den Rdw. etwas zu ändern, diese Funktion $\Pi_{\sigma} - \Gamma$ (sogar noch mit beliebigen Konstanten multipliziert) hinzufügen und damit die Funktion Ω im Innern von \mathfrak{A} abändern, und mit ihr auch den Massenfaktor k und (wenn $\Gamma \neq 0$ ist) auch die Konstante K .

Da lehrt nun aber die Formel (3), daß bei gleichbleibenden Rdw. Ω , und damit festem Werte des Integrals

$$(5) \quad \int \Omega_n \varrho_n d\sigma = C$$

zwischen den beiden der harmonischen Funktion Ω charakteristischen Konstanten k und K stets die Beziehung besteht:

$$(6) \quad k \cdot \Gamma + K = C.$$

Bei festgehaltenen Rdw. Ω , kann man also immer nur eine der Konstanten k und K beliebig wählen — im allgemeinen ist es gleichgültig, welche; nur in dem Falle, daß gerade $\Gamma = 0$ ist, in C. Neumanns „singulärem Falle“, ist K eindeutig bestimmt (nämlich gleich C) — dagegen kann man k stets willkürlich wählen —, z. B. auch gleich 0 setzen, und das bedeutet: Zu jeder harmonischen Funktion von \mathfrak{A} gibt es speziell auch eine „Fundamentalfunktion“ mit den gleichen Rdw., und das ist wohl auch der tiefere Grund, weshalb C. Neumann die Rdw.-Aufgabe für das Gebiet \mathfrak{A} so formuliert: eine „Fundamentalfunktion“ bei gegebenen Rdw. zu bestimmen.

Dagegen gibt es nicht zu jeder harmonischen Funktion von \mathfrak{A} auch immer eine „Potentialfunktion“ mit denselben Rdw., denn das würde $K = 0$ bei unverändertem C fordern, und das ist eben nach (6) nicht zu erreichen, wenn $\Gamma = 0$ ist (es sei denn, daß zufällig auch $C = 0$ ist). Also erst, wenn man den (nur in der Ebene möglichen) Fall $\Gamma = 0$ ausschließt, wie auch ich es noch in meinen „Beiträgen“ tat — aber auch nur dann —, kann man die Rdw.-Aufgabe auch so formulieren: eine Potentialfunktion aus gegebenen Rdw. herzustellen.

Ausnahmslos aber kann man, anstatt $k = 0$ zu setzen und damit auf eine „Fundamentalfunktion“ auszugehen, auch für k einen beliebigen anderen Wert vorschreiben, und so kommt man zu der folgenden, in solcher Allgemeinheit wohl zuerst von Plemelj formulierten Randwertaufgabe für das Außengebiet \mathfrak{A} : Eine harmonische Funktion zu bestimmen aus gegebenen Randwerten f_n und vorgegebenem Werte k des Massenfaktors⁵⁾.

Daß die Lösung dieser Aufgabe eindeutig ist, sieht man sofort ein: Wenn zwei harmonische Funktionen Ω_1 und Ω_2 gleiche Rdw. besitzen (und ihnen daher nach (5) auch gleiche Konstanten C entsprechen) und in ihren Massenfaktoren übereinstimmen, so sind nach (6) auch die ihnen zugehörigen Konstanten K einander gleich. Die Differenz $\Omega_1 - \Omega_2$ ist also nicht nur auf σ , sondern auch im Unendlichen gleich 0 und damit nach bekannten Prinzipien eben identisch 0.

⁵⁾ Eine mit dieser Aufgabe im wesentlichen identische hat gelegentlich schon einmal C. Neumann behandelt im Anhang zu seinen (in Anm. 4 erwähnten) Untersuchungen von 1877 (vgl. S. 352). — Dort findet sich, wenn auch unter engeren Voraussetzungen bewiesen, auch schon unsere obige Formel (6).

Bei der wirklichen Lösung der obigen Rdw.-Aufgabe kann man nun schrittweise vorgehen, indem man zunächst die Fundamentalfunktion Φ_a (d. h. harmonische Funktion mit dem Massenfaktor 0) aus den Rdw. f_s (z. B. nach C. Neumann) bestimmt und alsdann nach den obigen Prinzipien ohne Änderung der Rdw. den Massenfaktor auf den gegebenen Wert k bringt, indem man $k(\Pi_a - \Gamma)$ hinzufügt. So erhält man für die gesuchte harmonische Funktion die Darstellung

$$(7) \quad \Omega_a = \Phi_a + k(\Pi_a - \Gamma).$$

Auch bei der neuen Rdw.-Aufgabe handelt es sich also letzten Endes darum, die Fundamentalfunktion Φ_a aus den gegebenen Rdw. f_s herzustellen, und das soll jetzt — zunächst die Existenz der Lösung vorausgesetzt — mittels einer Greenschen Funktion geschehen.

§ 2.

Die Greensche Funktion für das Außengebiet.

Als Greensche Funktion \mathfrak{G} definieren wir, wie üblich, eine Funktion, die in dem betreffenden Gebiet im übrigen die Potentialeigenschaften besitzt, nur in einem Punkte α , ihrem Pole, unstetig wird wie die Grundlösung $T_{(\alpha)}$ der Potentialgleichung und auf dem Rande σ verschwindet. Wir setzen daher

$$(8) \quad \mathfrak{G}_{(\alpha)a} = T_{(\alpha)a} - G_{(\alpha)a},$$

wo dann $G_{(\alpha)a}$ eine stetige Lösung der Potentialgleichung ist, die in Randpunkten s mit den Werten $T_{(\alpha)s}$ übereinstimmt. Wir nennen $G_{(\alpha)a}$ die „stetige Greensche Funktion“ für den Pol α . — Zu ihrer eindeutigen Bestimmung bedarf es aber wieder noch einer Festsetzung über ihr Verhalten im Unendlichen, und hierin weiche ich von der üblichen Forderung ab, daß $G_{(\alpha)a}$ das Verhalten einer Potentialfunktion zeigen sollte⁶⁾, was nach (6) S. 538 die Ausschließung des Falles $\Gamma = 0$ verlangt — demgegenüber will ich jetzt unter Einbeziehung dieses Falles folgendermaßen definieren:

Die zu einem Pole α gehörige stetige Greensche Funktion $G_{(\alpha)a}$ des Außengebietes ist die zu den Randwerten $T_{(\alpha)s}$ gehörige harmonische Funktion mit dem Massenfaktor 1.

Von ihr machen wir nun folgende Anwendung: Wir denken uns eine beliebige Fundamentalfunktion Φ von \mathfrak{A} gegeben und wenden dann eine bekannte Greensche Formel zunächst auf das ring- oder schalenförmige Gebiet zwischen σ und einer beliebigen σ und den Punkt α umschließenden Kurve

⁶⁾ Man strebte eben auch die Lösung der Rdw.-Aufgabe in der Gestalt einer Potentialfunktion an.

oder Fläche ω an — und zwar einmal auf Φ und die stetige Greensche Funktion $G_{(a)}$ und sodann auf Φ und die (unstetige) Funktion $T_{(a)}$, so erhalten wir:

$$0 = \int_{(\omega)} \left(\Phi_{\sigma} \frac{\partial G_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} - G_{(a)\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} \right) d\sigma - \int_{(\omega)} \left(\Phi_{\omega} \frac{\partial G_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\omega}} - G_{(a)\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{N}_{\omega}} \right) d\omega,$$

$$2h\pi\Phi_a = \int_{(\omega)} \left(\Phi_{\sigma} \frac{\partial T_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} - T_{(a)\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} \right) d\sigma - \int_{(\omega)} \left(\Phi_{\omega} \frac{\partial T_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\omega}} - T_{(a)\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{N}_{\omega}} \right) d\omega$$

(N und N äußere Normalen).

Ich behaupte nun zunächst, daß die beiden hier auftretenden Integrale über ω einander gleich sind (nämlich gleich $2h\pi(0-1 \cdot K)$). Das folgt aus (2): denn es ist $k_1 = 0$ (als Massenfaktor der Fundamentalfunktion $\Phi = \Omega_1$), und die Massenfaktoren k_2 und k_2^* der harmonischen Funktionen $G_{(a)} = \Omega_2$ und $T_{(a)} = \Omega_2^*$ sind beide gleich 1. Aber bei einer Subtraktion der letzten Formeln fallen außer dieser Integralen über ω , wegen der Übereinstimmung von $G_{(a)}$ mit $T_{(a)}$ auf σ , auch teilweise noch die über σ hin erstreckten Integrale fort, so daß sich ergibt:

$$(9) \quad \Phi_a = \frac{1}{2h\pi} \int_{(\omega)} \Phi_{\sigma} \frac{(\partial T_{(a)} - G_{(a)})}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} d\sigma = \frac{1}{2h\pi} \int_{(\omega)} \Phi_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{G}_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} d\sigma.$$

So folgt denn mit Hilfe unserer neuen Greenschen Funktion für eine Fundamentalfunktion eine Darstellung durch ihre Randwerte, die formal genau übereinstimmt mit der sonst üblichen für eine Potentialfunktion — und als Lösung der Plemelj'schen Rdw-Aufgabe (mit vorgeschriebenem Massenfaktor k) ergibt sich, ihre Existenz vorausgesetzt, nach (7):

$$(10) \quad \Omega_a = \frac{1}{2h\pi} \int f_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{G}_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} d\sigma + k(\Pi_a - I').$$

Diese Formel benutzen wir zunächst, um noch einige Eigenschaften der neuen Greenschen Funktion herzuleiten: Wenn wir die zu einem anderen Pole a gehörige stetige Funktion aus ihren Randwerten $T_{(a)\sigma}$ und ihrem Massenfaktor 1 nach (10) bestimmen, so erhalten wir zunächst:

$$(11) \quad G_{(a)\sigma} = \frac{1}{2h\pi} \int T_{(a)\sigma} \frac{\partial \mathfrak{G}_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} d\sigma + 1 \cdot (\Pi_a - I').$$

Wir wenden nunmehr, wie oben, unseren Greenschen Satz an auf das Gebiet zwischen σ und ω , diesmal aber mit Bezug auf die beiden harmonischen Funktionen $G_{(a)}$ und $G_{(a)}$ mit den Massenfaktoren $k_{(a)} = k_{(a)} = 1$ und den Konstanten $K_{(a)}$ und $K_{(a)}$. Dann folgt aus (2) unter Berücksichtigung von (6):

$$\frac{1}{2h\pi} \int_{(\sigma)} \left(G_{(a)\sigma} \frac{\partial G_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} - G_{(a)\sigma} \frac{\partial G_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} \right) d\sigma = \frac{1}{2h\pi} \int_{(\omega)} \left(G_{(a)\omega} \frac{\partial G_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\omega}} - G_{(a)\omega} \frac{\partial G_{(a)}}{\partial \mathbf{N}_{\omega}} \right) d\omega$$

$$= K_{(a)} - K_{(a)} = C_{(a)} - C_{(a)}.$$

Nun stimmt aber auf σ z. B. die Funktion $G_{(\alpha)}$ mit $T_{(\alpha)}$ überein, und nach (5) und (9), S. 537 ist

$$C_{(\alpha)} = \int T_{(\alpha)\sigma} \varrho_{\sigma} d\sigma = \Pi_{\alpha}.$$

So folgt denn:

$$\frac{1}{2h\pi} \int_{(\alpha)} \left(T_{(\alpha)\sigma} \frac{\partial G_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} - T_{(\alpha)\sigma} \frac{\partial G_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} \right) d\sigma = \Pi_{\alpha} - \Pi_{\alpha}.$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{2h\pi} \int_{(\alpha)} \left(T_{(\alpha)\sigma} \frac{\partial T_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} - T_{(\alpha)\sigma} \frac{\partial T_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} \right) d\sigma = 0$$

(weil wir $T_{(\alpha)}$ und $T_{(\alpha)}$ beide als harmonische Funktionen des Innengebietes \mathfrak{J} von σ ansehen können). Durch Subtraktion dieser beiden letzten Formeln ergibt sich nach (8):

$$\frac{1}{2h\pi} \int_{(\alpha)} T_{(\alpha)\sigma} \frac{\partial \mathfrak{G}_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} d\sigma + \Pi_{\alpha} = \frac{1}{2h\pi} \int_{(\alpha)} T_{(\alpha)\sigma} \frac{\partial \mathfrak{G}_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} d\sigma + \Pi_{\alpha},$$

und damit nach (11):

$$(12) \quad G_{(\alpha)\alpha} = G_{(\alpha)\alpha} \quad \text{oder auch} \quad \mathfrak{G}_{(\alpha)\alpha} = \mathfrak{G}_{(\alpha)\alpha} \quad [\text{vgl. (8)}].$$

Damit ist auch für diese neue Greensche Funktion die Symmetrie in Pol und Aufpunkt bewiesen.

Danach können wir anstatt (11) also auch schreiben:

$$(13) \quad G_{(\alpha)\alpha} = \frac{1}{2h\pi} \int_{(\alpha)} T_{\alpha\sigma} \frac{\partial \mathfrak{G}_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}} d\sigma + (\Pi_{\alpha} - \Gamma),$$

und diese Gleichung besagt, daß die zum Pole α gehörige stetige Greensche Funktion $G_{(\alpha)}$ bis auf eine (freilich noch von der Lage des Poles abhängige) Konstante das Potential einer Belegung von der Dichtigkeit

$$(14) \quad \eta_{(\alpha)\sigma} = \frac{1}{2h\pi} \frac{\partial \mathfrak{G}_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{N}_{\sigma}}$$

ist. Wir wollen daher diese Belegung die „Greensche Belegung“ nennen⁷⁾. Ihre Gesamtmasse (als der Massenfaktor von $G_{(\alpha)}$) ist

$$(15) \quad \int_{(\sigma)} \eta_{(\alpha)\sigma} d\sigma = 1^8).$$

⁷⁾ Es ist dies C. Neumanns „induzierte Belegung“ [vgl. Leipziger Berichte 62 (1910), S. 94]. Demnach stellt unsere Formel (9) ein ebenfalls schon von C. Neumann angegebenes Resultat dar [vgl. ebenda S. 342], doch setzt dessen Herleitung voraus, daß $\Gamma \neq 0$ sei — eine Voraussetzung, die wir nicht zu machen brauchten.

⁸⁾ Es folgt das z. B. auch aus (9) durch Spezialisierung auf den Fall $\Phi_{\alpha} \equiv 1$.

Während die Masse der in der sonst üblichen Weise definierten Greenschen Belegung für einen äußeren Pol noch von dessen Lage abhängt (mit der Einschränkung, daß sie im Raum stets positiv und kleiner als 1 ist ⁹⁾), ist sie also bei der neuen Definition stets gleich 1, ebenso groß wie bei innerer Lage des Poles. Auch schon hierin zeigt sich eine starke Vereinheitlichung der Betrachtungen für Außen- und Innengebiet bei Zugrundelegung unserer neuen Definitionen. Auch der äußere Unterschied zwischen den Formeln, welche die harmonischen Funktionen für beide Gebiete durch ihre Rdw. darstellen,

$$(10') \quad \Omega_a = \int \Omega_a \eta_{(a)\sigma} d\sigma + k(\Pi_a - \Gamma) \quad \text{und} \quad \Psi_i = \int \Psi_a \eta_{(i)\sigma} d\sigma$$

verschwindet, wenn man berücksichtigt, daß im Innengebiet eben $\Pi \equiv \Gamma$ ist.

Noch einer wichtigen Eigenschaft der (unstetigen) Greenschen Funktion $\mathfrak{G}_{(a)\sigma}$ sei hier gedacht: Außerhalb einer σ und den Pol a umschließenden Kurve oder Fläche ω stellt nach (8) $\mathfrak{G}_{(a)}$ die Differenz zweier harmonischer Funktionen mit gleichem Massenfaktor ($k=1$) dar, verhält sich also selbst wie eine harmonische Funktion mit dem Massenfaktor 0, d. h. wie eine Fundamentalfunktion, und strebt daher im Unendlichen einem endlichen Werte zu, und zwar ergibt sich für diesen nach (13) der Wert

$$(16) \quad \mathfrak{G}_{(a)\infty} = \mathfrak{G}_{(\infty)a} = \Gamma - \Pi_a.$$

Wichtige Einschränkung. Die Resultate dieses Paragraphen sind, da sie auf den Greenschen Sätzen beruhen, an die für deren Anwendung geltenden Bedingungen gebunden. Wir wollen uns an die bekanntesten unter diesen Bedingungen halten: Sie bestehen darin, daß die benutzten Funktionen in den betreffenden Gebieten auch noch bis an den Rand heran stetige erste partielle Ableitungen besitzen. Diese Bedingung ist nach bekannten Resultaten ¹⁰⁾ stets bei der Greenschen Funktion (nach neuer wie nach alter Definition) erfüllt, dagegen braucht sie bekanntlich weder bei allgemeinen Fundamentalfunktionen noch harmonischen Funktionen erfüllt zu sein, selbst wenn deren Rdw. stetig sind. Hiernach müssen wir sagen: *Die obigen Resultate sind vorläufig nur verbürgt, wenn die auftretenden harmonischen Funktionen bis an den Rand σ heran stetige erste Differentialquotienten besitzen.*

Es gilt, die Formeln von dieser stark einschränkenden Voraussetzung zu befreien, und das soll nun nach einem Prinzip geschehen, das sich auch in anderen Fällen als nützlich erweisen dürfte.

⁹⁾ In der Ebene braucht das nicht der Fall zu sein. Vgl. C. Neumann, *Untersuchungen* (1877), S. 341.

¹⁰⁾ Vgl. z. B. A. Liapounoff, Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Serie V, tome 4 (1898), No. 24, p. 307, aber auch in meinen *Studien* die „Bemerkung“ auf S. 119 in Verbindung mit S. 193.

§ 3.

Ergänzung der bisherigen Resultate.

Wir erinnern an die C. Neumannsche Methode zur Bestimmung der Fundamentalfunktion eines Gebietes aus ihren Rdw.: Es wird da ausgehend von den auf σ stetig vorgeschriebenen Werten f_s eine Folge von Funktionen f, f', f'', \dots gebildet — ich habe sie früher die Neumannschen Rand- bzw. Flächenfunktionen genannt, will jetzt aber kürzer von ihnen als den „Neumannschen Derivierten“ der Funktion f_s sprechen. Von ihnen geht jede folgende aus der vorhergehenden durch einen Integrationsprozeß hervor:

$$(17 N) \quad f_s^{(n)} = \frac{1}{h\pi} \int f_s^{(n-1)} (d\sigma)_{s^{(1)}} \left((d\sigma)_p = \frac{\partial T}{\partial r_{ps}} d\sigma = \begin{pmatrix} \text{der scheinbaren Größe} \\ \text{von } d\sigma \text{ von } p \text{ aus} \end{pmatrix} \right).$$

Diese Funktionen streben mit wachsendem n einer Konstanten C zu. Jeder dieser auf σ definierten Funktionen wird nun ein gewisses Doppelbelegungspotential zugeordnet:

$$(18 N) \quad W_p^{(n)} = \frac{1}{h\pi} \int f_s^{(n)} (d\sigma)_p \quad (\text{Neumannsche Potentiale}).$$

Diese haben die Eigenschaft, daß ihre inneren bzw. äußeren Rdw.

$$(19 N) \quad W_{is}^{(n)} = f_s^{(n+1)} + f_s^{(n)} \quad \text{und} \quad W_{as}^{(n)} = f_s^{(n+1)} - f_s^{(n)}$$

sind. Aus diesen Potentialen $W^{(n)}$ bauen sich dann die Fundamentalfunktionen für Innen- und Außengebiet folgendermaßen auf:

$$(20 N) \quad \begin{aligned} \Psi_i &= C + (W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + \dots \\ \Phi_a &= C - (W_a + W_a') - (W_a'' + W_a''') - \dots \end{aligned} \quad (\text{Neumannsche Reihen}).$$

Das Prinzip dieser Lösungsmethode für die Rdw.-Aufgabe kann man sich etwa so klarmachen: Es ist (um zunächst beim Innengebiet zu bleiben) $W_i - W_i'$ nach (19 N) anzusehen als eine bekannte Fundamentalfunktion mit den Rdw. $f_s - f_s'$. Nach ihrer Abspaltung von Ψ_i bleibt also eine Fundamentalfunktion mit den Rdw. f_s'' übrig; spalten wir von ihr wieder $W_i'' - W_i'''$ ab, so verbleibt eine solche Funktion mit den Rdw. f_s^{iv} , usw. Da aber diese Werte $f_s', f_s'', f_s''', \dots$ gegen den konstanten Wert C konvergieren, so bleibt nach immer weiteren solchen Abspaltungen nur die Fundamentalfunktion mit den Rdw. C übrig, und das ist C selber — und diese Tatsache bringt die Formel (20₁) zum Ausdruck, und ganz Entsprechendes gilt auch von (20₂) für das Außengebiet.

¹¹⁾ Vgl. z. B. C. Neumanns *Untersuchungen* von 1877, S. 179, oder meine *Beiträge* S. 32, aber auch *Math. Annalen* 102, S. 451.

Doch bleiben wir jetzt einmal bei dem ersten Schritte des soeben angegebenen Reduktionsverfahrens stehen: dann folgt also

$$(21) \quad \Psi_i = (W_i - W'_i) + \Psi''_i \quad \text{bzw.} \quad \Phi_a = -(W_a + W'_a) + \Phi''_a,$$

wo Ψ''_i und Φ''_a jetzt Fundamentalfunktionen sind, welche die zweiten Neumannschen Derivierten f''_s der vorgegebenen Rdw.-Funktion f_s (statt f_s selber) zu Rdw. besitzen. Nun ist es aber ein bekanntes Resultat, daß, wenn auch eine Fundamentalfunktion, selbst bei Stetigkeit der Rdw., nicht bis an den Rand heran stetige erste Differentialquotienten zu besitzen braucht, solche stets existieren, wenn die Rdw. die zweiten Neumannschen Derivierten einer stetigen Funktion darstellen¹²⁾. Damit ist also bewiesen, daß wir wenigstens für Ψ''_i und Φ''_a die Darstellungen des vorigen Paragraphen anwenden können; so folgt dann völlig einwandfrei:

$$(22) \quad \Psi_i = (W_i - W'_i) + \int f''_s \eta_{(i)s} d\sigma \quad \text{und} \quad \Phi_a = -(W_a + W'_a) + \int f''_s \eta_{(a)s} d\sigma.$$

Um nun weiterzugehen, müssen wir noch den Begriff der „Robinschen Derivierten“ einer auf σ vorgeschriebenen Funktion g_s einführen: Diese Robinschen Derivierten g', g'', g''', \dots erhalten wir wieder durch fortgesetzte Ausführung einer gewissen Integraloperation, es ist nämlich

$$(17 R) \quad g_s^{(n)} = \frac{1}{h\pi} \int g_s^{(n-1)} [d\sigma]_s, \quad \text{wo} \quad [d\sigma]_s = \frac{\partial T}{\partial \nu_s} d\sigma^{(13)}.$$

Diesen Funktionen ordnen wir jetzt Potentiale einfacher Belegungen von σ zu durch die Formeln

$$(18 R) \quad V_p^{(n)} = \frac{1}{h\pi} \int g_s^{(n)} T_{\sigma p} d\sigma \quad (\text{Robinsche Potentiale}).$$

¹²⁾ Es ergibt sich das z. B. aus Satz IV w auf S. 61 meiner *Studien*. Beschränkt man sich auf die Betrachtung der normalen Ableitungen, wie man das tatsächlich darf, so genügen bereits die Resultate von Korn und Liapounoff (vgl. die Zitate in den Anm. zu S. 34 und 37 der *Studien*).

¹³⁾ Wenn wir den von der Lage des Punktes s und des Elementes $d\sigma$ auf σ abhängigen (unsymmetrischen) Ausdruck $\frac{1}{h\pi} \frac{\partial T_s}{\partial \nu_\sigma}$ als „Kern $K(s, \sigma)$ “ im Sinne der Integralgleichungstheorie ansehen, so kann man sagen, die Neumannschen sowohl wie die Robinschen Derivierten entstanden durch wiederholte Kernintegrationen, aber unter Verwendung transponierter Kerne („Neumannscher Kern“ und „Robinscher Kern“):

$$f^{(n)}(s) = \int K(s, \sigma) f^{(n-1)}(\sigma) d\sigma \quad \text{und} \quad g^{(n)}(s) = \int g^{(n-1)}(\sigma) K(s, \sigma) d\sigma.$$

Bei dieser Auffassung ist die Richtigkeit der Beziehung (23) fast unmittelbar einleuchtend.

Für die normalen Ableitungen dieser Potentiale in inneren bzw. äußeren Punkten gelten dann immer die Darstellungen

$$(19 R) \quad \left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial \nu} \right)_{is} = g_s^{(n+1)} - g_s^{(n)} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial \nu} \right)_{as} = g_s^{(n+1)} + g_s^{(n)}$$

(ν = innerer Normale.)

Aus den Potentialen $V^{(n)}$ kann man dann nach Robin die Lösung der zweiten Rdw.-Aufgabe für die Gebiete \mathfrak{J} und \mathfrak{A} aufbauen. Doch soll darauf hier nicht eingegangen werden — uns interessiert hier eine allgemeine Beziehung zwischen den Neumannschen und Robinschen Derivierten zweier Funktionen, nämlich die Beziehung

$$(23) \quad \int f_o^{(\alpha)} \cdot g_o^{(\lambda)} d\sigma = \int f_o^{(\alpha-1)} \cdot g_o^{(\lambda+1)} d\sigma = O^{(\alpha+\lambda)} \quad [\text{vgl. Beitr. S. 48}],$$

welche lehrt, daß diese Produktintegrale von je einer Neumannschen und einer Robinschen Derivierten *nur von der Summe der Indizes derselben abhängen*, eine Erhöhung des einen durch eine Erniedrigung des anderen kompensiert werden kann — dabei können die (nur stetig angenommenen) Ausgangsfunktionen f und g , um deren Derivierte es sich handelt, ganz beliebig und völlig unabhängig voneinander gewählt werden.

Jetzt setzen wir noch, indem wir unter o einen beliebigen Punkt, der nur nicht gerade auf σ liegen soll, verstehen,

$$(24) \quad \frac{\partial T_{(o)}}{\partial \nu_s} = \gamma_{(o)s}, \quad \text{also} \quad (d\sigma)_o = \gamma_{(o)s} d\sigma \quad [\text{vgl. (17 N)}].$$

Alsdann können wir z. B. die erste der Formeln (22) so schreiben:

$$\Psi_i = \frac{1}{h\pi} \int f_\sigma \gamma_{(i)\sigma} d\sigma - \frac{1}{h\pi} \int f'_\sigma \gamma_{(i)\sigma} d\sigma + \int f''_\sigma \eta_{(i)\sigma} d\sigma,$$

und hier wenden wir nun auf die beiden letzten Integrale die Formel (23) an. Dann erhalten wir

$$\Psi_i = \frac{1}{h\pi} \int f_\sigma \gamma_{(i)\sigma} d\sigma - \frac{1}{h\pi} \int f_\sigma \gamma'_{(i)\sigma} d\sigma + \int f_\sigma \eta''_{(i)\sigma} d\sigma,$$

falls die Akzente bei den Funktionen γ und η Robinsche Derivationen andeuten. So ergeben sich denn die Darstellungen:

$$(25) \quad \begin{aligned} \Psi_i &= \int \left[\eta''_{(i)\sigma} + \frac{1}{h\pi} (\gamma_{(i)\sigma} - \gamma'_{(i)\sigma}) \right] f_\sigma d\sigma, \\ \Phi_a &= \int \left[\eta'_{(a)\sigma} - \frac{1}{h\pi} (\gamma'_{(a)\sigma} + \gamma_{(a)\sigma}) \right] f_\sigma d\sigma. \end{aligned}$$

Diese von i bzw. a abhängigen Faktoren unter den Integralen besitzen nun, wie sich zeigen wird, eine sehr einfache Bedeutung: Wir knüpfen an die Formeln (13) und (14) und die entsprechenden für das Innengebiet an. Danach

besitzt das Potential der einem inneren Punkte j entsprechenden Greenschen Belegung (d. i. die stetige Greensche Funktion) auf σ die Werte $T_{(j)s}$ und ist daher nach bekannten Prinzipien im ganzen Außengebiet identisch mit $T_{(j)s}$, während, wie man analog aus (13) folgert, bei äußerer Lage des Poles α das Potential der Greenschen Belegung im ganzen Innengebiet bis auf eine (hier belanglose) additive Konstante gleich $T_{(\alpha)s}$ ist, also

$$\int \eta_{(j)s} T_{\alpha s} d\sigma = T_{(j)\alpha} \quad \text{und} \quad \int \eta_{(\alpha)s} T_{js} d\sigma = T_{(\alpha)j} + \text{const.}$$

Nunmehr bilden wir von diesen Potentialen die normalen Ableitungen in äußeren bzw. inneren Punkten unter Benutzung der Formeln (19 R) (indem wir $n = 0$ und das dortige g gleich $h \pi \cdot \eta_{(a)s}$ setzen); so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial T_{(j)}}{\partial \nu} \right)_{\alpha s} \equiv \gamma_{(j)s} = h \pi (\eta'_{(j)s} + \eta_{(j)s}), \quad \left(\frac{\partial T_{(\alpha)}}{\partial \nu} \right)_{js} \equiv \gamma'_{(\alpha)s} = h \pi (\eta'_{(\alpha)s} - \eta_{(\alpha)s}),$$

und die Ausführung noch einer weiteren Robinschen Derivation liefert;

$$\gamma'_{(j)s} = h \pi (\eta''_{(j)s} + \eta'_{(j)s}) \quad \text{und} \quad \gamma'_{(\alpha)s} = h \pi (\eta''_{(\alpha)s} - \eta'_{(\alpha)s}),$$

und Subtraktion bzw. Addition der beiden letzten Gleichungen führt zu dem Resultat:

$$\gamma_{(j)s} - \gamma'_{(j)s} = h \pi (\eta_{(j)s} - \eta''_{(j)s}) \quad \text{und} \quad \gamma_{(\alpha)s} + \gamma'_{(\alpha)s} = h \pi (\eta''_{(\alpha)s} - \eta_{(\alpha)s})$$

oder

$$(26) \quad \eta''_{(j)s} + \frac{1}{h\pi} (\gamma_{(j)s} - \gamma'_{(j)s}) = \eta_{(j)s} \quad \text{und} \quad \eta''_{(\alpha)s} - \frac{1}{h\pi} (\gamma_{(\alpha)s} + \gamma'_{(\alpha)s}) = \eta_{(\alpha)s}.$$

Damit nehmen die Formeln (25) die einfache Gestalt an:

$$\Psi_j = \int f_s \eta_{(j)s} d\sigma \quad \text{und} \quad \Phi_\alpha = \int f_s \eta_{(\alpha)s} d\sigma,$$

und diese Formeln sind hier unter der einzigen Voraussetzung der Stetigkeit der Rdw. f_s bewiesen. So sind denn die früheren Formeln (9), (10) und (10') von den am Schluß des vorigen Paragraphen erwähnten einschränkenden Annahmen befreit.

§ 4.

Beziehungen zwischen den Greenschen Funktionen von Außen- und Innengebieten. Die Grundrestbelegung einer Kurve oder Fläche.

In früheren Arbeiten¹⁴⁾ habe ich in näherer Ausführung eines Grundgedankens von C. Neumann gezeigt, daß man die Ermittlung der Greenschen

¹⁴⁾ Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. XXIV (1907), p. 333—370 und ausführlicher im dritten Abschnitt der „Beiträge“, S. 67—89.

Belegungen (und damit auch der Greenschen Funktionen) für innere und äußere Lagen des Poles zurückführen kann auf die Bestimmung einer einzigen Funktion auf der trennenden Kurve oder Fläche σ . Diese Funktion hängt wieder von einem Pole ab, der jetzt aber ebenfalls auf σ liegt. *Die Kenntnis dieser einen Funktion (neben der Dichtigkeit ϱ , der natürlichen Belegung) vermittelt uns dann also mit einem Schlage nach den Formeln (10'), S. 542 die Lösung der Rdw.-Aufgabe gleichzeitig für das Innen- und das Außengebiet.*

Da ich jetzt aber die Greensche Funktion und Greensche Belegung, wenigstens wenn es sich um das Außengebiet handelt, anders definiert habe wie in jenen früheren Arbeiten, so muß ich hier nochmals auf jenes Reduktionsverfahren eingehen, werde es allerdings nur in großen Umrissen entwickeln, nämlich nur soweit wie erforderlich, um die Unterschiede gegenüber der Darstellung in meinen Beiträgen hervortreten zu lassen, auf die im übrigen verwiesen sei¹⁵⁾. Die neuen Definitionen dürften vor den älteren unstreitig den Vorzug verdienen, denn früher war ich z. B. immer genötigt, C. Neumanns „singulären Fall“ auszuschließen (vgl. schon oben S. 538), den Fall, daß der der natürlichen Belegung von σ entsprechende konstante innere Potentialwert Γ gerade gleich 0 ist (was allerdings nur beim logarithmischen Potential möglich ist) — jetzt bei der neuen Art des Vorgehens nimmt dagegen dieser Fall $\Gamma = 0$ in keiner Weise eine Ausnahmestellung ein.

Es seien nun Ψ_i und Φ_a die Fundamentalfunktionen, durch welche die Rdw.-Aufgabe für die Gebiete \mathfrak{J} und \mathfrak{A} für die Rdw. f , gelöst werden. Wir knüpfen an die Darstellungen dieser Lösungen durch die Neumannschen Reihen an:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= C + (W_i - W'_i) + (W''_i - W'''_i) + \dots \\ (20N) \quad \Phi_a &= C - (W_a + W'_a) - (W''_a + W'''_a) - \dots \end{aligned} \quad [\text{vgl. S. 543}],$$

wo C in der Bedeutung steht:

$$(5) \quad C = \int_{\sigma} f_{\sigma} \varrho_{\sigma} d\sigma \quad [\text{vgl. S. 538, } \varrho = \text{Dichtigkeit der natürl. Belegung}].$$

Die Glieder dieser Reihen (20), Aggregate von Doppelbelegungspotentialen, kann man nun auch als Potentiale einfacher Belegungen darstellen: es ist nämlich

$$W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)} = -\frac{1}{h\pi} \int \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_a} T_{a,i} d\sigma \quad \text{und} \quad W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)} = \frac{1}{h\pi} \int \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_a} T_{a,a} d\sigma.$$

¹⁵⁾ Wenn ich die Namen und Buchstabenbezeichnungen auch von früher beibehalten werde, so sei doch zur Vermeidung von Irrtümern sogleich darauf aufmerksam gemacht, daß sie eben jetzt oft in etwas anderer Bedeutung stehen.

Allerdings läßt sich die Richtigkeit dieser Formeln mit Sicherheit nur für $n = 2, 3, \dots$ verbürgen, falls wir die Rdw. f_s lediglich stetig voraussetzen (vgl. Stud., S. 63–67). Unter dieser Voraussetzung ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= C + (W_i - W'_i) + \int H_\sigma T_{\sigma i} d\sigma \\ \Phi_a &= C - (W_a + W'_a) + \int H_\sigma T_{\sigma a} d\sigma \end{aligned} \quad (27)$$

mit

$$H_s = -\frac{1}{h\pi} \left(\frac{\partial W''}{\partial v_s} + \frac{\partial W^{IV}}{\partial v_s} + \frac{\partial W^{VI}}{\partial v_s} + \dots \right)^{16}). \quad (27')$$

Wenn also die Rdw. f_s nur stetig auf σ sind, kann man die ihnen entsprechenden Fundamentalfunktionen für Innen- und Außengebiet, wenigstens nach Abtrennung gewisser einfach angegebbarer Glieder, als Potential derselben einfachen Belegung von σ darstellen, die wir als die den Rdw. f_s zugehörige „Restbelegung“ bezeichnen¹⁷⁾.

Die Dichtigkeit H_s dieser Restbelegung läßt sich nun durch Umkehrung der Integrationsfolgen in den einzelnen Gliedern auf die Form bringen:

$$H_s = \int f_\sigma \mathfrak{E}_{(s)\sigma} d\sigma \quad [\text{vgl. Beitr., S. 75–80}], \quad (28)$$

wo jetzt

$$\mathfrak{E}_{(s)s} = -\left(\frac{1}{h\pi}\right)^2 \left[\frac{\partial \gamma_{(s)s}''}{\partial v_{is}} + \frac{\partial \gamma_{(s)s}^{IV}}{\partial v_{is}} + \frac{\partial \gamma_{(s)s}^{VI}}{\partial v_{is}} + \dots \right] \quad (29)$$

ist. Abweichend von früher nenne ich jetzt diesen Ausdruck die „Dichtigkeit der zum Pole s gehörigen Grundrestbelegung von σ “.

Von dieser Form (27) der Lösungen der Rdw.-Aufgaben machen wir nun die Anwendung auf den speziellen Fall, daß die vorgeschriebenen Rdw. gerade die Werte der Grundlösungen $T_{(j)}$ bzw. $T_{(a)}$ für einen inneren oder äußeren Pol sind: Die ihnen entsprechenden Werte der Konstanten C sind

$$\int T_{(j)\sigma} \varrho_\sigma d\sigma = I' \quad \text{bzw.} \quad \int T_{(a)\sigma} \varrho_\sigma d\sigma = II_\sigma, \quad [\text{vgl. (5) und (9), S. 537 u. 538}],$$

und an die Stelle der allgemeinen Neumannschen Doppelbelegungspotentiale $W^{(n)}$ treten die speziellen „Polarpotentiale $W_{(j)i}$ bzw. $W_{(a)a}$ der Neumannschen Methode“ (vgl. Stud., S. 84, aber auch Math. Ann. 102, S. 454), die man (nach Stud., S. 121) auch bereits für $n = 0$ und $n = 1$ als Potentiale

¹⁶⁾ Betreffs der Konvergenz sei auf das oben in Anm. 3 Gesagte verwiesen. Sie ergibt sich in diesem Falle übrigens leicht aus den Betrachtungen von § 5.

¹⁷⁾ Der formale Unterschied gegenüber unserem früheren Vorgehen (vgl. Beitr., S. 70) besteht darin, daß wir jetzt außer den Gliedern $W_i - W'_i$ bzw. $-(W_a + W'_a)$ auch noch die Konstante C abspalten.

einfacher Belegungen, nämlich als die „Polarpotentiale $V^{(n)}$ der Robinschen Methode“ darstellen kann:

$$W_{(j)s}^{(n)} = V_{(j)s}^{(n)} = \frac{1}{h\pi} \int \gamma_{(j)s}^{(n)} T_{\sigma s} d\sigma, \quad W_{(a)s}^{(n)} = V_{(a)s}^{(n)} = \frac{1}{h\pi} \int \gamma_{(a)s}^{(n)} T_{\sigma s} d\sigma.$$

So können wir denn ohne weiteres nach (27) die Fundamentalfunktionen mit den Rdw. $T_{(j)s}$ und $T_{(a)s}$, abgesehen allein von der Konstanten C (jetzt Γ bzw. Π_a) darstellen als Potentiale einfacher Belegungen. Diese Fundamentalfunktionen sind aber: beim Innengebiet \mathfrak{Z} direkt die „stetige Greensche Funktion G “, und beim Außengebiet \mathfrak{A} nach (9) und (11) wenigstens deren Hauptbestandteil. So erhalten wir denn für diese Greenschen Funktionen die Darstellungen:

$$G_{(j)s} = \Gamma + \int \left[\frac{1}{h\pi} (\gamma_{(j)s} - \gamma'_{(j)s}) + H_{(j)s} \right] T_{\sigma s} d\sigma,$$

$$G_{(a)s} = \Pi_a + \int \left[-\frac{1}{h\pi} (\gamma_{(a)s} + \gamma'_{(a)s}) + H_{(a)s} \right] T_{\sigma s} d\sigma + (\Pi_a - \Gamma)$$

mit

$$H_{(j)s} = \int T_{(j)\sigma} \mathfrak{E}_{(s)\sigma} d\sigma \quad \text{und} \quad H_{(a)s} = \int T_{(a)\sigma} \mathfrak{E}_{(s)\sigma} d\sigma \quad [\text{vgl. (28)}].$$

Andererseits gelten die Formeln:

$$G_{(j)s} = \int \eta_{(j)\sigma} T_{\sigma s} d\sigma \quad \text{und} \quad G_{(a)s} = \int \eta_{(a)\sigma} T_{\sigma s} d\sigma + (\Pi_a - \Gamma)$$

[ersteres eine ganz bekannte Beziehung, vgl. z. B. Beitr., S. 86 — letzteres eine Zusammenfassung von (13) und (14)]. Durch Vergleichung erhält man so

$$\int \eta_{(j)\sigma} T_{\sigma s} d\sigma = \Gamma + \int \left[\frac{1}{h\pi} (\gamma_{(j)s} - \gamma'_{(j)s}) + H_{(j)s} \right] T_{\sigma s} d\sigma, \quad s \text{ beliebig in } \mathfrak{Z},$$

$$\int \eta_{(a)\sigma} T_{\sigma s} d\sigma = \Pi_a + \int \left[-\frac{1}{h\pi} (\gamma_{(a)s} + \gamma'_{(a)s}) + H_{(a)s} \right] T_{\sigma s} d\sigma, \quad s \text{ beliebig in } \mathfrak{A}.$$

Es stimmen hiernach also jedesmal die Potentiale zweier (massegleicher) einfacher Belegungen von σ im ganzen Innen- bzw. Außengebiet überein, und daraus folgt nach bekannten Prinzipien, daß auch die Belegungen selbst übereinstimmen müssen, so daß sich also das Resultat ergibt:

$$(30) \quad \begin{cases} \eta_{(j)s} = \frac{1}{2h\pi} \frac{\partial \mathfrak{G}_{(j)}}{\partial v_s} = \varrho_s + \frac{1}{h\pi} (\gamma_{(j)s} - \gamma'_{(j)s}) + \int \mathfrak{E}_{(s)\sigma} T_{\sigma s} d\sigma, \\ \eta_{(a)s} = \frac{1}{2h\pi} \frac{\partial \mathfrak{G}_{(a)}}{\partial v_s} = \varrho_s - \frac{1}{h\pi} (\gamma_{(a)s} + \gamma'_{(a)s}) + \int \mathfrak{E}_{(s)\sigma} T_{\sigma s} d\sigma. \end{cases}$$

Dies sind im Falle unserer neuen Definitionen die den Formeln (13), S. 89 meiner „Beiträge“ entsprechenden Formeln. Sie besagen wie jene, daß man die Dichtigkeit der Greenschen Belegungen in einem Punkte s von σ in ihrer

Abhängigkeit von der Lage des Poles, nach Absonderung gewisser leicht angebarter Glieder, darstellen kann als das Potential einer (noch von s abhängigen) einfachen Belegung von σ , und zwar ist diese Belegung dieselbe, ob der Pol innerhalb oder außerhalb σ liegt. Diese Belegung ist die zu s (als Pol) gehörige „Grundrestbelegung“, deren Dichtigkeit die Formel (29) angibt.

Was nun die Eigenschaften dieser neuen Grundrestbelegung anlangt, so hat sie [nach (2), S. 82 der Beiträge] stets die Gesamtmasse 0,

$$(31) \quad \int \mathfrak{E}_{(s)\sigma} d\sigma = 0,$$

und die Eigenschaft der Symmetrie teilt sie mit der alten:

$$(32) \quad \mathfrak{E}_{(s)\sigma} = \mathfrak{E}_{(\sigma)s} \quad [\text{vgl. Beitr., S. 84}].$$

Durch das obige Resultat ist augenscheinlich ein enger Zusammenhang zwischen den Rdw.-Aufgaben für das Innen- und Außengebiet einer Kurve oder Fläche festgestellt: Ist die Greensche Belegung für eines der Gebiete \mathfrak{J} oder \mathfrak{A} bekannt (also das $\eta_{(s)s}$), so kann man etwa die betreffende Gleichung (30) als eine Integralgleichung („erster Art“ in Hilbertscher Bezeichnung) für die Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(s)\sigma}$ der Grundrestbelegung ansehen. Denkt man sich diese aus ihr bestimmt, so liefert die andere Gleichung (30) die Greensche Belegung auch für das komplementäre Gebiet, und damit auch die Lösung der Rdw.-Aufgabe für dieses.

Übrigens lassen sich die Formeln (30) mittels unserer früheren Resultate (26) noch auf eine andere Form bringen, die sich gerade für die Anwendungen als sehr nützlich erweist, nämlich auf die Form:

$$(30^*) \quad \eta_{(f)s} = \varrho_s + \int \mathfrak{E}_{(s)\sigma} T_{\sigma f} d\sigma, \quad \eta_{(s)s} = \varrho_s + \int \mathfrak{E}_{(s)\sigma} T_{\sigma s} d\sigma.$$

Anstatt also von $\eta_{(f)s}$ und $\eta_{(s)s}$ gewisse Glieder abzuspalten, kann man auch zu den zweiten Robinschen Derivierten dieser Funktionen übergehen und dann diese, nach Abspaltung allein noch der Dichtigkeit ϱ_s der natürlichen Belegung als Potentiale der Grundrestbelegung darstellen.

Beiläufiges. Die Formeln (30*) kann man ansehen als Spezialfälle einer allgemeineren Formel, die auch an sich ein gewisses Interesse beanspruchen dürfte und daher hier kurz begründet werden möge:

Wir verstehen unter den Randwerten f_s die Werte des ersten Robinschen Potentials V auf σ , also (in unseren Bezeichnungen von S. 544) des Potentials einer einfachen Belegung von der Dichtigkeit $\frac{1}{h\pi} g_s$. — Die Neumannschen Derivierten dieser Werte $f_s = V_s$ sind dann gerade die Werte der weiteren Robinschen Potentiale auf σ , also V'_s, V''_s, \dots (vgl. Studien, S. 66), und ihre Konvergenzkonstante, das C in den Formeln (27), ist z. B. nach Beitr. S. 33

$$C = m \cdot \Gamma \quad \text{mit} \quad m = \frac{1}{h\pi} \int g_\sigma d\sigma.$$

Ferner sind die Neumannschen Potentiale $W_p^{(n)} = \frac{1}{h\pi} \int V_a^{(n)}(d\sigma)_p$ im Innengebiet durch $V^{(n+1)} + V^{(n)}$ und im Außengebiet durch $V^{(n+1)} - V^{(n)}$ dargestellt (vgl. Studien, S. 66). Demnach liefern die Formeln (27) für die Fundamentalfunktionen mit den Randwerten $f_s = V_s$:

$$m \cdot \Gamma + (V_i - V_i'') + \int H_\sigma T_{\sigma i} d\sigma \text{ in } \mathfrak{Z} \text{ bzw.}$$

$$m \cdot \Gamma + (V_a - V_a'') + \int H_\sigma T_{\sigma a} d\sigma \text{ in } \mathfrak{A}.$$

In \mathfrak{Z} ist dies zugleich die Potentialfunktion mit den Randwerten V_s , in \mathfrak{A} müssen wir, um diese zu erhalten, nach (7) noch $m(\Pi_a - \Gamma)$ hinzufügen. So folgt denn für die Potentialfunktionen von \mathfrak{Z} und \mathfrak{A} mit den Randwerten V_s , d. h. für V selbst

$$V_p = m\Pi_p + (V_p - V_p'') + \int H_\sigma T_{\sigma p} d\sigma \text{ in } \mathfrak{Z} \text{ und } \mathfrak{A} (!) \quad (\text{da } \Pi_i = \Gamma).$$

Beiderseits stehen hier Potentiale einfacher Belegungen; aus ihrer Gleichheit folgt die Übereinstimmung auch der Belegungen selbst, also

$$\frac{1}{h\pi} g_s = m \cdot \varrho_s + \frac{1}{h\pi} (g_s - g_s'') + H_s, \quad \text{wo} \quad H_s = \int V_\sigma \mathfrak{E}_{(\sigma)s} d\sigma \quad [\text{vgl. (28)}],$$

oder schließlich die abzuleitende Formel:

$$(8) \quad \frac{1}{h\pi} g_s'' = m \cdot \varrho_s + \int V_\sigma \mathfrak{E}_{(\sigma)s} d\sigma.$$

Sie lehrt folgendes: Die Kenntnis der Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(\sigma)s}$ der Grundrestbelegung gestattet aus den Randwerten des Potentials einer einfachen Belegung zwar nicht deren Dichtigkeit selbst $\left(\frac{1}{h\pi} g_s\right)$, wohl aber die zweite Robinsche Derivierte $\left(\frac{1}{h\pi} g_s''\right)$ dieser Dichtigkeit zu bestimmen — im Falle $m \neq 0$ immer noch vorausgesetzt, daß die Dichtigkeit ϱ_s der natürlichen Belegung bekannt ist.

Nun stellt allgemein $T_{(\sigma)s}$ die Randwerte des Potentials einer Belegung von σ von der Dichtigkeit $\eta_{(\sigma)s}$ dar (der stetigen Greenschen Funktion) — beim Außengebiet allerdings nach (13) nur bis auf eine Konstante, die aber wegen (31) belanglos ist. Daher gehen tatsächlich die Formeln (30*) aus dieser Formel (8) dadurch hervor, daß man in ihr $\frac{1}{h\pi} g_s = \eta_{(\sigma)s}$ setzt [wobei $m = 1$ wird, vgl. (15) S. 541].

§ 5.

Integralgleichungen zweiter Art für die Dichtigkeit der Grundrestbelegung.

Schon die Gleichungen (30) bezeichneten wir oben einmal als Integralgleichungen (erster Art) für die Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(\sigma)s}$ der Grundrestbelegung — doch setzten wir dabei voraus, daß man (neben der Dichtigkeit ϱ_s der natürlichen Belegung) bereits für eines der Gebiete \mathfrak{Z} und \mathfrak{A} die Dichtigkeit der Greenschen Belegung ($\eta_{(\sigma)s}$ oder $\eta_{l(\sigma)s}$) kenne.

Wir wollen jetzt eine von derartigen Annahmen freie Integralgleichung (und zwar zweiter Art) für $\mathfrak{E}_{(\sigma)s}$ aufstellen, bei der gänzlich von der Benutzung

innerer oder äußerer Punkte abgesehen wird, die vielmehr nur mit Punkten in der Kurve oder Fläche σ selbst zu tun hat.

Wir knüpfen an die Darstellung (29) für die Funktion $\mathfrak{E}_{(s)s}$ an und schreiben dafür

$$(29') \quad \mathfrak{E}_{(s)s} = -\left(\frac{1}{h\pi}\right)^2 (\delta_{(s)s}'' + \delta_{(s)s}^{IV} + \delta_{(s)s}^{VI} + \dots),$$

indem wir noch

$$(29'') \quad \delta_{(s)s}^{(n)} = \frac{\partial \gamma_{(s)s}^{(n)}}{\partial v_{fs}} = \frac{\partial \gamma_{(a)s}^{(n)}}{\partial v_{as}} \quad (n \geq 2)$$

setzen. Diese normalen Ableitungen der „polaren Randfunktionen“ $\gamma_{(a)s}^{(n)}$ der Robinschen Methode¹⁸⁾, d. h. der Robinschen Derivierten der Funktionen

$$(24) \quad \gamma_{(a)s} = \frac{\partial T_{(a)}}{\partial v_s},$$

bilden selbst eine Folge Robinscher Derivierter (vgl. Beiträge, S. 81), und daraus sieht man sofort, daß sich $\mathfrak{E}_{(s)s}$ bei zweimaliger Robinscher Derivation im wesentlichen selbst reproduziert. Es ist genauer $\mathfrak{E}_{(s)s}'' = \mathfrak{E}_{(s)s} + \left(\frac{1}{h\pi}\right)^2 \delta_{(s)s}''$, oder

$$(33) \quad \mathfrak{E}_{(s)s} - \mathfrak{E}_{(s)s}'' = -\left(\frac{1}{h\pi}\right)^2 \delta_{(s)s}'',$$

und dafür kann man sagen: Es ist $\mathfrak{E}_{(s)s}$ eine noch von einem Parameterpunkt s abhängige Lösung der *Integralgleichung zweiter Art*

$$(33^*) \quad \varphi_s - \lambda \varphi_s'' = f_s \quad \text{mit } \lambda = 1 \quad \text{und} \quad f_s = -\left(\frac{1}{h\pi}\right)^2 \delta_{(s)s}'',$$

deren Kern der einmal *iterierte Robinsche Kern* ist (vgl. oben die Anm. 13 S. 544).

Da nun der Robinsche Kern und daher auch seine Iterierten die 1 zum Eigenwert besitzen (vgl. z. B. Beiträge, S. 34 (10)), so ist die *Dichtigkeit* $\mathfrak{E}_{(s)s}$ der *Grundrestbelegung* die *Lösung einer inhomogenen Integralgleichung zweiter Art für einen Eigenwert*. Die Existenz der Lösung wird verbürgt durch die hier erfüllte Nebenbedingung

$$(33') \quad \int f_s d\sigma = -\left(\frac{1}{h\pi}\right)^2 \int \delta_{(s)s}'' d\sigma = 0, \quad [\text{vgl. Beitr., S. 82(2)}],$$

denn diese drückt die für die Lösbarkeit notwendige und hinreichende Orthogonalität der „freien Funktion f_s “ zu den zum gleichen Eigenwert gehörigen

¹⁸⁾ Daß diese beiden Ausdrücke einander gleich sind, oder: daß es gleichgültig ist, ob wir diese lediglich von den zwei Punkten s und s auf σ abhängige Größe $\delta_{(s)s}$ auf dem Umwege über innere oder äußere Punkte gewinnen, geht aus den Betrachtungen auf S. 75 meiner „Beiträge“ hervor und ist dort auch schon kurz angemerkt.

Eigenfunktionen des transponierten (hier also des Neumannschen) Kernes aus — denn die einzige solche Eigenfunktion ist eben eine Konstante (vgl. z. B. Stud., S. 50).

Bei Erfülltsein dieser Orthogonalitätsbedingung besitzt nun aber eine inhomogene Integralgleichung für einen Eigenwert sogleich unendlich viele Lösungen. Daher bedarf es zur Festlegung der speziellen Lösung $\mathfrak{E}_{(s)}$, noch der Angabe einer weiteren Bedingung, und diese lautet gemäß (31):

$$(31^*) \quad \int \varphi_s d\sigma = 0.$$

Da nämlich ϱ_s , die Dichtigkeit der natürlichen Belegung, die einzige Eigenfunktion des Robinschen Kernes für $\lambda = 1$ ist, so unterscheiden sich alle übrigen Lösungen der Gleichung (33*) von $\mathfrak{E}_{(s)}$, um Glieder von der Form $c \cdot \varrho_s$ mit $c \neq 0^{19}$), liefern also tatsächlich für das letzte Integral einen anderen (von 0 verschiedenen) Wert.

Die Reihe (29') stellt die in der Integralgleichungstheorie als Neumannsche Reihe bezeichnete Lösung $\mathfrak{P}(\lambda)$ der Gleichung (33*) für $\lambda = 1$ dar. Da $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert auf dem Einheitskreise ist, konvergiert sie bekanntlich bei Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung sogar in einem größeren Kreise, also sicher für $\lambda = 1$ selbst, womit auch sogleich die Konvergenzfrage erledigt ist.

Nun läßt sich die Lösung dieser Integralgleichung (33*) mit dem iterierten Robinschen Kern leicht auch zurückführen auf die Lösung zweier Gleichungen mit dem einfachen Robinschen Kern: Wir setzen

$$(34_1) \quad -\left(\frac{1}{h\pi}\right)^2 \delta''_{(s)} = \zeta_{(s)} + \zeta'_{(s)}, \text{ d. i. } = \zeta_{(s)} + \frac{1}{h\pi} \int \zeta_{(s)} [d\sigma],$$

definieren also neben δ'' noch eine weitere Funktion ζ als Lösung der inhomogenen Integralgleichung

$$34_2^*) \quad \varphi_s - \lambda \frac{1}{h\pi} \int \varphi_s [d\sigma] = f_s \quad \text{mit } \lambda = -1 \quad \text{und } f_s = -\left(\frac{1}{h\pi}\right)^2 \delta''_{(s)}.$$

Da $\lambda = -1$ kein Eigenwert des Robinschen Kernes ist, so ist die Funktion ζ durch diese Gleichung *eindeutig bestimmt*. Wir nennen sie die „Zwischenfunktion“. Wegen $\int \zeta'_{(s)} d\sigma = \int \zeta_{(s)} d\sigma$ (vgl. Stud., S. 58) folgt nach (34₁) für diese Funktion ζ :

$$2 \int \zeta_{(s)} d\sigma = -\left(\frac{1}{h\pi}\right)^2 \int \delta''_{(s)} d\sigma = 0 \quad [\text{vgl. (33')}].$$

¹⁹⁾ Hieraus folgt, daß auch die Dichtigkeit der alten noch in meinen „Beiträgen“ benutzten Grundrestbelegung eine Lösung der Integralgleichung (33*) ist, doch mit einer von (31*) verschiedenen Nebenbedingung.

Dies verbürgt dann die Existenz von Lösungen der neuen inhomogenen Integralgleichung $\varphi_s - \lambda \varphi'_s = \zeta_{(s)}$, oder

$$(34_2^*) \quad \varphi_s - \lambda \cdot \frac{1}{h\pi} \int \varphi_\sigma [d\sigma]_s = \zeta_{(s)}, \quad \text{für den Eigenwert } 1$$

und alle diese Lösungen sind, wie sich durch Addition dieser Gleichung (34_2^*) und der durch nochmalige Robinsche Derivation aus ihr entstehenden ergibt, zugleich Lösungen der Gleichung (33^*) . Nun ist aber nach unseren obigen Darlegungen unter den Lösungen von (34_2^*) sicher gerade eine, welche der Nebenbedingung (31^*) genügt, und diese muß dann also die Lösung $\mathfrak{E}_{(s)}$, von (33^*) sein. So ergibt sich dann das folgende Resultat:

Um zur Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(s)}$, der Grundrestbelegung zu gelangen, kann man folgendermaßen verfahren: Man ermittle zunächst die „Zwischenfunktion $\zeta_{(s)}$ “, als die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen Integralgleichung

$$\varphi_s + \frac{1}{h\pi} \int \varphi_\sigma [d\sigma]_s = - \left(\frac{1}{h\pi} \right)^2 \delta_{(s)}, \quad \left(\delta_{(s)} \right)_s = \frac{\partial \gamma''_{(s)} }{\partial \nu_{ss}} = \frac{\partial \gamma''_{(s)} }{\partial \nu_{ss}}.$$

Alsdann erhält man $\mathfrak{E}_{(s)}$, als diejenige unter den unendlich vielen Lösungen der Integralgleichung

$$\varphi_s - \frac{1}{h\pi} \int \varphi_\sigma [d\sigma]_s = \zeta_{(s)},$$

welche der Nebenbedingung $\int \varphi_\sigma d\sigma = 0$ genügt.

Im Gegensatz zu den auf S. 550 erwähnten Integralgleichungen (erster Art) für $\mathfrak{E}_{(s)}$, sind die hier zu lösenden Gleichungen beide von der zweiten Art, und ihr Kern ist der einfache Robinsche Kern. Es handelt sich also um spezielle Fälle derjenigen Integralgleichung, auf die Poincaré allgemein die Lösung der sogenannten zweiten Rdw.-Aufgabe der Potentialtheorie zurückführte. Was diese Integralgleichungen aber vor allem noch vor jenen älteren auszeichnet, ist der Umstand, daß als Argumentpunkte in ihnen lediglich Punkte der Randkurve oder -fläche σ selbst auftreten — wie das auch nur naturgemäß ist bei einer Funktion, die selbst nur von der Lage von Punkten auf σ abhängt.

Störungstheorie der Spektralzerlegung.

III. Mitteilung.

Analytische, nicht notwendig beschränkte Störung.

Von

Franz Rellich in Marburg (Lahn).

Die neuen Verhältnisse, welche bei analytischer, nicht-beschränkter Störung auftreten, kann man an folgendem Beispiel erkennen. Wir betrachten die Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|-|y|} \varphi(y) dy + \varepsilon x \varphi(x) = \lambda \varphi(x)$$

und fassen darin ε als einen Störungsparameter auf. Jede Zahl λ , für welche diese Gleichung eine nicht identisch verschwindende Lösung $\varphi(x)$ mit

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx < \infty$ besitzt, heißt ein Punkteigenwert. Für $\varepsilon = 0$ hat die Integral-

gleichung nur Punkteigenwerte, und zwar $\lambda = 1$ mit der bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmten Eigenfunktion $e^{-|x|}$ und $\lambda = 0$, zu dem als Eigenfunktion jede nicht identisch verschwindende Funktion φ

mit $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \varphi(x) dx = 0$ gehört. Hier interessiert vor allem, daß $\lambda = 1$

ein isolierter, einfacher Eigenwert ist. Für $\varepsilon \neq 0$ hingegen gibt es überhaupt keinen Punkteigenwert. Denn gäbe es zu einem λ eine nicht identisch ver-

schwindende Lösung $\varphi(x)$, so wäre mit $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} \varphi(y) dy = c$ offenbar

$\varphi(x)(\lambda - \varepsilon x) = c e^{-|x|}$. Eine solche Funktion $\varphi(x)$ kann aber nicht quadratisch integrierbar sein.

Verwendet man die formale Störungsrechnung, d. h. geht man mit dem Ansatz

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x) + \varepsilon^2 \varphi_2(x) + \dots; \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$$

in die obige Gleichung ein, so ergibt sich unter der Normierung $\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x))^2 dx = 1$

schrittweise

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, & \lambda_1 &= 0, & \lambda_2 &= \frac{1}{2}, & \dots, \\ \varphi_0(x) &= e^{-|x|}, & \varphi_1(x) &= x e^{-|x|}, & \varphi_2(x) &= x^2 e^{-|x|} - \frac{1}{2} e^{-|x|}, & \dots \end{aligned}$$

Die formale Anwendbarkeit der Störungsrechnung besagt also gar nichts für die hier vorliegende Frage, ob das diskrete Spektrum erhalten bleibt; sie kann sogar irreführend sein, wie dieses Beispiel zeigt.

Die Gesamtheit der $\varphi(x)$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 dx < \infty$ bildet einen Hilbertschen

Raum \mathfrak{H} , wenn man $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \psi(x) dx = (\varphi, \psi)$ als inneres Produkt wählt.

In \mathfrak{H} stellt $A_0 \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy$ einen beschränkten symmetrischen Operator dar, während der durch $A_1 \varphi = x \varphi(x)$ erklärte Operator nicht beschränkt ist; er ist in dem Teilraum \mathfrak{H}' von \mathfrak{H} erklärt, der aus den Funktionen $\varphi(x)$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 dx < \infty$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi^2 dx < \infty$ besteht. Der gestörte Operator $A(\varepsilon) \varphi = A_0 \varphi + \varepsilon A_1 \varphi$ ist also für jedes φ aus \mathfrak{H}' erklärt und liefert offensichtlich für jedes solche φ eine in ε reguläre analytische Funktion; für $\varepsilon \neq 0$ ist $A_0 + \varepsilon A_1$ in \mathfrak{H}' sogar selbstadjungiert in dem durch v. Neumann, E. Schmidt und M. H. Stone eingeführten Sinne. Wie unser Beispiel zeigt, braucht das Spektrum eines solchen Operators durchaus nicht regulär analytisch von dem Störungsparameter abzuhängen, wie das für reguläre beschränkte Operatoren bewiesen wurde (I. Mitteilung¹), Satz 2). Ein anderes, mathematisch weniger einfaches Beispiel liefert die Schrödingersche Wellengleichung des Starkeffektes.

Der Begriff des regulären (nicht notwendig beschränkten) Operators wurde daher in dieser Arbeit so eng gefaßt, daß der eben beschriebene Operator $A_0 + \varepsilon A_1$ nicht darunter fällt. Für diese regulären Operatoren ergibt sich unter anderem die Regularität des diskreten Spektrums und der zugehörigen Eigenfunktionen in vollständiger Analogie zu dem entsprechenden Satz für reguläre beschränkte Operatoren (I. Mitteilung, Satz 2). — Ein Kriterium für die Regularität sei hervorgehoben: Wenn A_0 in einem Teilraum \mathfrak{A} von \mathfrak{H} selbstadjungiert ist und wenn A_1 in \mathfrak{A} erklärt und symmetrisch (aber nicht notwendig selbstadjungiert) ist, dann ist $A_0 + \varepsilon A_1$ für hinreichend kleines $|\varepsilon|$ in \mathfrak{A} selbstadjungiert und regulär (Satz 4 und 5). Für halbbeschränkte Operatoren wird in Satz 6 ein Kriterium gegeben, welches weniger fordert. — Es kann vorkommen, daß alle Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Operators $A(\varepsilon)$ regulär analytisch vom Störungsparameter abhängen und daß $A(\varepsilon)$ trotzdem kein regulärer Operator im Sinne meiner Definition ist; die Wellengleichung des Zeemaneffektes ist hierfür ein physikalisch wichtiges Beispiel. Es wird in § 4 auseinandergesetzt, inwiefern das Spektrum eines solchen Operators *nicht* die vollen Regularitätseigenschaften besitzt, wie sie für einen regulären Operator erfüllt sind.

¹) Math. Annalen 113 (1937), S. 610.

§ 1.

Hilfssätze.

Es sei \mathfrak{H} ein Hilbertscher Raum, dessen Elemente mit x, y, u, v, \dots bezeichnet werden. Das innere Produkt zweier Elemente x, y aus \mathfrak{H} sei (x, y) ; $|x| = \sqrt{(x, x)}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x$ bedeute $\lim_{n \rightarrow \infty} |x^n - x| = 0$. Ein Teilraum \mathfrak{A} von \mathfrak{H} heißt ein dichter Teilraum, wenn es zu jedem x aus \mathfrak{H} eine Folge x^n aus \mathfrak{A} gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x$. Unter „Operator“ wird stets „linearer Operator“ verstanden. Ein Operator heißt selbstadjungiert, wenn er 1. in einem dichten Teilraum \mathfrak{A} von \mathfrak{H} erklärt und symmetrisch ist, also $(Au, v) = (u, Av)$ für alle u, v aus \mathfrak{A} , und wenn 2. aus der Gültigkeit einer Gleichung $(Au, f) = (u, g)$ für alle u aus \mathfrak{A} und ein festes Paar f, g aus \mathfrak{H} folgt, daß f in \mathfrak{A} liegt (woraus sich dann $Af = g$ ergibt). Wenn A in einem dichten Teilraum \mathfrak{A} symmetrisch ist und γ eine komplexe Zahl bedeutet, so wird gesagt, $A + \gamma$ besitzt eine beschränkte Reziproke, wenn es einen beschränkten Operator R gibt mit den Eigenschaften: 1. Rx liegt in \mathfrak{A} für alle x . 2. Zu x aus \mathfrak{A} gibt es y , so daß $x = Ry$. 3. $(A + \gamma)Rx = x$ für jedes x . Diese beschränkte Reziproke besitzt dann die weiteren Eigenschaften: 4. Aus $Rx = 0$ folgt $x = 0$. 5. $R(A + \gamma)x = x$ für alle x aus \mathfrak{A} . 6. R ist eindeutig bestimmt²⁾.

Hilfssatz 1. Wenn ein Operator B den Definitionsbereich \mathfrak{H} hat und wenn es in einem dichten Teilraum \mathfrak{B}^* einen Operator B^* gibt, so daß $(Bu, v) = (u, B^*v)$ für alle u aus \mathfrak{H} und alle v aus \mathfrak{B}^* gilt, dann ist B ein beschränkter Operator.

Beweis. Es sei w beliebig aus \mathfrak{H} und v^n aus \mathfrak{B}^* , $\lim_{n \rightarrow \infty} v^n = w$. Setzt man $B^*v^n = h^n$, so wird $(Bu, v^n) = (u, h^n)$ für alle u aus \mathfrak{H} . Für jedes u konvergiert also (u, h^n) , wenn $n \rightarrow \infty$ rückt, also ist nach einem bekannten^{2a)} Satz $|h^n| \leq k$. Es gibt dann ein g aus \mathfrak{H} , so daß $(u, h^n) \rightarrow (u, g)$, $n \rightarrow \infty$. Also $(Bu, w) = (u, g)$. D. h. aber, der zu B adjungierte Operator ist auf ganz \mathfrak{H} anwendbar, woraus die Beschränktheit von B folgt³⁾.

Hilfssatz 2. Es sei A in einem dichten Teilraum \mathfrak{A} von \mathfrak{H} erklärt und symmetrisch; U sei ein beschränkter Operator mit dem Definitionsbereich \mathfrak{H} und dem Wertebereich \mathfrak{A} . Dann ist AU ein beschränkter Operator.

Beweis. Zunächst ist $B = AU$ auf jedes x aus \mathfrak{H} anwendbar. Sei B^* mit dem Definitionsbereich \mathfrak{B}^* der zu B adjungierte Operator, also \mathfrak{B}^* die Menge aller y , zu denen es ein h gibt, so daß $(AUx, y) = (x, h)$ für alle x

²⁾ Über die Grundtatsachen aus der Theorie der linearen Operatoren vgl. M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space*, New York 1932.

^{2a)} E. Hellinger und O. Toeplitz, *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen*. *Math. Ann.* **69** (1910) insb. S. 318 und S. Banach loc. cit. I. Mitteilung⁷⁾.

³⁾ Vgl. M. H. Stone, l. c. ²⁾, insbesondere S. 61.

aus \mathfrak{H} ; es ist also $B^*y = h$. \mathfrak{B}^* enthält den Teilraum \mathfrak{A} , ist also selbst dicht in \mathfrak{H} ; denn wenn y in \mathfrak{A} , dann setze man $h = U^*Ay$, wobei U^* der zu U adjungierte (gleichfalls beschränkte) Operator ist. Daraus folgt nach Hilfssatz 1 die Behauptung.

Hilfssatz^{3a)} 3. Es sei V ein beschränkter Operator, W ein in \mathfrak{H} erklärter Operator und $VWx = WVx = x$ für alle x aus \mathfrak{H} . Dann ist auch W beschränkt.

Beweis. Sei V^* der zu V adjungierte Operator. Dann bildet V^* den Raum \mathfrak{H} auf einen dichten Teilraum ab, weil sonst ein $y \neq 0$ existieren würde mit $(V^*x, y) = 0$ für alle x , also $(x, Vy) = 0$, $WVy = 0$, $y = 0$. Nun ist $(Wx, V^*y) = (x, y)$. Setzt man $z = V^*y$, so ist $(Wx, z) = (x, y)$ für alle x , d. h. jedes z mit $z = V^*y$ gehört zum Definitionsbereich \mathfrak{B}^* des zu W adjungierten Operators W^* ; \mathfrak{B}^* liegt demnach in \mathfrak{H} dicht. Nach Hilfssatz 1 ist daher W beschränkt.

Hilfssatz 4. Es sei $V(\varepsilon)$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulär⁴⁾ und beschränkt, und es gebe einen beschränkten Operator $W(0)$ mit $V(0)W(0)x = W(0)V(0)x = x$. Dann gibt es in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ einen regulären beschränkten Operator $W(\varepsilon)$ mit $V(\varepsilon)W(\varepsilon)x = W(\varepsilon)V(\varepsilon)x = x$ für alle x .

Beweis. Da $V(\varepsilon)$ regulär und beschränkt ist, gibt es beschränkte Operatoren V_0, V_1, \dots , so daß $V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots$ ist und $|V_n x| \leq K^{n+1} |x|$ mit passendem K gilt⁴⁾; $V_0 = V(0)$ und entsprechend werde $W(0) = W_0$ gesetzt. Es wird $V(\varepsilon)W_0 = 1 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots$ mit $X_n = V_n W_0$, also $|X_n x| \leq c \cdot K^{n+1} |x|$. $P(\varepsilon) = X_1 + \varepsilon X_2 + \dots$ ist ein beschränkter regulärer Operator, $V(\varepsilon)W_0 = 1 + \varepsilon P(\varepsilon)$. Für hinreichend kleines $|\varepsilon|$ ist demnach auch $1 - \varepsilon P(\varepsilon) + \varepsilon^2 P^2(\varepsilon) - + \dots = Y(\varepsilon)$ ein beschränkter Operator, von dem man leicht zeigt, daß er auch regulär ist. Offenbar ist $Y(\varepsilon)V(\varepsilon)W_0 = V(\varepsilon)W_0 Y(\varepsilon) = 1$. Mit $W(\varepsilon) = W_0 Y(\varepsilon)$ wird $V(\varepsilon)W(\varepsilon) = 1$ und $W(\varepsilon)V(\varepsilon) = W_0 Y(\varepsilon)V(\varepsilon)W(0)V(0) = W(0)V(0) = 1$. Also leistet $W(\varepsilon)$ das Verlangte.

Hilfssatz 5. Wenn $U(\varepsilon)$ und $V(\varepsilon)$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulär und beschränkt sind, dann ist es auch $U(\varepsilon)V(\varepsilon) = W(\varepsilon)$.

Beweis. Für beliebige x aus \mathfrak{H} ist $\varphi(\varepsilon) = V(\varepsilon)x$ ein reguläres Element (Def. 3 der Mitteilung I). Also ist nach Hilfssatz 7 der Mitteilung I auch $U(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = W(\varepsilon)x$ ein reguläres Element. Also ist $W(\varepsilon)$ regulär und beschränkt.

^{3a)} Er ist enthalten in théorème 5 (Seite 41) von S. Banach. Théorie des opérations linéaires, Warschau 1932.

⁴⁾ Über den Begriff des regulären beschränkten Operators vgl. Def. 3 und Def. 3' der I. Mitteilung, Math. Annalen 113 (1937), S. 608. Insbesondere ist ε stets ein reeller Parameter.

§ 2.

Reguläre selbstadjungierte Operatoren.

Im folgenden wird eine Schar von Operatoren $A(\varepsilon)$ betrachtet, wobei der reelle Parameter ε auf eine Umgebung von $\varepsilon = 0$ beschränkt sei. Für jedes ε sei $A(\varepsilon)$ in einem Teilraum $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ erklärt, der im allgemeinen von ε abhängt. Es soll jetzt gesagt werden, wann $A(\varepsilon)$ in seiner Abhängigkeit von ε regulär heißt.

Definition 1. Eine Schar von Teilräumen $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ von \mathfrak{H} heißt für eine Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulär, wenn es für diese Umgebung einen regulären beschränkten Operator $U(\varepsilon)$ gibt, der (bei festem ε) \mathfrak{H} eineindeutig auf $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ abbildet; die Menge aller $U(\varepsilon)x = z(\varepsilon)$, wo x ganz \mathfrak{H} durchläuft, heißt eine reguläre Darstellung von $\mathfrak{A}(\varepsilon)$.

Definition 2. In einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ sei eine Schar von Operatoren $A(\varepsilon)$ mit den Definitionsbereichen $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ erklärt. $A(\varepsilon)$ heißt in dieser Umgebung regulär, wenn in dieser Umgebung 1. $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ regulär ist und wenn es 2. eine reguläre Darstellung $z(\varepsilon)$ von $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ gibt, so daß $A(\varepsilon)z(\varepsilon)$ für jedes $z(\varepsilon)$ ein reguläres Element darstellt (Def. 2 der Mitteilung I).

Die Definition 2 steht im Einklang mit der Definition des beschränkten regulären Operators; wenn nämlich $A(\varepsilon)$ beschränkt ist, dann ist $\mathfrak{A}(\varepsilon) = \mathfrak{H}$ und daher gewiß ein regulärer Teilraum; man setze $U(\varepsilon) = 1$, $z(\varepsilon) = x$, und Def. 2 geht über in Def. 3' der Mitteilung I.

Satz 1. Es sei $A(\varepsilon)$ in dem dichten Teilraum $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ symmetrisch für jedes ε einer Umgebung von $\varepsilon = 0$. Dann ist für die Regularität von $A(\varepsilon)$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$

notwendig: daß für jede komplexe Zahl γ , für die $A(0) + \gamma$ eine beschränkte Reziproke^{*)} besitzt, $A(\varepsilon) + \gamma$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ eine reguläre beschränkte Reziproke besitzt;

hinreichend: daß für eine einzige komplexe Zahl γ der Operator $A(\varepsilon) + \gamma$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ eine beschränkte reguläre Reziproke besitzt.

Beweis. I. Sei γ eine Zahl, für die $A(0) + \gamma$ die beschränkte Reziproke R_0 besitzt, und sei $A(\varepsilon)$ regulär. Dann gibt es nach Def. 2 eine Basis $z(\varepsilon) = U(\varepsilon)x$ von $\mathfrak{A}(\varepsilon)$, so daß $A(\varepsilon)U(\varepsilon)x$ regulär ist für jedes x . Bei festem ε ist $A(\varepsilon)U(\varepsilon)$ nach Hilfssatz 2 ein beschränkter Operator. Also ist auch $(A(\varepsilon) + \gamma)U(\varepsilon) = V(\varepsilon)$ regulär und beschränkt. Wegen $(A(0) + \gamma)U(0) = V(0)$ folgt aus $V(0)x = 0$ zunächst $0 = R_0 V(0)x = U(0)x$ und daraus $x = 0$, weil nach Voraussetzung $U(0)$ eineindeutig \mathfrak{H} auf $\mathfrak{A}(0)$ abbildet. Ist y in \mathfrak{H} , dann liegt $R_0 y$ in $\mathfrak{A}(0)$, also gibt es eindeutig ein x aus \mathfrak{H} mit $R_0 y = U(0)x$, $y = (A(0) + \gamma)U(0)x = V(0)x$. V_0 besitzt also eine in \mathfrak{H} erklärte Rezi-

^{*)} Zum Begriff des reziproken Operators vgl. den Anfang von § 1.

proke $W_0: V(0) W_0 x = W_0 V(0) x = x$ für alle x aus \mathfrak{H} . Nach Hilfssatz 3 ist W_0 beschränkt. Nach Hilfssatz 4 besitzt $V(\varepsilon)$ eine in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ beschränkte Reziproke $W(\varepsilon)$. Daher $(A(\varepsilon) + \gamma) U(\varepsilon) W(\varepsilon) x = x$ für alle x . Nach Hilfssatz 5 ist $R(\varepsilon) = U(\varepsilon) W(\varepsilon)$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulär und beschränkt. Ist ferner (bei festem ε) x ein Element aus $\mathfrak{A}(\varepsilon)$, dann gibt es ein φ mit $x = U(\varepsilon) \varphi$ und ein ψ mit $\varphi = W(\varepsilon) \psi$, also $x = R(\varepsilon) \psi$. D. h. aber, $R(\varepsilon)$ ist eine reguläre beschränkte Reziproke von $A(\varepsilon) + \gamma$, w. z. b. w.

II. Besitze $A(\varepsilon) + \gamma$ für ein bestimmtes γ eine reguläre beschränkte Reziproke $R(\varepsilon)$, dann ist $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ im Sinne von Def. 1 regulär, weil man den in dieser Definition vorkommenden Operator $U(\varepsilon) = R(\varepsilon)$ setzen kann⁵⁾. Ferner ist für die durch $R(\varepsilon) x = z(\varepsilon)$ gegebene Darstellung $A(\varepsilon) z(\varepsilon) = A(\varepsilon) R(\varepsilon) x = x - \gamma R(\varepsilon) x$ regulär. Also ist $A(\varepsilon)$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulär. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Satz 2. Es sei $A(\varepsilon)$ in dem Teilraum $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ symmetrisch und regulär für eine Umgebung von $\varepsilon = 0$, und es sei $A(0)$ selbstadjungiert in $\mathfrak{A}(0)$. Dann ist $A(\varepsilon)$ in $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ selbstadjungiert für eine Umgebung von $\varepsilon = 0$.

Beweis. $A(0) + i$ besitzt eine beschränkte Reziproke, also muß (Satz 1) auch $A(\varepsilon) + i$ eine in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ reguläre beschränkte Reziproke $R(\varepsilon)$ besitzen. Desgleichen $A(\varepsilon) - i$. Daraus folgt die behauptete Selbstadjungiertheit von $A(\varepsilon)$.

Der Satz 1 erlaubt es, das Studium der regulären Operatoren zurückzuführen auf das Studium der regulären beschränkten Operatoren. Insbesondere gilt

Satz 3. Es sei $A(\varepsilon)$ in $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ für eine Umgebung von $\varepsilon = 0$ symmetrisch und regulär, und es sei $A(0)$ selbstadjungiert in $\mathfrak{A}(0)$. Für $A(0)$ sei λ ein h -facher Punkteigenwert; er sei isolierter Eigenwert, das heißt, das Spektrum von $A(0)$ sei im μ -Intervall $\lambda - d_1 < \mu < \lambda + d_2$ ($d_1 > 0, d_2 > 0$), abgesehen von $\mu = \lambda$, leer. Dann gilt:

1. Für alle ε aus einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ gibt es h orthogonale, normierte Elemente $\varphi^1(\varepsilon), \dots, \varphi^h(\varepsilon)$ aus $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ und zugehörige Zahlen $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_h(\varepsilon)$ mit $A(\varepsilon) \varphi^i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon) \varphi^i(\varepsilon)$; $i = 1, 2, \dots, h$. Die $\lambda_i(\varepsilon)$ sind in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ reguläre Potenzreihen mit $\lambda_i(0) = \lambda$, die $\varphi^i(\varepsilon)$ sind in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulär (Def. 2 der I. Mitteilung).

2. Sind d'_1, d'_2 positive Zahlen mit $d'_1 < d_1, d'_2 < d_2$, dann gibt es ein positives ϱ derart, daß für alle ε mit $|\varepsilon| < \varrho$ das Spektrum von $A(\varepsilon)$ im Intervall $\lambda - d'_1 < \mu < \lambda + d'_2$ mit Vielfachheiten genau aus den Punkten $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_h(\varepsilon)$ besteht.

Zusatz. In Voraussetzung und Behauptung sei $h = 0$ zugelassen und bedeute, daß das Spektrum von $A(0)$ in $\lambda - d_1 < \mu < \lambda + d_2$ bzw. von $A(\varepsilon)$ in $\lambda - d'_1 < \mu < \lambda + d'_2$ leer ist.

Beweis. I. Nach Satz 2 ist $A(\varepsilon)$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ selbstadjungiert.

II. Sei l eine Zahl mit $\lambda - d'_1 < l < \lambda$. Dann ist das Spektrum von $A(0)$ in einer Umgebung von $\mu = l$ leer, also besitzt $A(0) - l$ eine beschränkte Reziproke. Nach Satz 1 hat dann auch $A(\varepsilon) - l$ eine in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ reguläre beschränkte und symmetrische Reziproke $R(\varepsilon)$. Das Spektrum von $R(0)$ ist für $\mu < \frac{1}{\lambda - d'_1 - l}$ leer und besteht für $\mu > \frac{1}{\lambda + d'_2 - l}$ genau aus dem h -fachen Eigenwert $\mu = \frac{1}{\lambda - l}$. Nach Satz 2 der I. Mitteilung ist also das Spektrum von $R(\varepsilon)$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ leer für $\mu < \frac{1}{\lambda - d'_1 - l}$ und besteht im Intervall $\mu > \frac{1}{\lambda + d'_2 - l}$ genau aus den regulären Eigenwerten $\kappa_1(\varepsilon), \kappa_2(\varepsilon), \dots, \kappa_h(\varepsilon)$ mit den zugehörigen regulären Eigenelementen $\varphi^1(\varepsilon), \varphi^2(\varepsilon), \dots, \varphi^h(\varepsilon)$. Das Spektrum von $A(\varepsilon)$ besteht daher im Intervall $\lambda - d'_1 < \mu < \lambda + d'_2$ genau aus den Eigenwerten $\lambda_r(\varepsilon) = l + \frac{1}{\kappa_r(\varepsilon)}$ mit den Eigenelementen $\varphi^r(\varepsilon)$, die zu $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ gehören. Die $\lambda_r(\varepsilon)$ sind in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulär, $\lambda_r(0) = \lambda$. Damit ist Satz 3 und zugleich der Zusatz bewiesen.

§ 3.

Kriterien für die Regularität des gestörten Operators.

In den praktisch wichtigen Fällen bietet sich der gestörte Operator oft in folgender Form. Es ist $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$, wobei der ungestörte Operator $A_0 = A(0)$ in einem Teilraum \mathfrak{U}_0 erklärt und selbstadjungiert ist; die Operatoren A_1, A_2, \dots sind in Teilräumen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ erklärt und symmetrisch, und es ist der Durchschnitt $\mathfrak{D} = \mathfrak{U}_0 \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \cdot \dots$ noch dicht im Gesamttraum \mathfrak{H} . Für alle u aus \mathfrak{D} ist $A_0 u + \varepsilon A_1 u + \varepsilon^2 A_2 u + \dots$ konvergent, es stellt also $A(\varepsilon)u$ für jedes u aus \mathfrak{D} ein reguläres Element dar⁶⁾. Die Frage ist: gibt es eine Fortsetzung von $A(\varepsilon)$ in \mathfrak{D} zu einem in $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ regulären Operator $A(\varepsilon)$ derart, daß $\mathfrak{A}(0) = \mathfrak{A}$ ist? Unter welchen Einschränkungen ist diese Fortsetzung eindeutig? Ein erster Satz in dieser Richtung ist

Satz 4. Eine Schar von Operatoren $A(\varepsilon)$ sei für alle ε aus einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ in dem festen Teilraum \mathfrak{A} erklärt und symmetrisch. $A(\varepsilon)u$ sei regulär für jedes u aus \mathfrak{A} . Der ungestörte Operator $A(0)$ sei in \mathfrak{A} selbstadjungiert. Dann ist $A(\varepsilon)$ in \mathfrak{A} für alle ε aus einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ selbstadjungiert und regulär; insbesondere gelten die Behauptungen von Satz 3 über das diskrete Spektrum.

⁶⁾ Vgl. Def. 1 und 2 der I. Mitteilung, S. 607.

Beweis. $A(\varepsilon)$ ist in \mathfrak{A} regulär im Sinne der Definition 2. Denn wegen der Selbstadjungiertheit von $A(0)$ hat die Reziproke R von $A(0) + i$ die Eigenschaft, \mathfrak{H} eineindeutig auf \mathfrak{A} abzubilden, also ist Ru eine reguläre Basis von \mathfrak{A} im Sinne der Definition 1; außerdem ist $A(\varepsilon)Ru$ regulär. Nach Satz 2 folgt aus der Regularität auch die Selbstadjungiertheit und die Behauptung von Satz 4.

Beispiel. Sei \mathfrak{H} die Menge der komplexwertigen Funktionen $u(x)$, die in $0 \leq x \leq 1$ L_2 -integrabel sind; $(u, v) = \int_0^1 u(x) \cdot \overline{v(x)} dx$. Sei \mathfrak{A} die Menge der $u(x)$ aus \mathfrak{H} , die in $0 \leq x \leq 1$ totalstetig sind und für die $\int_0^1 |u'|^2 dx < \infty$, $u(0) = u(1)$ gilt. Dann ist $Au = \frac{1}{4} u''(x)$ in \mathfrak{A} selbstadjungiert⁷⁾. Der gestörte Operator sei $A(\varepsilon)u = \frac{1}{4} u''(x) + \varepsilon f(x)u(x)$, wobei $f(x)$ eine in $0 \leq x \leq 1$ reelle, L_2 -integrable Funktion bedeute. Da $f(x)u(x)$ in \mathfrak{H} liegt, wenn $u(x)$ eine Funktion von \mathfrak{A} ist, so kann $A(\varepsilon)$ auf jede Funktion von \mathfrak{A} angewendet werden, und es sind alle Voraussetzungen von Satz 4 gegeben. Bei diesem Beispiel kann man natürlich alle Behauptungen von Satz 4 auch explizit nachprüfen; insbesondere findet man für die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $A(\varepsilon)$ die Ausdrücke

$$(1) \lambda_n(\varepsilon) = 2n\pi + \varepsilon \int_0^1 f(x) dx, \quad \varphi_n(x) = e^{i(2n\pi x + \varepsilon x \cdot \int_0^1 f(t) dt - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^2 f(t) dt)};$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Der praktischen Anwendung des Satzes 4 kann folgendes Hindernis im Wege stehen. Häufig, insbesondere bei Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen, ist der Teilraum \mathfrak{A} , in welchem der ungestörte Operator $A(0)$ selbstadjungiert ist, gar nicht explizit bekannt, und es ist daher nicht ohne weiteres möglich nachzuprüfen, ob der gestörte Operator $A(\varepsilon)$ auf \mathfrak{A} anwendbar ist. Vielmehr ist $A(0)$ zunächst nur in einem dichten Teilraum \mathfrak{A}' von \mathfrak{A} erklärt und man erhält \mathfrak{A} aus \mathfrak{A}' durch den *Prozeß des Abschließens*: \mathfrak{A} ist die Gesamtheit der u aus \mathfrak{H} , zu denen es Folgen u^n aus \mathfrak{A}' gibt derart, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = u$ und $\lim_{n, m \rightarrow \infty} |A(0)u^n - A(0)u^m| = 0$ gilt; da daraus $\lim_{n \rightarrow \infty} A(0)u^n = v$ mit geeignetem v aus \mathfrak{H} folgt, kann man $A(0)u = v$ setzen und hat so $A(0)$ auf \mathfrak{A} erklärt. — Diesem Tatbestand trägt das folgende Kriterium Rechnung.

Satz 5. Eine Schar von Operatoren $A(\varepsilon)$ sei für alle ε aus einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ in dem festen Teilraum \mathfrak{A}' erklärt und symmetrisch, und es sei $A(\varepsilon)u$

⁷⁾ Vgl. M. H. Stone, l. c. ³⁾, insbesondere S. 428.

(für jedes u aus \mathfrak{H} regulär^{7a)}); es ist also $A(\varepsilon)u = A_0 u + \varepsilon A_1 u + \varepsilon^2 A_2 u + \dots$, wobei die A_ν in \mathfrak{H} symmetrische Operatoren bedeuten. Es gelte

1. Der ungestörte Operator A_0 ist in einem \mathfrak{H} umfassenden Teilraum \mathfrak{H} selbstadjungiert.

2. Zu jedem u aus \mathfrak{H} gibt es eine Folge u^n aus \mathfrak{H} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |u^n - u| = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_0 u^n - A_0 u| = 0$.

3. Es gibt eine Konstante $p > 0$ derart, daß

$$|A_\nu u| \leq p^\nu \{|u| + |A_0 u|\}$$

gilt für alle u aus \mathfrak{H} und $\nu = 1, 2, \dots$

Dann ist $A(\varepsilon)$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ eindeutig zu einem in \mathfrak{H} regulären selbstadjungierten Operator fortsetzbar; insbesondere gelten die Behauptungen von Satz 4^{7a)}.

Bemerkung 1. Voraussetzung 2 ist erfüllt, wenn in \mathfrak{H} alle Elemente der Form $(P_1 - P_n)u$ vorkommen, wo u ein beliebiges Element aus \mathfrak{H} und P_n die Spektralschar des ungestörten Operators A_0 ist.

Bemerkung 2. Voraussetzung 3 kann ersetzt werden durch die gleichwertige Voraussetzung

$$(A_\nu u, A_\nu u) \leq p^\nu \{(u, u) + (A_0 u, A_0 u)\}$$

oder

Bemerkung 3. durch die mehr fordernde Voraussetzung

$$(A_\nu u, A_\nu u) \leq p^\nu \{(u, u) + |(A_0 u, u)|\}.$$

Beweis. I. Die A_ν können auf \mathfrak{H} fortgesetzt werden. Denn sei u ein Element aus \mathfrak{H} und u^n eine Folge aus \mathfrak{H} mit $u^n \rightarrow u$, $|A_0 u^n - A_0 u^m| \rightarrow 0$. Dann ist $|A_\nu u^n - A_\nu u^m| \leq p^\nu \{|u^n - u^m| + |A_0 u^n - A_0 u^m|\} \rightarrow 0$, wenn $n, m \rightarrow \infty$. Es kann also A_ν durch den Prozeß des Abschließens auf \mathfrak{H} fortgesetzt werden. Aus

$$|A_\nu u^n| \leq p^\nu \{|u^n| + |A_0 u^n| + |A_0 u^n - A_0 u^m|\}$$

folgt

$$|A_\nu u^n| \leq p^\nu \cdot c,$$

wobei c von n und ν nicht abhängt. Daraus $|A_\nu u| \leq p^\nu \cdot c$, d. h. $A(\varepsilon)u = A_0 u + \varepsilon A_1 u + \dots$ konvergiert für $|\varepsilon| < \frac{1}{p}$. Es ist $A(\varepsilon)$ in \mathfrak{H} regulär und nach Satz 2 auch selbstadjungiert.

II. Die Beweise der Bemerkungen sind klar.

Satz 5 ist unmittelbar insbesondere auf Eigenwertprobleme der Quantenmechanik anwendbar⁸⁾. Hier sei er lediglich an dem oben an-

^{7a)} Die Stetigkeit des diskreten Spektrums folgt aus dem Satz 8 der II. Mitteilung (Math. Annalen 118, insb. S. 685).

⁸⁾ Häufig unter Benutzung von Bemerkung 1 und 3.

geführten Beispiel $A(\varepsilon)u = \frac{1}{\varepsilon} u'(x) + \varepsilon f(x)u(x)$ erläutert. Wir wollen jetzt den Begriff der totalstetigen Funktion nicht benutzen, so daß \mathfrak{U} nicht explizit angegeben werden kann. Versteht man unter \mathfrak{U}' die Gesamtheit der in $0 \leq x \leq 1$ stetig differenzierbaren Funktionen mit $u(0) = u(1)$, dann ist jede Eigenfunktion $e^{2\pi i n x}$ von A_0 in \mathfrak{U}' enthalten, also ist nach Bemerkung 1 die Voraussetzung 2 erfüllt. Bleibt (nach Bemerkung 2) noch

$$\int_0^1 f^2 |u|^2 dx \leq p \left\{ \int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 |u'|^2 dx \right\}$$

zu zeigen. Sei ξ mit $0 < \xi < 1$ und x_0 mit $0 < x_0 < 1$ so gewählt, daß

$$\int_0^1 f^2 |u|^2 dx = u^2(\xi) \int_0^1 f^2 dx \text{ und } \int_0^1 |u|^2 dx = |u(x_0)|^2 \text{ wird. Aus}$$

$$|u(\xi)|^2 = |u(x_0)|^2 + \int_{x_0}^{\xi} (u' \bar{u} + u \bar{u}') dx \leq \int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 (|u|^2 + |u'|^2) dx$$

folgt

$$\int_0^1 f^2 |u|^2 dx \leq 2 \int_0^1 f^2 dx \left\{ \int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 |u'|^2 dx \right\}.$$

Man kann also $p = 2 \int_0^1 f^2 dx$ setzen.

Wenn der ungestörte Operator A_0 halbbeschränkt ist, d. h. wenn es eine Zahl c gibt, so daß entweder für alle u aus \mathfrak{U}_0 gilt $(A_0 u, u) \geq c(u, u)$ (halbbeschränkt nach unten) oder $(A_0 u, u) \leq c(u, u)$ (halbbeschränkt nach oben), dann kann man das in Satz 5 ausgesprochene Kriterium ersetzen durch ein Kriterium, welches weniger fordert. Wir formulieren es für Operatoren, die halbbeschränkt nach unten sind:

Satz 6. Eine Schar von Operatoren $A(\varepsilon)$ sei für alle ε aus einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ in dem festen Teilraum \mathfrak{U}' erklärt und symmetrisch und es sei $A(\varepsilon)u$ für jedes u aus \mathfrak{U}' regulär; es ist also $A(\varepsilon)u = A_0 u + \varepsilon A_1 u + \dots$, wobei die A_i in \mathfrak{U}' symmetrische Operatoren bedeuten. Ferner gelte:

1. Der ungestörte Operator A_0 ist in einem \mathfrak{U}' umfassenden Teilraum \mathfrak{U}_0 selbstadjungiert.
2. Zu jedem u aus \mathfrak{U}_0 gibt es eine Folge u^n aus \mathfrak{U}' mit $u^n \rightarrow u$, $A_0 u^n \rightarrow A_0 u$, wenn $n \rightarrow \infty$.
3. Es gibt zwei positive Konstanten a und p derart, daß

$$|(A, u, u)| \leq p^r \{a(u, u) + (A_0 u, u)\}$$

gilt für alle u aus \mathfrak{U}' und $r = 1, 2, \dots$

Dann gibt es in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ einen und nur einen Operator $A(\varepsilon)$ mit den Eigenschaften: 1. $A(\varepsilon)$ ist regulär und selbstadjungiert in einem Teilraum $\mathfrak{U}(\varepsilon)$, der \mathfrak{U}' enthält. 2. $A(0) = A_0$. 3. $A(\varepsilon)$ stimmt in \mathfrak{U}' mit dem dort definierten Operator $A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$ überein.

Beweis. I. Der Operator $A = A_0 + a + 1$ ist in \mathfrak{U}_0 selbstadjungiert, und es gilt $(Au, u) \geq (u, u)$ und $p'(Au, u) \geq |(A, u, u)|$. Mit R werde die symmetrische und beschränkte Reziproke von A bezeichnet.

II. Setzt man $[u, v] = (Au, v)$ für u, v aus \mathfrak{U}_0 , dann ist $[u, u] \geq (u, u)$ und

$$|[RA, u, u]| \leq p'[u, u] \text{ für } u \text{ aus } \mathfrak{U}'.$$

Ferner ist $[RA, u, v] = [u, RA, v]$ für u, v aus \mathfrak{U}' .

III⁹⁾. Schließt man den Raum \mathfrak{U}_0 mit der durch $[u, v]$ bestimmten Metrik ab, so erhält man einen Teilraum \mathfrak{G} von \mathfrak{H} , der \mathfrak{U}_0 enthält, und es ist \mathfrak{G} ein Hilbertscher Raum mit dieser Metrik. Um zu sehen, daß \mathfrak{U}' in \mathfrak{G} dicht liegt mit der neuen Metrik, genügt es zu zeigen, daß es in \mathfrak{U}_0 dicht mit dieser Metrik liegt. Sei also u ein Element aus \mathfrak{U}_0 und u^n , $n = 1, 2, \dots$, eine Folge von Elementen aus \mathfrak{U}' mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u^n - u, u^n - u) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (A_0 u^n - A_0 u, A_0 u^n - A_0 u) = 0.$$

Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u^n - u, u^n - u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Au^n - Au, u^n - u) = 0,$$

was gezeigt werden sollte. Es ist RA, u ein Element von \mathfrak{U}_0 , also auch von \mathfrak{G} , wenn u in \mathfrak{U}' liegt. Es ist also RA , ein linearer Operator in \mathfrak{G} ; er ist nach II. symmetrisch. Aus $[RA, u, u] \leq p'[u, u]$ folgt bekanntlich sogar $[RA, u, RA, u] \leq p'^2[u, u]$ für alle u aus \mathfrak{U}' . Es ist also RA , eindeutig zu einem in \mathfrak{G} erklärten hinsichtlich der durch $[u, v]$ bestimmten Metrik symmetrischen und beschränkten Operator fortsetzbar. Schließlich ist der Operator $1 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r RA_r$ in \mathfrak{G} ein regulärer symmetrischer Operator.

IV. Nach Hilfssatz 4 gibt es einen in \mathfrak{G} regulären beschränkten Operator $B(\varepsilon)$ mit $(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r RA_r) B(\varepsilon) = B(\varepsilon) (1 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r RA_r) = 1$; offenbar ist $B(\varepsilon)$ symmetrisch: $[Bu, v] = [u, Bv]$. Setzt man $R(\varepsilon) = B(\varepsilon)R$, so ist $R(\varepsilon)$ auf \mathfrak{H} anwendbar. Aus $(B(\varepsilon)Ru, B(\varepsilon)Ru) \leq [B(\varepsilon)Ru, B(\varepsilon)Ru] \leq K[Ru, Ru] \leq K'(u, u)$ folgt die Beschränktheit von $R(\varepsilon)$ im gewöhnlichen Sinne. Außerdem ist $R(\varepsilon)$ regulär. Zunächst ist nämlich $R(\varepsilon)u = B(\varepsilon)Ru = \varphi(\varepsilon)$ für jedes u regulär in dem Sinne, daß es Elemente $\varphi^0, \varphi^1, \dots$ aus \mathfrak{G} gibt, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(\varepsilon) - \sum_{r=0}^n \varphi^r \varepsilon^r, \varphi(\varepsilon) - \sum_{r=0}^n \varphi^r \varepsilon^r] = 0$ gilt. Wegen $[u, u] \geq (u, u)$ folgt daraus die gewöhnliche Regularität in \mathfrak{G} .

⁹⁾ Hierzu vgl. K. Friedrichs, Math. Annalen 100, S. 465–487.

geführten Beispiel $A(\varepsilon)u = \frac{1}{\varepsilon} u'(x) + \varepsilon f(x)u(x)$ erläutert. Wir wollen jetzt den Begriff der totalstetigen Funktion nicht benutzen, so daß \mathfrak{H} nicht explizit angegeben werden kann. Versteht man unter \mathfrak{H} die Gesamtheit der in $0 \leq x \leq 1$ stetig differenzierbaren Funktionen mit $u(0) = u(1)$, dann ist jede Eigenfunktion $e^{2\pi i n x}$ von A_0 in \mathfrak{H} enthalten, also ist nach Bemerkung 1 die Voraussetzung 2 erfüllt. Bleibt (nach Bemerkung 2) noch

$$\int_0^1 f^2 |u|^2 dx \leq p \left\{ \int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 |u'|^2 dx \right\}$$

zu zeigen. Sei ξ mit $0 < \xi < 1$ und x_0 mit $0 < x_0 < 1$ so gewählt, daß

$$\int_0^1 f^2 |u|^2 dx = u^2(\xi) \int_0^1 f^2 dx \text{ und } \int_0^1 |u|^2 dx = |u(x_0)|^2 \text{ wird. Aus}$$

$$|u(\xi)|^2 = |u(x_0)|^2 + \int_{x_0}^{\xi} (u' \bar{u} + u \bar{u}') dx \leq \int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 (|u|^2 + |u'|^2) dx$$

folgt

$$\int_0^1 f^2 |u|^2 dx \leq 2 \int_0^1 f^2 dx \left\{ \int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 |u'|^2 dx \right\}.$$

Man kann also $p = 2 \int_0^1 f^2 dx$ setzen.

Wenn der ungestörte Operator A_0 halbbeschränkt ist, d. h. wenn es eine Zahl c gibt, so daß entweder für alle u aus \mathfrak{H}_0 gilt $(A_0 u, u) \geq c(u, u)$ (halbbeschränkt nach unten) oder $(A_0 u, u) \leq c(u, u)$ (halbbeschränkt nach oben), dann kann man das in Satz 5 ausgesprochene Kriterium ersetzen durch ein Kriterium, welches weniger fordert. Wir formulieren es für Operatoren, die halbbeschränkt nach unten sind:

Satz 6. Eine Schar von Operatoren $A(\varepsilon)$ sei für alle ε aus einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ in dem festen Teilraum \mathfrak{H} erklärt und symmetrisch und es sei $A(\varepsilon)u$ für jedes u aus \mathfrak{H} regulär; es ist also $A(\varepsilon)u = A_0 u + \varepsilon A_1 u + \dots$, wobei die A_i in \mathfrak{H} symmetrische Operatoren bedeuten. Ferner gelle:

1. Der ungestörte Operator A_0 ist in einem \mathfrak{H} umfassenden Teilraum \mathfrak{H}_0 selbstadjungiert.
2. Zu jedem u aus \mathfrak{H}_0 gibt es eine Folge u^n aus \mathfrak{H} mit $u^n \rightarrow u$, $A_0 u^n \rightarrow A_0 u$, wenn $n \rightarrow \infty$.
3. Es gibt zwei positive Konstanten a und p derart, daß

$$|(A, u, u)| \leq p^r \{ a(u, u) + (A_0 u, u) \}$$

gilt für alle u aus \mathfrak{H} und $r = 1, 2, \dots$

Dann gibt es in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ einen und nur einen Operator $A(\varepsilon)$ mit den Eigenschaften: 1. $A(\varepsilon)$ ist regulär und selbstadjungiert in einem Teilraum $\mathfrak{U}(\varepsilon)$, der \mathfrak{U}' enthält. 2. $A(0) = A_0$. 3. $A(\varepsilon)$ stimmt in \mathfrak{U}' mit dem dort definierten Operator $A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$ überein.

Beweis. I. Der Operator $A = A_0 + a + 1$ ist in \mathfrak{U}_0 selbstadjungiert, und es gilt $(Au, u) \geq (u, u)$ und $p'(Au, u) \geq |(A, u, u)|$. Mit R werde die symmetrische und beschränkte Reziproke von A bezeichnet.

II. Setzt man $[u, v] = (Au, v)$ für u, v aus \mathfrak{U}_0 , dann ist $[u, u] \geq (u, u)$ und

$$|[RA, u, u]| \leq p'[u, u] \text{ für } u \text{ aus } \mathfrak{U}'.$$

Ferner ist $[RA, u, v] = [u, RA, v]$ für u, v aus \mathfrak{U}' .

III⁹⁾. Schließt man den Raum \mathfrak{U}_0 mit der durch $[u, v]$ bestimmten Metrik ab, so erhält man einen Teilraum \mathfrak{G} von \mathfrak{H} , der \mathfrak{U}_0 enthält, und es ist \mathfrak{G} ein Hilbertscher Raum mit dieser Metrik. Um zu sehen, daß \mathfrak{U}' in \mathfrak{G} dicht liegt mit der neuen Metrik, genügt es zu zeigen, daß es in \mathfrak{U}_0 dicht mit dieser Metrik liegt. Sei also u ein Element aus \mathfrak{U}_0 und u^n , $n = 1, 2, \dots$, eine Folge von Elementen aus \mathfrak{U}' mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u^n - u, u^n - u) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (A_0 u^n - A_0 u, A_0 u^n - A_0 u) = 0.$$

Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [u^n - u, u^n - u] = \lim_{n \rightarrow \infty} (Au^n - Au, u^n - u) = 0,$$

was gezeigt werden sollte. Es ist RA, u ein Element von \mathfrak{U}_0 , also auch von \mathfrak{G} , wenn u in \mathfrak{U}' liegt. Es ist also RA , ein linearer Operator in \mathfrak{G} ; er ist nach II. symmetrisch. Aus $|[RA, u, u]| \leq p'[u, u]$ folgt bekanntlich sogar $[RA, u, RA, u] \leq p'^2[u, u]$ für alle u aus \mathfrak{U}' . Es ist also RA , eindeutig zu einem in \mathfrak{G} erklärten hinsichtlich der durch $[u, v]$ bestimmten Metrik symmetrischen und beschränkten Operator fortsetzbar. Schließlich ist der Operator $1 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r RA_r$ in \mathfrak{G} ein regulärer symmetrischer Operator.

IV. Nach Hilfssatz 4 gibt es einen in \mathfrak{G} regulären beschränkten Operator $B(\varepsilon)$ mit $(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r RA_r) B(\varepsilon) = B(\varepsilon) (1 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r RA_r) = 1$; offenbar ist $B(\varepsilon)$ symmetrisch: $[Bu, v] = [u, Bv]$. Setzt man $R(\varepsilon) = B(\varepsilon)R$, so ist $R(\varepsilon)$ auf \mathfrak{H} anwendbar. Aus $(B(\varepsilon)Ru, B(\varepsilon)Ru) \leq [B(\varepsilon)Ru, B(\varepsilon)Ru] \leq K[Ru, Ru] \leq K'(u, u)$ folgt die Beschränktheit von $R(\varepsilon)$ im gewöhnlichen Sinne. Außerdem ist $R(\varepsilon)$ regulär. Zunächst ist nämlich $R(\varepsilon)u = B(\varepsilon)Ru = \varphi(\varepsilon)$ für jedes u regulär in dem Sinne, daß es Elemente $\varphi^0, \varphi^1, \dots$ aus \mathfrak{G} gibt, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(\varepsilon) - \sum_{r=0}^n \varphi^r \varepsilon^r, \varphi(\varepsilon) - \sum_{r=0}^n \varphi^r \varepsilon^r] = 0$ gilt. Wegen $[u, u] \geq (u, u)$ folgt daraus die gewöhnliche Regularität in \mathfrak{G} .

⁹⁾ Hierzu vgl. K. Friedrichs, Math. Annalen 109, S. 465–487.

V. Aus $R(\varepsilon)u = 0$ folgt $B(\varepsilon)Ru = 0$, $(1 + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v RA_v)B(\varepsilon)Ru = 0$, $Ru = 0$, $u = 0$. Demnach bildet $R(\varepsilon)$ den Raum \mathfrak{H} einindeutig auf einen Teilraum $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ ab. Es ist $(R(\varepsilon)u, v) = (B(\varepsilon)Ru, v) = [RB(\varepsilon)Ru, v] = [u, RB(\varepsilon)Rv] = (u, R(\varepsilon)v)$. Unter $A(\varepsilon)$ in $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ werde $R^{-1}(\varepsilon) - a - 1$ verstanden, wobei $R^{-1}(\varepsilon)$ die (selbstadjungierte) Reziproke von $R(\varepsilon)$ ist. Wegen $R(0) = B(0)R = R$ ist $\mathfrak{A}(0) = \mathfrak{A}_0$, $A(0) = A_0$. Sei ferner u in \mathfrak{A}' . Dann ist $(1 + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v RA_v)u$ ein Element aus \mathfrak{A}_0 , weil $v^n = (1 + \sum_{v=1}^n \varepsilon^v RA_v)u$ in \mathfrak{A}_0 liegt und weil $A v^n = Au + \sum_{v=1}^n \varepsilon^v A_v u$ mit $n \rightarrow \infty$ konvergiert, A in \mathfrak{A}_0 aber abgeschlossen ist. Also gibt es ein v aus \mathfrak{H} , so daß $Rv = (1 + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v RA_v)u$ und $u = B(\varepsilon)Rv = R(\varepsilon)v$ wird. Also liegt u in $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ und es ist $A(\varepsilon)u = v - (a + 1)u = A(1 + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v RA_v)u - (a + 1)u = (A_0 + \varepsilon A_1 + \dots)u$. D. h. \mathfrak{A}' liegt in $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ und $A(\varepsilon)$ stimmt auf \mathfrak{A}' mit $A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$ überein.

VI. Gäbe es einen zweiten Operator $\dot{A}(\varepsilon)$ in $\mathfrak{A}(\varepsilon)$, so sei $\dot{R}(\varepsilon)$ die reguläre Reziproke von $\dot{A}(\varepsilon) + a + 1$. Dann ist für u aus \mathfrak{A}'

$$R(\varepsilon)(Au + \varepsilon A_1 u + \dots) = \dot{R}(\varepsilon)(Au + \varepsilon A_1 u + \dots)$$

und daraus durch vollständige Induktion $R_n Au = \dot{R}_n Au$ für alle u aus \mathfrak{A}' . Daraus folgt $R_n Au = \dot{R}_n Au$ für alle u aus \mathfrak{A}_0 , also $R_n = \dot{R}_n$. Damit ist auch die behauptete Eindeutigkeit bewiesen.

Daß Satz 6 (für halbbeschränkte Operatoren) tatsächlich mehr liefert als Satz 5, zeigt das folgende Beispiel, das ich Herrn Wecken verdanke: Sei $\varphi^1, \varphi^2, \dots; \psi^1, \psi^2, \dots$ ein System orthogonaler normierter Elemente, die zusammen den ganzen Raum \mathfrak{H} aufspannen, also $u = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \varphi^n + v_n \psi^n)$ für jedes u aus \mathfrak{H} . Es sei

$$A_0 u = \sum_{n=1}^{\infty} (2 u_n \varphi^n + 2 n^2 v_n \psi^n) \text{ und } A_1 u = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + n v_n) (\varphi^n + n \psi^n),$$

dann ist A_0 erklärt (und selbstadjungiert) in dem Teilraum \mathfrak{A}_0 aller u , für die $(A_0 u, A_0 u) = \sum_{n=1}^{\infty} (4 |u_n|^2 + 4 n^4 |v_n|^2) < \infty$ und entsprechend A_1

in dem Teilraum aller u , für die $(A_1 u, A_1 u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2) |u_n + n v_n|^2 < \infty$ ist.

Setzt man $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1$, so sind die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt, wenn für \mathfrak{A}' die Menge aller u gewählt wird, die nur endlich viele von Null verschiedene Entwicklungskoeffizienten u_n, v_n haben; insbesondere ist

$|(A_1 u, u)| \leq (A_0 u, u)$ für alle u aus \mathfrak{A}' , weil $((A_0 - A_1)u, u) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n - n v_n|^2$ ist. Es kann A_1 über \mathfrak{A}_1 hinaus gar nicht als symmetrischer Operator fortgesetzt werden und es ist \mathfrak{A}_0 nicht in \mathfrak{A}_1 enthalten; z. B. liegt $u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varphi^n$ in \mathfrak{A}_0 , aber nicht in \mathfrak{A}_1 . Es läßt sich also $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1$ nicht zu einem in \mathfrak{A}_0 selbstadjungierten Operator fortsetzen, was der Fall wäre, wenn die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt wären.

Es sei noch einmal auf das Beispiel $A_0 u = \frac{1}{i} \frac{du}{dx}$, $A_1 u = f(x) u(x)$ hingewiesen. Für $f(x)$ werde jetzt eine reelle Funktion genommen, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $0 < x < 1$ Lebesgue-integrierbar ist und für die $F(x) = \int_{1/2}^x f(\xi) d\xi$ zu einer in $0 \leq x \leq 1$ stetigen Funktion ergänzt

werden kann, für die aber $\int_0^1 f^2(\xi) d\xi = \infty$ ausfällt; wir wählen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Als Definitionsbereich \mathfrak{A}_0 von A_0 nehme man die Menge der in $0 \leq x \leq 1$ totalstetigen Funktionen, für die $\int_0^1 |u'|^2 dx < \infty$, $u(0) = u(1)$ ist. Für

den Definitionsbereich \mathfrak{A}_1 von A_1 nehme man die Gesamtheit der in $0 \leq x \leq 1$ dem Betrage nach quadratisch integrierbaren Funktionen $u(x)$, für die

$\int_0^1 f^2 |u|^2 dx < \infty$ ist. In dem Durchschnitt \mathfrak{D} von \mathfrak{A}_0 und \mathfrak{A}_1 ist $A(\varepsilon)$

$= A_0 + \varepsilon A_1$ als symmetrischer Operator erklärt und es gibt keinen größeren Raum \mathfrak{D}' derart, daß A_0 und A_1 beide auch in \mathfrak{D}' als symmetrische Operatoren erklärbar wären. Man sieht sofort, daß weder die Voraussetzungen von Satz 5 noch von Satz 6 erfüllbar sind. Trotzdem gibt es einen regulären selbstadjungierten Operator $A(\varepsilon)$ in einem Definitionsbereich $\mathfrak{A}(\varepsilon)$, der \mathfrak{D} umfaßt und für den $\mathfrak{A}(0) = \mathfrak{A}_0$, $A(0) = A_0$, $A(\varepsilon)u = A_0 u + \varepsilon A_1 u$ für u aus \mathfrak{D} ausfällt. Aber dieses $A(\varepsilon)$ ist nicht eindeutig bestimmt. Um das einzusehen, wähle man eine in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ reguläre, für $\varepsilon = 0$ verschwindende reelle Potenzreihe $\alpha(\varepsilon)$ willkürlich. Zur Erklärung von $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ und $A(\varepsilon)$ bestimme man zu vorgegebenem $v(x)$ ein $u(x)$ als Lösung von

$$\frac{1}{i} u' + \varepsilon u + i u = v, \quad u(0) = u(1) \cdot e^{i\alpha}.$$

Man erhält

$$(2) \quad u(x) = i \int_0^x e^{i\alpha[F(\xi) - F(x)] + x - \xi} v(\xi) d\xi + C \cdot e^{i\alpha[F(0) - F(x)] + x},$$

wobei C eindeutig bestimmt ist durch die Gleichung

$$e^{-i\alpha(0)} \cdot C = i \int_0^1 e^{i\alpha[F(\xi) - F(1)] + 1 - \xi} v(\xi) d\xi + C \cdot e^{i\alpha[F(0) - F(1)] + 1}.$$

Unter $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ werde nun die Gesamtheit der $u(x)$ verstanden, die sich in der Form (2) durch ein dem Betrage nach quadratisch integrierbares v ausdrücken lassen, und es werde $A(\varepsilon)u = v$ definiert. Offenbar ist $A(\varepsilon)$ im Sinne der Definition 2 ein regulärer, in $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ selbstadjungierter Operator mit $A(0) = A_0$. Außerdem ist \mathfrak{D} in $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ enthalten. Denn wenn u in \mathfrak{D} liegt, dann ist $\frac{1}{\varepsilon} u'$ und fu dem Betrage nach quadratisch integrierbar, also auch

$$v = \frac{1}{\varepsilon} u' + fu + iu \quad \text{und wegen} \quad \int_0^1 u^2 dx < \infty \quad \text{ist} \quad u(0) = u(1) = 0,$$

also gewiß $u(0) = u(1) \cdot e^{i\alpha(u)}$, woraus die Darstellbarkeit von u in der Form (2) folgt. — Der Operator $A(\varepsilon)$ hängt aber noch von der willkürlichen Funktion $\alpha(\varepsilon)$ ab, er ist nicht eindeutig bestimmt.

§ 4.

Anwendbarkeit der formalen Störungsrechnung.

Wenn die Operatoren A_0, A_1, \dots alle in demselben dichten Teilraum \mathfrak{D} erklärt sind, $A(\varepsilon)u = A_0u + \varepsilon A_1u + \dots$ für jedes u aus \mathfrak{D} ein reguläres Element ist und wenn es in einem \mathfrak{D} enthaltenden Teilraum $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ eine reguläre selbstadjungierte Fortsetzung von $A(\varepsilon)$ gibt mit $A(0) = A_0$, dann gibt es nach Satz 3 zu jedem isolierten h -fachen Eigenwert λ_0 des ungestörten Operators A_0 genau h reguläre Eigenwerte des gestörten Operators und Entsprechendes gilt für die Eigenfunktionen. Zur numerischen Berechnung dieser gestörten Eigenwerte und Eigenfunktionen macht man den Ansatz $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots$, $\varphi(\varepsilon) = \varphi^0 + \varepsilon \varphi^1 + \dots$ und sucht $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; $\varphi^0, \varphi^1, \dots$ so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$(A_0 + \varepsilon A_1 + \dots)(\varphi^0 + \varepsilon \varphi^1 + \dots) = (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots)(\varphi^0 + \varepsilon \varphi^1 + \dots)$$

aufgefaßt als Gleichung zweier Potenzreihen in ε gliedweise erfüllt wird:

$$\begin{aligned} A_0 \varphi^0 &= \lambda_0 \varphi^0 \\ (3) \quad A_0 \varphi^1 + A_1 \varphi^0 &= \lambda_0 \varphi^1 + \lambda_1 \varphi^0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Man will so schrittweise die einzelnen Näherungen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; $\varphi^0, \varphi^1, \dots$ berechnen. Ist dieses Verfahren möglich? Im allgemeinen *nicht* ohne weiteres. Denn bereits die zweite der Gleichungen (3) hat im allgemeinen keinen Sinn, weil ja A_1 zunächst nur in \mathfrak{D} erklärt war und es keine Fortsetzung von A_1 zu geben braucht derart, daß $A_1 \varphi^0$ sinnvoll wäre. Im Falle, daß die Voraussetzungen des Satzes 4 oder 5 erfüllt sind, tritt diese Schwierigkeit nicht ein, weil ja dann alle A_i auf \mathfrak{H}_0 anwendbar sind, oder doch auf \mathfrak{H}_0 eindeutig fortgesetzt werden können; hier darf die formale Störungsrechnung unbedenklich

verwendet werden. Genügt $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$ nur den Voraussetzungen des Satzes 6, so braucht A_1, A_2, \dots nicht auf \mathfrak{H}_0 fortsetzbar zu sein und die Gleichungen (3) werden zunächst sinnlos. Falls die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt sind, kommt man aber durch eine formale Benutzung der Gleichungen (3) zu den richtigen Werten $\lambda_1, \dots; \varphi^0, \varphi^1, \dots$, wenn man nur die formalen Resultate „richtig“ interpretiert. Um das einzusehen, denke man sich zunächst die Gleichung $A(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \varphi(\varepsilon)$ ersetzt durch die Gleichung $(A + \varepsilon A_1 + \dots) (\varphi^0 + \varepsilon \varphi^1 + \dots) = (a + 1 + \lambda(\varepsilon)) \varphi(\varepsilon)$, wobei $A = A_0 + a + 1$ ist (vgl. Schritt I des Beweises von Satz 6) und bezeichne mit R die Reziproke von A . Dann wird $(1 + \varepsilon R A_1 + \varepsilon^2 R A_2 + \dots) \varphi(\varepsilon) = (a + 1 + \lambda(\varepsilon)) R \varphi(\varepsilon)$. Hier sind die Operatoren $R A_i$ aufzufassen als beschränkte symmetrische Operatoren in einem Teilraum \mathfrak{G} des Gesamt-raumes \mathfrak{H} , wobei als inneres Produkt $[u, v] = (A u, v)$ gesetzt werden muß (Schritt II des Beweises von Satz 6). Auf dieses Problem in \mathfrak{G} wende man in der üblichen Weise die formale Störungsrechnung an und hat hier nur den unwesentlichen Unterschied, daß auf der rechten Seite an Stelle von $\varphi(\varepsilon)$ der Ausdruck $R \varphi(\varepsilon)$ steht. Die Resultate für die einzelnen Näherungen sind formal dieselben, als wenn man direkt die Gleichungen (3) benutzen würde, die sich ja formal von den neuen Gleichungen nur durch die Multiplikation mit R unterscheiden. So bekommt man z. B. direkt aus der zweiten der Gleichungen (3) den Wert $\lambda_1 = (A_1 \varphi^0, \varphi^0)$, der zunächst-sinnlos ist, weil $A_1 \varphi^0$ gar nicht erklärt werden kann. Während die auf die Gleichung

$$(1 + \varepsilon R A_1 + \dots) \varphi(\varepsilon) = (a + 1 + \lambda(\varepsilon)) R \varphi(\varepsilon)$$

angewendete (exakte) Störungsrechnung den Wert $\lambda_1 = [R A_1 \varphi^0, \varphi^0]$ liefert. Man hat also $(A_1 \varphi^0, \varphi^0)$ zu interpretieren als $[R A_1 \varphi^0, \varphi^0]$, was formal sofort einleuchtet, weil $[u, v] = (A u, v)$ ist.

§ 5.

Nicht reguläre Operatoren mit regulären Eigenwerten und Eigenfunktionen.

Es sei $\varphi^1, \varphi^2, \dots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} . Der Operator A_0 sei definiert durch $A_0 \varphi^r = \nu \varphi^r$, der Operator A_1 durch $A_1 \varphi^r = \nu^2 \varphi^r$. Dann ist $A_0 + \varepsilon A_1$ erklärt und symmetrisch in dem Raum \mathfrak{H} aller Elemente $u = \sum_r c_r \varphi^r$ mit $\sum_r |c_r|^2 < \infty$ und $\sum_r \nu^4 |c_r|^2 < \infty$ und es ist $(A_0 + \varepsilon A_1) u$ für alle u aus \mathfrak{H} ein reguläres Element. Für $\varepsilon \neq 0$ ist $(A_0 + \varepsilon A_1) u$ in \mathfrak{H} sogar selbstadjungiert. Seine Eigenfunktionen sind $\varphi^1, \varphi^2, \dots$, seine Eigenwerte $\lambda_r(\varepsilon) = \nu + \varepsilon \nu^2$ ($\nu = 1, 2, \dots$). Obwohl also Eigenfunktionen und Eigenwerte von ε regulär analytisch abhängen (nämlich die φ^r überhaupt nicht und die $\lambda_r(\varepsilon)$ linear),

ist $A_0 + \varepsilon A_1$ nicht regulär im Sinne der Definition 2, wie immer man $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ definieren wollte. Denn jedenfalls muß $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ alle Eigenfunktionen φ^r umfassen, also würden die Eigenwerte $\lambda_r(\varepsilon) = r + \varepsilon r^3$ auftreten. Jeder einzelne dieser Eigenwerte ist nun regulär in ε . Die Behauptung 1 von Satz 3 ist also erfüllt. Die Behauptung 2 aber *nicht* mehr. Danach müßte nämlich das Spektrum von $A_0 + \varepsilon A_1$ in dem Intervall $1 - d_1 < \mu < 1 + d_2$ (unter d_1, d_2 zwei genügend kleine positive Zahlen verstanden) für alle hinreichend kleinen $|\varepsilon|$ genau aus dem Eigenwert $\lambda_1 = 1 + \varepsilon$ bestehen. Tatsächlich aber liegen in diesem Intervall unendlich viele λ_r ; man braucht nur $\varepsilon = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r}$ zu wählen, dann ist $\lambda_r = 1$.

Hierher gehört auch die Wellengleichung des Zeemaneffektes:

$$A_0 u + \varepsilon A_1 u = -(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - \frac{1}{r} u + \varepsilon \frac{1}{r} (x u_y - y u_x) = \lambda u.$$

Für $\varepsilon = 0$ sind die Eigenfunktionen (des diskreten Spektrums) von der Form

$$u_{n;l,m} = f_{n,l}(r) g_{l,m}(\vartheta) e^{im\varphi}, \\ n = 1, 2, \dots; l = 0, 1, \dots, n-1; m = 0, \pm 1, \dots, \pm l,$$

wenn man Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi \cos \vartheta$, $y = r \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = r \sin \vartheta$ zugrunde legt. Die (ungestörten) Eigenwerte sind

$$\lambda_{n;l,m} = -\frac{1}{4n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wegen $xu_y - yu_x = u_\varphi$ lassen sich auch die gestörten Eigenfunktionen und Eigenwerte sofort angeben. Die Eigenfunktionen bleiben unverändert. Die gestörten Eigenwerte werden

$$\lambda_{n;l,m}(\varepsilon) = \lambda_{n;l,m} + \varepsilon m = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m.$$

Wieder sind also Eigenfunktionen und Eigenwerte des gestörten Operators, jeder für sich genommen, reguläre Funktionen von ε . Aber auch hier ist die Behauptung 2 des Satzes 3 *nicht* erfüllt. Greift man etwa den ersten Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$ heraus, so ist auch $\lambda_1(\varepsilon) = -\frac{1}{4}$. Behauptung 2 besagt dann, daß es ein $d > 0$ und ein $\varrho > 0$ derart gibt, daß für alle $|\varepsilon| < \varrho$ im Intervall $-\frac{1}{4} - d < \mu < -\frac{1}{4} + d$ das Spektrum von $A_0 + \varepsilon A_1$ genau aus $\lambda = -\frac{1}{4}$ bestünde. Das ist aber nicht der Fall. Denn zu diesem Spektrum gehören gewiß alle Zahlen $\mu_n = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon(n-1)$, wobei n alle ganzen positiven Zahlen durchlaufen kann. Unendlich viele von diesen Zahlen μ_n liegen im Intervall $-\frac{1}{4} - d < \mu < -\frac{1}{4} + d$, auch wenn man $|\varepsilon| < \varrho$ verlangt. Man braucht bloß $\varepsilon = \left(\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{n-1}$ zu setzen und n genügend groß zu wählen. Außerdem reicht das gestörte Spektrum bis $-\infty$. Der zur Wellengleichung des Zeemaneffektes gehörige Operator ist also kein regulärer Operator.

(Eingegangen am 6. 10. 1938.)

On the vertices of an oval.

Von

Chieh-Fan Yü in Kunming (Yunnan, China).

By a vertex of an oval we mean a point on the oval where the radius of curvature is extremum. That an oval has at least four vertices is known as the Four-Vertex Theorem. Let L denote the perimeter of the oval. A maximum of the radius of curvature which is greater than $\frac{L}{2\pi}$ shall be called a *primary maximum*; a minimum less than $\frac{L}{2\pi}$, a *primary minimum*. A point of an oval at which the radius of curvature is a primary maximum or primary minimum is called a *primary vertex*. A point where the radius of curvature takes the value $\frac{L}{2\pi}$ shall be called a *mean point* of the oval¹⁾.

In this note we propose to establish a general theorem about the number of the primary vertices and the mean points of an oval of a certain class without the assumption of the differentiability of the radius of curvature. The method used is an extension of Graustein's method¹⁾.

Let φ denote the angle made by the positive tangent at a point of an oval with a fixed directed straight line, and let the radius of curvature $\varrho(\varphi)$ (≥ 0) be a continuous function of φ defined in the interval $(0, 2\pi)$. The Fourier coefficients of $\varrho(\varphi)$ are

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho(\varphi) d\varphi = \frac{L}{\pi}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

We say that an oval is of class n if $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n$ all vanish, but a_{n+1}, b_{n+1} do not both vanish.

¹⁾ Cf. W. C. Graustein, A new form of the Four-Vertex Theorem, Monatshefte für Mathematik und Physik 43 (1936), S. 381—384.

The function

$$(1) \quad F(\varphi) = \varrho(\varphi) - \frac{L}{2\pi}$$

is continuous and of period 2π . From the relation

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi = 0$$

it follows that $F(\varphi)$ changes signs at least two times in the interval $(0, 2\pi)$ and, therefore, that it takes at least one positive maximum and one negative minimum and at least two zeros. $\varrho(\varphi)$ has then at least one maximum greater than $\frac{L}{2\pi}$ and one minimum less than $\frac{L}{2\pi}$ and takes the value $\frac{L}{2\pi}$ at least two times. But the class of any oval is at least 1, that is to say, for any oval there always exist the relations²⁾

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0, \\ b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0, \end{cases}$$

which gives

$$(4) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0, \\ \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0. \end{cases}$$

Combining (2) and (4), we have

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos^p \varphi \sin^q \varphi d\varphi = 0, \quad (p \geq 0, q \geq 0 \text{ integers, } p + q \leq 1),$$

and therefore

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} F(\varphi) P_1(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 0,$$

where $P_1(\cos \varphi, \sin \varphi)$ is a linear form of $\cos \varphi$ and $\sin \varphi$ with constant coefficients.

If, moreover,

$$(6) \quad \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0, \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0, \end{cases}$$

²⁾ Blaschke, Kreis und Kugel (Leipzig 1916), S. 160—161.

then

$$(7) \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos^p \varphi \sin^q \varphi d\varphi = 0, (p \geq 0, q \geq 0 \text{ integers}, p + q \leq n; n = 1, 2, 3, \dots).$$

For it is well known that every product $\cos^p \varphi \sin^q \varphi$ ($p + q \leq n$) is a linear combination with constant coefficients of $\cos i \varphi$, $\sin i \varphi$ ($0 \leq i \leq n$), and so the integral (7) is a linear combination of a_0, a_i, b_i ($1 \leq i \leq n$).

From (7) we obtain

$$(8) \int_0^{2\pi} F(\varphi) P_1^{(1)} P_1^{(2)} \dots P_1^{(n)} d\varphi = 0$$

where $P_1^{(k)}$ denotes a linear form of $\cos \varphi$ and $\sin \varphi$ with constant coefficients.

Now, suppose that an oval of class n has only $2n$ primary vertices and $2n$ mean points, so that $F(\varphi)$ has only n positive maxima, n negative minima and $2n$ points where $F(\varphi)$ changes sign. Let $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n-1}, \varphi_{2n}$ be the values of φ corresponding to these points, successively. Let

$$P_1^{(k)} = \cos\left(\varphi - \frac{\varphi_{2k} + \varphi_{2k-1}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_{2k} - \varphi_{2k-1}}{2}\right).$$

In the interval $(0, 2\pi)$ this function changes sign at the two points $\varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}$. Therefore

$$F \cdot P_1^{(1)} P_1^{(2)} \dots P_1^{(n)}$$

does not change sign at all in $(0, 2\pi)$, which contradicts (8).

Thus we have proved the

Theorem. *An oval of class n ($n = 1, 2, 3, \dots$) has at least $2n + 2$ mean points and also at least $2n + 2$ primary vertices.*

The case when $n = 1$ is shown by Hayashi³⁾, Süss⁴⁾ and Graustein⁵⁾. In the case when $n = 2$ Ganapathi has given a proof under the assumption of the continuity of the derivative of the curvature⁶⁾.

It should be noted that our method of reasoning on equation (8) differs only in detail from a demonstration by Hurwitz in his paper on the Fourier coefficients of an integrable function⁷⁾.

³⁾ T. Hayashi, Some geometrical applications of the Fourier series, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 50 (1926), S. 96—102.

⁴⁾ W. Süss, Über Krümmungseigenschaften im Großen von Eilinen und Eiflächen. *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse* 1935, Nr. 4, S. 5—6.

⁵⁾ W. C. Graustein, l. c.

⁶⁾ P. Ganapathi, On a certain class of ovals, *Math. Zeitschr.* 38 (1934), S. 687—688.

⁷⁾ A. Hurwitz, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, *Math. Annalen* 57 (1903), S. 442—444.

(Eingegangen am 18. 6. 1938.)

Oberflächenintegral und Stokes-Formel im gewöhnlichen Raume*).

(Integralgeometrie 29.)

Von

Wilhelm Maak in Heidelberg.

Das Oberflächenintegral für krumme Flächen im Raume ist nicht ganz leicht zu definieren. Im allgemeinen erklärt man

$$(1) \quad \int a_{23} dx_2 dx_3 + a_{31} dx_3 dx_1 + a_{12} dx_1 dx_2$$

folgendermaßen. Es sei $d\mathfrak{f}$ ein Parallelogramm. Die Projektionen von $d\mathfrak{f}$ in den drei Koordinatenrichtungen seien $dx_2 dx_3$, $dx_3 dx_1$, $dx_1 dx_2$. Für jedes $d\mathfrak{f}$ bilde man

$$\omega = a_{23} dx_2 dx_3 + a_{31} dx_3 dx_1 + a_{12} dx_1 dx_2.$$

Man versuche nun, die krumme Fläche F möglichst gut durch unendlichkleine, in F gelegene Flächenelemente $d\mathfrak{f}$ auszuschöpfen und summiere die entsprechenden ω -Werte. Das Resultat nennt man Integral von ω über F .

Die Schwierigkeit bei dieser Definition von (1) liegt in den Worten „unendlichkleine, in F gelegene Flächenelemente“. Es ist unmöglich, diesen Begriffen eine exakte mathematische Bedeutung zu geben, ohne daß man über die Fläche F strenge Voraussetzungen macht. Zumindest muß man annehmen, daß F eine differenzierbare Parameterdarstellung besitzt¹⁾.

Ich werde für das Integral (1) eine neue Definition geben, bei der ich die kritischen Worte vermeiden werde. Es sei $d\mathfrak{f}$ ein Quadrat vom Inhalt 1. Wieder bilde ich den entsprechenden ω -Wert. Das Integral aber erkläre ich nun als Summe der ω -Werte, erstreckt über alle Quadrate $d\mathfrak{f}$, deren eine Ecke auf F liegt. Die Quadrate selber können völlig willkürliche Richtung haben. Die Summation führt man folgendermaßen durch. Es sei g eine Gerade im Raume. Sie hat mit F im allgemeinen nur endlichviel Punkte gemein. In jedem dieser Punkte bilde ich das zu g senkrechte Quadrat $d\mathfrak{f}$ und summiere die entsprechenden ω -Werte. Das Resultat hängt von g ab. Das über alle Geraden erstreckte Integral dieser Funktion erkläre ich als Integral von ω über F . So ersetze ich das schwierige zweifache Integral im Raume durch ein Geradenintegral. Dies kann man auffassen als ein Volumen-

*) D 18.

¹⁾ Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung II, Berlin 1929, S. 203 ff., 231 f., 259 ff.

integral im 4-dimensionalen Raume. Und Volumenintegrale kann man leicht behandeln, auch wenn die Dimension groß ist, wie in unserem Falle.

Weil wir nirgends von Flächenelementen gesprochen haben, die in F liegen, können wir auf Voraussetzungen über F bezüglich Parameterdarstellung und Differenzierbarkeit verzichten. Es genügt im wesentlichen anzunehmen, daß F mit fast jeder Geraden nur endlichviele Punkte gemein hat.

Will man eine Strömung durch eine Fläche beschreiben, so pflegt man meist die Normalkomponente der Strömung durch die Punkte der Fläche F anzugeben. Wenn die Fläche aber keine Tangentialebene besitzt, so geht das nicht. Will man die Gesamtströmung durch die Fläche bestimmen, so integriert man die Normalkomponente der Strömung über die ganze Fläche. Wenn man die Normalkomponente nicht bestimmen kann, so kann man mit dieser Methode auch nicht die Gesamtströmung bestimmen, obwohl sie doch sicher existiert.

In unserer neuen Integraldefinition werden bei der Integration nicht nur die Normalkomponenten, sondern auch alle anderen berücksichtigt. Daher schadet es nicht, wenn die Normalkomponente nicht existiert. Man kann das Integral trotzdem ausführen, speziell läßt sich stets die Gesamtströmung als Flächenintegral angeben, wenn die Fläche auch nirgends eine Tangentialebene besitzt.

Natürlich muß man verlangen, daß in den Fällen, in denen unsere Fläche eine differenzierbare Parameterdarstellung wirklich besitzt, die neue Integraldefinition für (1) denselben Wert ergibt wie die übliche Definition. Z. B. muß sich für die Gesamtströmung beidemale derselbe Wert ergeben. Daß letzteres tatsächlich der Fall ist, kann man sich folgendermaßen plausibel machen. Die Integration über alle Quadrate $d\mathbf{f}$ in der neuen Definition führe ich in zwei Schritten aus, zunächst integriere ich über alle $d\mathbf{f}$ mit einer Ecke im Punkte P auf F , und dann integriere ich das Resultat über alle Punkte der Fläche. Man sieht leicht, daß das Ergebnis der ersten Integration gerade die Normalkomponente der Strömung in diesem Punkte der Fläche sein wird. So wird verständlich, inwiefern unser neuer Integralbegriff eine Verallgemeinerung des alten ist. Auf eine genaue Durchführung der angedeuteten Überlegungen will ich verzichten.

Ich werde statt dessen die Brauchbarkeit des neuen Integralbegriffes dadurch aufzeigen, daß ich eine wichtige Eigenschaft des Flächenintegrals auch für unser neues Integral nachweise. Es gilt nämlich der Satz von Stokes. Sei F eine Fläche mit dem Rand $\mathcal{R}dF$. Dann ist

$$(2) \quad \int_{\mathcal{R}dF} \mathfrak{A} d\mathbf{s} = \int_F \text{rot } \mathfrak{A} d\mathbf{f}.$$

Das Flächenintegral über F ist also gleich einem gewissen anderen Integral über den Rand von F .

Ich habe die Darstellung so eingerichtet, daß es klar ist, wie man die gesamte Theorie auch auf den n -dimensionalen Raum übertragen kann. Eine eingehendere Untersuchung der Flächenintegrale im n -dimensionalen Raum beabsichtige ich in einer späteren ergänzenden Note nachzutragen. Durch die Beschränkung auf den 3-dimensionalen Raum ergeben sich einige wesentliche Vereinfachungen, so daß die ursprünglichen Gedanken klarer zutage treten.

Es gibt viele Versuche, für Flächenintegrale neue Definitionen anzugeben. Die von Carathéodory geschaffene Theorie des Flächenmaßes steht in keiner unmittelbaren Beziehung zu meiner Definition²⁾; denn die Carathéodorysche Theorie handelt ganz abstrakt von möglichen Flächenmaßen, während ich ein ganz bestimmtes Flächenmaß und -integral betrachte, das sich vielleicht dadurch auszeichnet, daß die allgemeine Stokes-Formel (2) Gültigkeit hat. Die Flächen, für die bewiesen ist, daß es nur ein Flächenmaß für sie gibt, genügen gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen, von denen ich meinen Integralbegriff gern unabhängig machen möchte³⁾.

Die Theorie der Geradenmaße spielt in meiner Arbeit eine grundlegende Rolle. Über invariante Maße in Räumen mit transitiver Transformationsgruppe sind in neuerer Zeit mehrere Abhandlungen erschienen, deren Ergebnisse ich wesentlich benutze. Um die Flächenintegrale überhaupt definieren zu können, benötige ich die Tatsache der Existenz invarianter Maße⁴⁾. Um die Stokes-Formel beweisen zu können, muß man wissen, daß das Maß durch seine Invarianzeigenschaft eindeutig bestimmt ist⁵⁾. Weil es also nur ein Geradenmaß und folglich auch nur ein „Geradenintegral“ gibt, kann man leicht zeigen, daß die beiden Integrale in (2) nur verschiedene Ausdrücke für ein und dasselbe Geradenintegral sind.

Um die vorliegende Abhandlung unabhängig lesbar zu machen, habe ich in den ersten zwei Paragraphen diejenigen Begriffe und Hilfsmittel zusammengestellt und beschrieben, die ich eigentlich als bekannt voraussetzen möchte.

²⁾ Carathéodory, Über das lineare Maß von Punktmengen, eine Verallgemeinerung des Längenbegriffes, Göttinger Nachrichten 1914.

³⁾ Kolmogoroff, Math. Annalen, 107 (1933), Der Begriff „dehnungslos“, den Kolmogoroff verwendet, bedeutet etwas Ähnliches wie differenzierbar. Siehe auch Kapitel V: Area of a surface $z = F(x, y)$ in dem Buche von Saks, Theory of the Integral, Warszawa-Lwow 1937. Hier findet man auch viele Literaturangaben.

⁴⁾ Haar, Der Maßbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math. (2), 34 (1933). Für unsere Zwecke besonders: Banach, On Haar's measure, in dem Lehrbuch von Saks³⁾.

⁵⁾ v. Neumann, The uniqueness of Haar's measure. Recueil Math. 1 (1936), p. 43. A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques (im Druck). Für unsere Zwecke besonders: Kakutani, On the uniqueness of Haar's Measure, Proc. Imp. Acad. Tokyo XIV, 1938.

In § 3 wird ein neuer Flächenbegriff eingeführt, der unserer Integraldefinition ganz besonders angepaßt ist. Der neue Integralbegriff wird in § 4 genauer behandelt, und in § 5 findet man den Beweis der allgemeinen Stokes-Formel angedeutet; der Beweis der Stokes-Formel im gewöhnlichen Raume dagegen wird auch in Einzelheiten durchgeführt.

§ 1.

Alternierende Differentialformen.

Die Theorie der p -fachen Integrale im R^n ist untrennbar verknüpft mit dem Begriff der alternierenden Differentialform⁶⁾. Unter einer homogenen Differentialform p -ten Grades (p -Form) im R^n versteht man einen Ausdruck der Gestalt

$$\omega^p = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n a_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}.$$

Darin sind die $a_{i_1 \dots i_p}$ gewisse Funktionen des Ortes im R^n und die dx_i sind Symbole, für die folgende „alternierende Regel“ gilt

$$(1) \quad dx_i dx_k = -dx_k dx_i.$$

Speziell soll $dx_i dx_i = -dx_i dx_i = 0$ sein.

Im Bereich dieser Formen definiert man folgendermaßen einen Differentiationsprozeß „ d “. Ist a eine Ortsfunktion, so setzt man

$$(2) \quad da = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i.$$

Unter Benutzung dieser Abkürzung da kann man das Differential von ω^p folgendermaßen erklären

$$d\omega^p = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n da_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}.$$

Darin soll also für $da_{i_1 \dots i_p}$ der Ausdruck (2) eingesetzt werden, das Ergebnis kann unter Berücksichtigung von (1) nach den gewöhnlichen Rechenregeln zusammengefaßt und vereinfacht werden.

Außer der 0-Form, d. i. eine gewöhnliche Funktion, gibt es im R^1 nur die Form

$$\omega^1 = adx,$$

im R^2 gibt es die Formen

$$\begin{aligned} \omega^1 &= a_1 dx_1 + a_2 dx_2, \\ \omega^2 &= a dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

⁶⁾ Eingehende Darstellung z. B. Kähler, Systeme von Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin 1934, Kapitel I.

und im R^3

$$\omega^1 = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3,$$

$$\omega^2 = a_{23} dx_2 dx_3 + a_{31} dx_3 dx_1 + a_{12} dx_1 dx_2,$$

$$\omega^3 = a dx_1 dx_2 dx_3.$$

Die Form ω^1 im R^2 hat folgenden Differential

$$(3) \quad d\omega^1 = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Entsprechend berechnen wir die Differentiale der Formen ω^1 und ω^2 im R^3

$$d\omega^1 = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_2 dx_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) dx_3 dx_1 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2,$$

$$(4) \quad d\omega^2 = \left(\frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Man führt in der Integralrechnung im allgemeinen die folgenden Abkürzungen ein. Man setzt im R^2

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \{a_1, a_2\}, \\ \text{rot } \mathfrak{A} &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \\ d\mathfrak{s} &= \{dx_1, dx_2\}, \\ d\mathfrak{f} &= dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

So schreibt sich dann

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega^1 &= \mathfrak{A} d\mathfrak{s}, \\ d\omega^1 &= \text{rot } \mathfrak{A} d\mathfrak{f}. \end{aligned}$$

Entsprechend setzt man im R^3

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \{a_1, a_2, a_3\}, \\ \text{rot } \mathfrak{A} &= \left\{ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right\}, \\ \text{div } \mathfrak{A} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}, \\ d\mathfrak{s} &= \{dx_1, dx_2, dx_3\}, \\ d\mathfrak{f} &= \{dx_2 dx_3, dx_3 dx_1, dx_1 dx_2\}, \\ d\mathfrak{v} &= dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich im R^3

$$(6) \quad \begin{aligned} \omega^1 &= \mathfrak{A} d\mathfrak{s}, \\ d\omega^1 &= \text{rot } \mathfrak{A} d\mathfrak{f}, \\ \omega^2 &= \mathfrak{A} d\mathfrak{f}, \\ d\omega^2 &= \text{div } \mathfrak{A} d\mathfrak{v}. \end{aligned}$$

Wir haben dabei df als Vektor gedeutet; das geht nur zufällig, weil wir uns im R^3 befinden. Im R^4 gibt es nicht etwa nur 4, sondern 6 Differentiale zweiten Grades. Eigentlich ist df ein 2-Vektor; dasselbe gilt von $\text{rot } \mathfrak{A}$.

Ein p -Vektor im R^n ist ein geordnetes p -Tupel v^p von p Vektoren $v_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in}\}$. Die $\binom{n}{p}$ Unterdeterminanten von (v_{ik}) mit p Zeilen bezeichne ich mit

$$(7) \quad dx_{i_1}^{v^p} dx_{i_2}^{v^p} \dots dx_{i_p}^{v^p}.$$

Darin sollen die Ziffern i , die Nummern der aus (v_{ik}) ausgewählten Spalten bedeuten, und die Anordnung der dx_{i_k} gibt die Anordnung dieser Spalten in der Determinante. Die Determinanten (7) heißen die Komponenten von v^p . Zwei p -Vektoren heißen gleich, wenn sie dieselben Komponenten haben. Indem man die Differentiale einer p -Form als Komponenten eines p -Vektors deutet

$$dx_{i_1} \dots dx_{i_p} = dx_{i_1}^{v^p} \dots dx_{i_p}^{v^p},$$

kann man jede p -Form ω^p als eine Funktion von p -Vektoren auffassen. Im dreidimensionalen Raume R^3 hat jeder 2-Vektor grad 3 Komponenten, deshalb wird er oft wieder wie ein einfacher Vektor angesehen. Man wird aber damit seinem Charakter nicht gerecht (vgl. vorigen Absatz). Zwei solche 2-Vektoren $v^2 = \{v_1, v_2\}$ sind gleich, wenn die v_1, v_2 in beiden Fällen dieselbe Ebene aufspannen und in dieser Ebene ein Parallelogramm angeben, daß beidemale denselben Inhalt hat und gleich orientiert ist.

Wir benötigen später einige jetzt herzuleitende Formeln. Die Determinante $dx_i^{v^2} dx_k^{v^2}$ kann man nach der ersten Spalte entwickeln und erhält

$$dx_i^{v^2} dx_k^{v^2} = dx_i^{v_1} \cdot dx_k^{v_2} - dx_i^{v_2} \cdot dx_k^{v_1},$$

setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich

$$d\omega^1 = \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i^{v_1} dx_k^{v_2} - \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i^{v_2} dx_k^{v_1}.$$

Setzen wir nun noch

$$da_k^{v_l} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i^{v_l}, \quad l = 1, 2,$$

so ergibt sich

$$(8) \quad d\omega^1 = \sum_{k=1}^2 da_k^{v_1} dx_k^{v_2} - \sum_{k=1}^2 da_k^{v_2} dx_k^{v_1}.$$

Ganz genau so erhält man im R^3

$$(9) \quad d\omega^1 = \sum_{k=1}^3 da_k^{v_1} dx_k^{v_2} - \sum_{k=1}^3 da_k^{v_2} dx_k^{v_1}.$$

Ein 3-Vektor $v^3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ im R^3 hat nur eine Komponente $dx_1^{v_3} dx_2^{v_2} dx_3^{v_1}$. Man kann diese Determinante wieder nach der ersten Spalte entwickeln. Dabei treten die Komponenten gewisser 2-Vektoren auf. Ich nenne die drei 2-Vektoren etwa

$$v_1^2 = \{v_2, v_3\},$$

$$v_2^2 = \{v_3, v_1\},$$

$$v_3^2 = \{v_1, v_2\}.$$

Dann gilt

$$dx_1^{v_3} dx_2^{v_2} dx_3^{v_1} = dx_1^{v_1} \cdot dx_2^{v_2} dx_3^{v_3} + dx_1^{v_2} \cdot dx_2^{v_3} dx_3^{v_1} + dx_1^{v_3} \cdot dx_2^{v_1} dx_3^{v_2}.$$

Unter Benutzung dieser und ähnlicher Formeln erhält man

$$(10) \quad d\omega^3 = \sum_{i,k=1}^3 da_{ik}^{v_1} dx_i^{v_2} dx_k^{v_3} + \sum_{i,k=1}^3 da_{ik}^{v_2} dx_i^{v_3} dx_k^{v_1} + \sum_{i,k=1}^3 da_{ik}^{v_3} dx_i^{v_1} dx_k^{v_2}.$$

Entsprechende Formeln könnten ohne Schwierigkeiten auch für den R^n hergeleitet werden.

Ich möchte über p -Vektoren noch einiges Ergänzendes bemerken. Die Vektoren v_i mit $i = 1, \dots, n$ seien eine orthogonal normierte Basis des R^n . Ihre Anordnung bzw. ihre Vorzeichen bestimmen die Orientierung des R^n . Die n Vektoren v_i bilden einen n -Vektor v^n , dessen einzige Komponente $+1$ oder -1 ist. Bei Umorientierung des R^n geht v^n in $-v^n$ über. Wir denken uns in Zukunft den R^n durch Angabe des v^n orientiert.

Es sei ein p -Vektor $v^p = \{v_1, \dots, v_p\}$ gegeben. Für die v_i gelte

$$(11) \quad v_i v_k = \delta_{ik}.$$

Der R^n sei orientiert. Dann nennen wir einen $(n-p)$ -Vektor w^{n-p} zu v^p komplementär, wenn für seine $n-p$ Vektoren w_1, \dots, w_{n-p} gilt

$$w_i w_k = \delta_{ik},$$

$$v_i w_k = 0$$

und

$$(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_{n-p}) = v^n.$$

Genau wie man den R^n durch Angabe eines n -Vektors bestimmen kann, so kann man einen linearen Teilraum l^p der Dimension p durch einen p -Vektor $v^p = (v_1, \dots, v_p)$ bestimmen, wobei für die v_i Gleichung (11) gelte. Der zu

l^p komplementäre $(n - p)$ -Vektor w^{n-p} ist derselbe, wie der zu v^p komplementäre. Statt durch v^p könnte man l^p auch durch w^{n-p} geben. Das ist manchmal von Vorteil.

§ 2.

Geraden- und Ebenenmaße.

Eine Bewegung B im R^n kann man sich gegeben denken durch eine Drehung D um einen Punkt P und eine darauffolgende Translation t . Ist ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt P fest vorgegeben, so kann die Drehung durch eine Matrix und die Translation durch einen Vektor gegeben werden:

$$D = (d_{ik}), \quad i, k = 1, \dots, n, \\ t = \{t_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Es seien nun zwei Bewegungen B' und B'' gegeben, die entsprechenden Drehungen und Translationen seien D' und t' bzw. D'' und t'' . Es soll der Abstand $|B', B''|$ erklärt werden. Wir setzen

$$|B', B''| = + \sqrt{\sum_{i,k} |d'_{ik} - d''_{ik}|^2 + \sum_i |t'_i - t''_i|^2}.$$

Man sieht, daß dieser Abstand alle gewöhnlichen Eigenschaften ⁷⁾ hat:

$$|B', B''| = |B'', B'| \geq 0.$$

Aus $|B', B''| = 0$ folgt $B' = B''$

$$|B', B''| + |B'', B'''| \geq |B', B'''|.$$

Er ist auch invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems um P , wie sofort aus dem Begriff der Drehung folgt. Ändert man aber den Punkt P so ändert sich der Abstand. Der Raum der Bewegungen als Ganzes geht in einen topologisch äquivalenten über. Es sei $|B', B''|_{P_1}$ der Abstand von B', B'' bezüglich P_1 und $|B', B''|_{P_2}$ der Abstand bezüglich P_2 . Wir müssen nun zeigen, zu jedem ε gibt es ein δ , so daß aus

$$|B', B''|_{P_1} < \delta$$

folgt

$$|B', B''|_{P_2} < \varepsilon.$$

Das aber weist man für feste Punkte P_1 und P_2 sofort nach.

Durch unsere Abstandsdefinition ist die Gruppe der Bewegungen zu einem metrischen Raume geworden. Dieser Raum ist separabel und lokal(bi)kompakt.

⁷⁾ Die im folgenden auftretenden Begriffe der mengentheoretischen Topologie findet man z. B. in dem Topologielehrbuch von Alexandroff-Hopf erklärt (Bd. 1, Berlin 1935).

Unter einer p -Ebene l^p verstehen wir einen p -dimensionalen Unterraum im R^n . Durch die Bewegungen werden alle l^p untereinander transitiv vertauscht. Als ε -Umgebung $U_\varepsilon(l^p_0)$ einer p -Ebene l^p_0 bezeichne ich die Menge aller p -Ebenen l^p , die aus l^p_0 durch Anwendung einer Bewegung B hervorgehen mit $|1, B| = |B| < \varepsilon$. Dabei ist natürlich an ein festes, aber beliebiges Koordinatensystem gedacht. Durch diese Festsetzung wird die Menge aller p -Ebenen zu einem Umgebungsraum E^p . Übergang im R^n zu einem neuen Koordinatensystem bedeutet für unsere p -Ebenen Übergang zu einem äquivalenten Umgebungsbegriff, ist also im Grunde bedeutungslos. Man erkennt sofort, daß der Raum der p -Ebenen E^p wieder separabel ist, weil die Bewegungsgruppe separabel ist.

Eine Menge M^p von p -Ebenen heißt offen, wenn sie mit jeder l^p eine ganze Umgebung $U_\varepsilon(l^p)$ enthält. Die kleinste additive Mengenkategorie⁶⁾, die alle offenen Mengen enthält, heißt die Borel-Klasse B^p (im Raume der p -Ebenen). Die Mengen aus B^p heißen Borel-Mengen. Jeder Borel-Menge M^p sei eine nicht negative Zahl $\mu^p(M^p)$ zugeordnet, diese Mengenfunktion heißt ein Borel-Maß, wenn gilt

$$\text{I} \quad 0 < \mu^p(M^p) < \infty$$

für jede offene, kompakte Menge M^p , und.

$$\text{II} \quad \mu^p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (M_i^p)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^p(M_i^p) \text{ wenn } \mathfrak{D}(M_i^p, M_k^p) = 0 \text{ für } i \neq k.$$

Wenn μ^p ein Borel-Maß oder kurz *Maß* ist, so ist auch $C\mu^p$ ein Maß, wenn C eine feste Zahl ist mit $0 < C < \infty$. Zwei Maße, die sich nur um einen solchen Faktor C unterscheiden, nenne ich gleich.

Wenn eine Menge M^p_0 durch Bewegung in eine Menge M^p übergeht, so heißen M^p_0 und M^p kongruent. Falls für kongruente Mengen stets gilt

$$\text{III} \quad \mu^p(M^p_0) = \mu^p(M^p),$$

so heißt μ^p *invariant*, oder speziell *bewegungsinvariant*. Über invariante Maße in Umgebungsräumen haben in neuester Zeit verschiedene Verfasser folgenden, für die in vorliegender Abhandlung verfolgten Ziele grundlegenden Satz bewiesen: Ist in einem Raume eine lokalbikompakte, transitive Gruppe von Transformationen gegeben, so gibt es in diesem Raume ein⁴⁾ und nur ein⁵⁾ gegenüber dieser Gruppe invariantes Maß.

Wenden wir dies Ergebnis auf unsere p -Ebenen an, so erhalten wir den Satz: *Es gibt für p -Ebenen ein und nur ein bewegungsinvariantes Maß, welches wir (wie oben) mit μ^p bezeichnen. Dieses Maß kann noch normiert werden,*

⁶⁾ Die im folgenden auftretenden maßtheoretischen Begriffe und Lehrsätze findet man z. B. in dem Integrallehrbuch von Saks erklärt⁵⁾.

d. h. man kann verlangen, daß für eine gewisse offene, kompakte Menge M^p gilt

$$\mu^p(M^p) = 1.$$

Dieses so erklärte Maß μ^p kann man auch rechnerisch explizit angeben. Man lese darüber in dem Buche von W. Blaschke, Integralgeometrie I, nach ⁹⁾. Die dort angegebenen Maße bzw. Dichten für p -Ebenenmengen sind, wie ausdrücklich gezeigt wird, bewegungsinvariant, und wegen des Eindeutigkeitsatzes müssen sie also mit dem von uns abstrakt eingeführten Maß übereinstimmen. So kann man z. B. in der Ebene jeder Geraden g^1 einer Menge M^1 von Geraden die Koordinate x des Schnittpunktes von g^1 mit der x -Achse und ihren Winkel φ mit derselben Achse zuordnen. Das Maß von M^1 ist dann

$$(1) \quad \mu^1(M^1) = \int \sin \varphi \, dx \, d\varphi.$$

Ich werde noch weitere wichtige Anwendungen speziell des Eindeutigkeitsatzes bringen.

Statt einzelner p -Ebenen betrachten wir jetzt für festes p und q Paare I^p, I^q , für die wir schreiben $I^p \times I^q$. Die Menge aller Paare $I^p \times I^q$ mit $I^p \subset M^p$ und $I^q \subset M^q$ nennen wir $M^p \times M^q$. So bedeutet $E^p \times E^q$ die Menge aller Paare überhaupt. Als ε -Umgebung von $I^p \times I^q$ definieren wir die Menge $U_\varepsilon(I^p) \times U_\varepsilon(I^q)$. So wird $E^p \times E^q$ zu einem Umgebungsraum. Wir bezeichnen mit $B^p \times B^q$ die kleinste additive Mengenkategorie, die alle Mengen der Gestalt $M^p \times M^q$ enthält, wobei $M^p \subset B^p$ und $M^q \subset B^q$. Es enthält also $B^p \times B^q$ speziell alle Umgebungen $U_\varepsilon(I^p) \times U_\varepsilon(I^q)$. Weil E^p und E^q separabel sind, ist auch $E^p \times E^q$ separabel. Deshalb enthält $B^p \times B^q$ alle offenen Mengen, und weil $B^p \times B^q$ eine additive Klasse ist, enthält sie auch die Borel-Klasse B^{p+q} , die wieder definiert ist als die kleinste additive Klasse über allen offenen Mengen.

$$(2) \quad B^{p+q} \subset B^p \times B^q.$$

Es sei nun $r = p + q - n$. Jeder Borel-Menge $M^r \subset B^r$ von r -Ebenen I^r ordne ich nun alle Paare $I^p \times I^q$ zu, für die gilt

$$\mathfrak{D}(I^p, I^q) = I^r \subset M^r.$$

Die Menge aller dieser Paare soll M^{p+q} heißen. Offenbar gibt es zu jedem $I_0^p \times I_0^q$ mit $\mathfrak{D}(I_0^p, I_0^q) = I_0^r$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ , so daß für alle $I^p \times I^q \subset U_\delta(I_0^p) \times U_\delta(I_0^q)$ gilt

$$\mathfrak{D}(I^p, I^q) = I^r \in U_\varepsilon(I_0^r).$$

⁹⁾ Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n . Actualités scientifiques et industrielles 252, Paris 1935.

Deshalb gehört zu jeder offenen Menge M' eine offene Menge $M^{p,q}$ und folglich zu jeder Borel-Menge M' eine Borel-Menge $M^{p,q}$.

$$M^{p,q} \in B^{p,q}.$$

Der Satz von Fubini⁸⁾ gestattet es, in $E^p \times E^q$ ein Maß und Integral zu definieren. Bezüglich dieses Maßes, das wir $\mu^{p,q}$ nennen wollen, sind alle Mengen aus $B^p \times B^q$ meßbar, folglich ist es wegen (2) ein Borel-Maß und alle Mengen $M^{p,q}$ sind meßbar. Es besteht nun die Möglichkeit, für M' mit Hilfe von $\mu^{p,q}$ ein Maß zu erklären. Man setze nämlich

$$\mu^r(M') = \mu^{p,q}(M^{p,q}).$$

Weil dies Maß bewegungsinvariant ist, folgt sofort, daß es das gewöhnliche eindeutig bestimmte Maß von r -Ebenen sein muß.

Das Maß $\mu^{p,q}(M^{p,q})$ kann man nach Fubini berechnen, indem man bei festem \mathbb{P} das Maß μ^q aller \mathbb{Q} bestimmt, für die $\mathbb{P} \times \mathbb{Q} \in M^{p,q}$. Das Ergebnis ist eine integrable Funktion von \mathbb{P} und ihr Integral ist $\mu^{p,q}$. Infolge des Eindeutigkeitsatzes kann man μ^q deuten als Maß aller \mathbb{Q} aus M' , die in \mathbb{P} enthalten sind. Deshalb können wir folgendes Ergebnis formulieren: *Das Maß einer Menge von r -Ebenen \mathbb{P} erhält man, indem man zunächst das Maß aller \mathbb{Q} in einer p -Ebene \mathbb{P} mit $p > r$ bestimmt und das Resultat über alle p -Ebenen integriert.*

Es sei $f(\mathbb{P})$ eine (Borelsch) integrable Funktion der r -Ebenen. Dem soeben formulierten Satze über Maße entspricht das folgende Integraltheorem, das man ebenfalls aus dem Satz von Fubini folgert.

$$(3) \quad \int_{\mathbb{P}} f(\mathbb{P}) = \int_{\mathbb{P}} \int_{\mathbb{Q} \subset \mathbb{P}} f(\mathbb{Q}).$$

Im Grunde wichtig sind für unsere Zwecke die hergeleiteten Sätze nur, soweit sie sich auf den gewöhnlichen Raum oder die Ebene beziehen. Ich will diese Fälle besonders aufzählen. Im Anfang des Paragraphen haben wir Existenz und eindeutige Bestimmtheit des Punkt-, Geraden- und Ebenenmaßes besprochen: nämlich Punkt p^0 , Gerade g^1 und Ebene e^2 sind nur andere Bezeichnungen für 0-Ebene, 1-Ebene und 2-Ebene.

Man kann in der Ebene eine Punktfunktion $f(p^0)$ integrieren, indem man zunächst über alle p^0 auf einer Geraden g^1 integriert und das Resultat über alle g^1 integriert.

$$(4) \quad \int_{p^0} f(p^0) = \int_{g^1} \int_{p^0 \subset g^1} f(p^0).$$

Eine genau gleichlautende Rechenregel gilt im Raume. Außerdem folgt aus (3) im Raume noch eine Formel über Funktionen $f(g^1)$ von Geraden:

Das Integral von $f(g^1)$ kann man bestimmen, indem man erst über alle g^1 in einer Ebene e^2 und dann über alle e^2 integriert.

$$(5) \quad \int_{g^1} f(g^1) = \int_{e^2} \int_{g^1 \subset e^2} f(g^1).$$

§ 3.

Flächen und Kurven.

Ich habe die Absicht, eine Definition für Oberflächenintegrale zu geben, die sich dadurch auszeichnet, daß sie für besonders allgemeine Flächen anwendbar ist. Diesen Flächenbegriff werden wir jetzt einführen und näher behandeln, soweit es für unsere Zwecke notwendig ist.

\mathcal{M}^n sei eine beliebige Menge im R^n , deren Rand $\mathcal{R}\mathcal{M}^n$ die Eigenschaft hat, daß fast jede Gerade l^1 nur isolierte Punkte mit $\mathcal{R}\mathcal{M}^n$ gemein hat. Eine solche Menge heiße eine Menge der Stufe n . Auf $\mathcal{R}\mathcal{M}^n$ kann man den Abstandsbegriff aus R^n verwenden, um $\mathcal{R}\mathcal{M}^n$ zu einem Umgebungsraum zu machen. Es sei \mathcal{M}^{n-1} eine Teilmenge von $\mathcal{R}\mathcal{M}^n$. Wenn bezüglich dieses Umgebungsbegriffes auf $\mathcal{R}\mathcal{M}^n$ die Menge \mathcal{M}^{n-1} einen $\mathcal{R}\mathcal{M}^{n-1}$ besitzt mit der Eigenschaft, daß fast jede Ebene l^2 mit $\mathcal{R}\mathcal{M}^{n-1}$ nur isolierte Punkte gemein hat, so heißt \mathcal{M}^{n-1} eine Menge der Stufe $n-1$. Auf $\mathcal{R}\mathcal{M}^{n-1}$ kann man nun wieder den gewöhnlichen Umgebungsbegriff des R^n verwenden, um für Teilmengen \mathcal{M}^{n-2} von $\mathcal{R}\mathcal{M}^{n-1}$ einen Rand $\mathcal{R}\mathcal{M}^{n-2}$ zu erklären. Wenn dieser mit fast jedem l^3 nur isolierte Punkte gemein hat, so heißt \mathcal{M}^{n-2} eine Menge der Stufe $n-2$. So kann man fortfahren und erhält allgemein den Begriff *Menge \mathcal{M}^p von der Stufe p* . Zur Bestimmung von \mathcal{M}^p gehört die Angabe sämtlicher Stufen \mathcal{M}^q mit $p \leq q \leq n$ ¹⁰⁾.

Eine Menge \mathcal{M}^0 der Stufe 0 ist stets eine Menge von isolierten Punkten. Im R^1 muß man zur Bestimmung von \mathcal{M}^0 die zugehörige erste Stufe \mathcal{M}^1 angeben. \mathcal{M}^1 besteht aus endlich oder abzählbar unendlichvielen kleinen Strecken, und \mathcal{M}^0 sind gewisse ihrer Anfangs- und Endpunkte.

Im R^2 werde ich eine Menge der Stufe 2 häufig als Flächenstück \mathcal{F}^2 bezeichnen. Eine Teilmenge auf $\mathcal{R}\mathcal{F}^2$ der Stufe 1 werde ich Kurve \mathcal{K}^1 nennen. Zur Festlegung von \mathcal{K}^1 gehört die Angabe von \mathcal{F}^2 .

Im R^3 nenne ich eine Menge der Stufe 3 auch kurz Volumen \mathcal{V}^3 . Eine Menge der Stufe 2 heiße Fläche \mathcal{F}^2 , eine Menge der Stufe 1 heiße Kurve \mathcal{K}^1 .

¹⁰⁾ Der obere Index bei Mengen bedeutet im allgemeinen die Stufe oder, wenn man will, die Dimension der Menge. Ich bezeichne übrigens auch oft die Mengen selber als Stufen.

als Schnitte mit Flächen \mathfrak{F}^2 ergeben sich Kurven \mathfrak{R}^1

$$D(\mathfrak{F}^2, \mathfrak{e}^2) = \mathfrak{R}^1.$$

Die Schnitte von \mathfrak{e}^2 mit Kurven \mathfrak{R}^1 ergeben isolierte Punkte

$$D(\mathfrak{R}^1, \mathfrak{e}^2) = \mathfrak{M}^0.$$

Entsprechend ist der Schnitt einer Geraden mit einem Volumen fast stets eine Kurve (Menge von Strecken), mit einer Fläche ergeben sich einzelne Punkte.

Mit Hilfe der Formel

$$\mathcal{R}d D(\mathfrak{M}^p, \mathfrak{l}^q) \subset \mathcal{R}d \mathfrak{M}^p$$

beweist man ohne Schwierigkeiten folgende zwei Sätze

$$(3) \quad \mathcal{R}d D(\mathfrak{M}^p, \mathfrak{l}^q) = D(\mathcal{R}d \mathfrak{M}^p, \mathfrak{l}^q)$$

und

$$(4) \quad D(D(\mathfrak{M}^p, \mathfrak{l}^q), \mathfrak{l}^r) = D(\mathfrak{M}^p, \mathfrak{l}^r) \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{l}^r \subset \mathfrak{l}^q.$$

Wir benötigen diese Formel nur im Raume und in der Ebene.

Der Beweis des Hauptsatzes für Kurvenintegrale stützt sich auf einen Hilfssatz, den ich jetzt herleite. Es sei im R^2 eine Menge \mathfrak{M}^1 der Stufe 1 gegeben. Die zweite Stufe sei \mathfrak{M}^2 . Ich setze

$$\mathcal{R}d \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^1 = \overline{\mathfrak{M}^1}.$$

Den ganzen R^2 überdecke ich nun mit einem Quadratraster. Die Seitenlänge der Quadrate sei $\frac{1}{2}$. Die Summe aller derjenigen Quadrate, die Punkte mit \mathfrak{M}^1 , aber nicht mit $\mathcal{R}d \mathfrak{M}^1$ und $\overline{\mathfrak{M}^1}$ gemein haben, nenne ich \mathfrak{Q}^1 . Die restlichen Quadrate des Rasters unterteile ich in vier weitere der Seitenlänge $\frac{1}{2^2}$. Die Summe aller dieser kleineren Quadrate, die Punkte mit \mathfrak{M}^1 , aber nicht mit $\mathcal{R}d \mathfrak{M}^1$ und $\overline{\mathfrak{M}^1}$ gemein haben, sei \mathfrak{Q}^2 . In dieser Weise fahre ich fort und erhalte eine Folge von Mengen \mathfrak{Q}^r von Quadraten. Ich setze

$$\mathfrak{Q} = \sum_r \mathfrak{Q}^r$$

und bilde

$$\mathfrak{M}^2 = D(\mathfrak{M}^2, \mathfrak{Q}).$$

Es gilt

$$(5) \quad \mathcal{R}d \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}^1 + \mathcal{R}d \mathfrak{M}^1 + \mathfrak{Q}^1.$$

Darin ist \mathfrak{Q}^1 ein Streckenzug, für den gilt

$$\mathcal{R}d \mathfrak{Q}^1 = \mathcal{R}d \mathfrak{M}^1.$$

Man kann also \mathfrak{M}^1 auffassen als gelegen auf dem Rande von \mathfrak{M}^2 , also kann man \mathfrak{M}^2 als die zu \mathfrak{M}^1 gehörige zweite Stufe ansehen. Es gilt aber wegen (5)

$$\mathcal{R}d \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^1 - \mathcal{R}d \mathfrak{M}^1 = \mathfrak{E}^1.$$

Diese Formel könnte man so in Worte übertragen: *Jede 1-Menge im R^2 ist homolog einem Streckenzug.*

Eine Menge \mathfrak{M}^0 im R^1 oder R^2 besteht aus isolierten Punkten. Es ergibt sich die Notwendigkeit, jedem dieser Punkte eine natürliche Vielfachheit zuzuordnen. Wir setzen den R^1 als orientiert voraus, d. h. wir geben im R^1 einen Durchlaufungssinn vor. Jeder Punkt P aus \mathfrak{M}^0 ist Anfangs- oder Endpunkt einer Strecke aus \mathfrak{M}^1 oder beides. Dementsprechend bekommt P die Vielfachheit -1 , $+1$ oder 0 . Jetzt sei \mathfrak{M}^0 eine 0-Menge im R^2 , den wir ebenfalls orientiert annehmen (d. h. wir denken uns R^2 durch einen 2-Vektor \mathfrak{v}^2 gegeben). Jeden Punkt aus \mathfrak{M}^0 umgebe ich mit einem kleinen Quadrat q^2 mit dem Rand q^1 . Es soll außer P keinen weiteren Punkt von \mathfrak{M}^0 enthalten. Außerdem richte ich es so ein, daß $D(\mathfrak{M}^1, q^1)$ eine Menge der Stufe 0 ist, die in Geradenstücken (nämlich auf q^1) liegt. Diese Stücke sind dadurch orientiert, daß ich festsetze: Der Vektor i , der vom Innern von q^2 ins Äußere zeigt, und der Vektor j , der die Durchlaufungsrichtung von q^1 angibt, sollen zusammen (eventuell bis auf einen positiven Faktor) den 2-Vektor \mathfrak{v}^2 ergeben, der R^2 orientiert. In q^1 ist die Vielfachheit $\varphi(Q)$ bereits für alle Q aus $D(\mathfrak{M}^1, q^1)$ erklärt. Ich setze nun

$$\varphi(P) = \sum_Q \varphi(Q).$$

Durch weiteres Zerlegen von q^2 in kleinere Quadrate erkennt man, daß $\varphi(P)$ von der speziellen Wahl des q^2 unabhängig ist, wenn nur q^2 , wie angenommen, außer P keine weiteren Punkte von $\mathcal{R}d \mathfrak{M}^1$ enthält.

Ganz genau so, wie ich es hier für ebene Mengen nullter Stufe geschildert habe, kann man auch im n -dimensionalen Raume mit vollständiger Induktion eine Vielfachheit erklären.

§ 4.

Definition des Flächenintegrals.

Es soll jetzt das Integral einer p -Form ω^p über eine Menge \mathfrak{M}^p der Stufe p erklärt werden.

$$\int_{\mathfrak{M}^p} \omega^p.$$

Für $p = 0$ setzen wir

$$(1) \quad \int_{\mathfrak{M}^0} \omega^0 = \sum_{P \in \mathfrak{M}^0} \varphi(P) \omega^0(P),$$

worin $\varphi(P)$ die in § 3 erklärte Vielfachheit von P bedeutet.

Wenn $p \neq 0$, so setzen wir

$$(2) \quad \int_{\mathfrak{M}^p} \omega^p = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \int_{D(\mathfrak{M}^p, \mathbb{R}^{n-p})} \omega^p(v^p).$$

Darin bedeutet v^p den zu \mathbb{R}^{n-p} komplementären p -Vektor (vgl. § 1). $\omega^p(v^p)$ ist offenbar bei festem \mathbb{R}^{n-p} eine skalare Funktion im \mathbb{R}^{n-p} , deshalb ist

$$\int_{D(\mathfrak{M}^p, \mathbb{R}^{n-p})} \omega^p(v^p)$$

für fast alle \mathbb{R}^{n-p} durch (1) erklärt. Dies Integral ist eine Funktion von \mathbb{R}^{n-p} . Wenn sie integrierbar ist, so kann man ihr Integral über alle \mathbb{R}^{n-p} des \mathbb{R}^n bilden (§ 2). Das Integral nenne ich *Integral von ω^p über \mathfrak{M}^p* . Die \mathbb{R}^{n-p} hängen ab von $p(n-p+1)$ Variablen. $\int_{\mathbb{R}^{n-p}}$ ist deshalb ein

$p(n-p+1)$ -faches Volumenintegral. Das p -fache Oberflächenintegral im \mathbb{R}^n haben wir also auf ein 0-faches Integral und ein $p(n-p+1)$ -faches Integral im $\mathbb{R}^{p(n-p+1)}$ zurückgeführt. Obwohl die Variablenzahl sich im allgemeinen vergrößert, bedeutet die Zurückführung des Oberflächenintegrals auf ein Volumenintegral eine gewisse Vereinfachung gegenüber anderen Definitionsmethoden. Für $p=0$ erhalten wir (1) zurück. Für $p=n$ ergibt sich das übliche Volumenintegral.

Für $n=1$ ergibt (2) nichts Neues. Im \mathbb{R}^2 ist nur die in (2) gegebene Definition des Kurvenintegrals ungewöhnlich. Bezeichnen wir Geraden etwa mit g^1 und eine Kurve mit \mathfrak{K}^1 , so lautet (2)

$$(3) \quad \int_{\mathfrak{K}^1} \omega^1 = \int_{g^1} \int_{D(\mathfrak{K}^1, g^1)} \omega^1(v^1),$$

worin also v^1 die zu der (gerichteten) Geraden g^1 komplementäre Richtung bedeutet.

Im Raume ist sowohl die Definition des Kurvenintegrals als auch die des Flächenintegrals ungewöhnlich. Bezeichnen wir Ebenen mit e^2 und eine Kurve (wie im \mathbb{R}^2) mit \mathfrak{K}^1 , so ergibt sich aus (2)

$$\int_{\mathfrak{K}^1} \omega^1 = \int_{e^2} \int_{D(\mathfrak{K}^1, e^2)} \omega^1(v^1).$$

Darin ist wieder v^1 die zu e^2 komplementäre Richtung. Den zu einer Geraden komplementären 2-Vektor nenne ich v^2 . Eine Fläche nenne ich \mathfrak{F}^2 . So folgt aus (2) als Definition des Flächenintegrals

$$(4) \quad \int_{\mathfrak{F}^2} \omega^2 = \int_{g^1} \int_{D(\mathfrak{F}^2, g^1)} \omega^2(v^2).$$

Bei der Definition (2) des Flächenintegrals habe ich vorausgesetzt, daß

$$(5) \quad \int_{D(\mathfrak{M}^p, \mathbb{R}^{n-p})} \omega^p(v^p)$$

eine integrable Funktion von \mathbb{R}^p sei. Diese Voraussetzung ist eine Beschränkung sowohl für \mathfrak{M}^p als auch für ω^p ; wenn aber über eines von beiden starke Voraussetzungen gemacht werden, so genügen für das andere schwächere. Setzen wir z. B. $\omega^p \equiv 0$, so kann \mathfrak{M}^p etwas absolut Willkürliches sein; denn (5) verschwindet immer. Ist umgekehrt \mathfrak{M}^p leer, so darf ω^p irgend etwas sein. Es entsteht die Aufgabe, die Forderungen an \mathfrak{M}^p und ω^p möglichst vernünftig gegeneinander abzuwägen.

Für unsere Zwecke genügt eine Untersuchung der Existenzbedingungen für das Flächenintegral (4) im K^3 . Das Kurvenintegral (3) im K^2 wird völlig analog behandelt. Von der Fläche \mathfrak{F}^2 nehme ich an, daß sie beschränkt sei. eine Annahme, die man später natürlich wieder fallen lassen kann, indem man unbeschränkte Flächen aus beschränkten zusammensetzt. Weil \mathfrak{F}^2 beschränkt ist, kann man auch \mathfrak{B}^3 und $\mathcal{R}'\mathfrak{B}^3$ beschränkt wählen. Die Koeffizienten der 2-Form ω^2 sollen differenzierbare Funktionen sein. Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, so existiert das Flächenintegral.

Ich werde beweisen, daß

$$F(g^1) = \int_{\mathcal{R}(\mathfrak{F}^2, g^1)} \omega^2$$

eine integrable Funktion von g^1 ist. Wir werden sehen, daß F fast überall stetig ist. — Weil $\mathcal{R}'\mathfrak{B}^3$ beschränkt ist, enthält $\mathfrak{D}(\mathcal{R}'\mathfrak{B}^3, g^1)$ für fast alle g^1 nur endlichviele Punkte und $\mathfrak{D}(\mathcal{R}'\mathfrak{F}^2, g^1)$ ist für fast alle g^1 leer. Bei jeder dieser Geraden ist $F(g^1)$ stetig. Um das einzusehen, umgebe ich jeden Punkt von $\mathfrak{D}(\mathcal{R}'\mathfrak{B}^3, g^1)$ mit einer offenen Kugel $K_i(\delta_i)$ von einem so kleinen Radius δ_i , daß $\mathfrak{D}(K_i(\delta_i), \mathcal{R}'\mathfrak{B}^3)$ ganz in \mathfrak{F}^2 bzw. außerhalb \mathfrak{F}^2 liegt. Entfernt man von g^1 die Mengen $\mathfrak{D}(K_i(\delta_i), g^1)$ und alles, was außerhalb einer Kugel liegt, die \mathfrak{B}^3 enthält, so bleiben endlichviele abgeschlossene Strecken s_k nach. Um jeden Punkt der Strecken s_k lege ich eine offene Kugel K_k , die so klein ist, daß sie ganz in \mathfrak{B}^3 bzw. ganz außerhalb von \mathfrak{B}^3 liegt. Endlichviele dieser Kugeln genügen, um s_k ganz zu überdecken. Ich nenne die Summe $\mathfrak{S}(K_k)$ dieser Kugeln B_k . Ich betrachte jetzt die Menge aller Geraden g^1 , die mit jeder der Mengen $K_i(\delta_i)$ und B_k genau ein Stück gemein haben. Sie bilden eine Umgebung von g^1 , die immer kleiner wird, je kleiner man die δ_i wählt. Wir schätzen nun

$$F(g^{1*}) - F(g^1)$$

ab. Eine Abänderung kann $F(g^1)$ durch Übergang von g^1 zu g^{1*} nur erfahren durch Vorgänge in den Kugeln $K_i(\delta_i)$. Bei jeder dieser Kugeln kommt die Gerade g^1 aus dem Innern von \mathfrak{B}^3 und geht ins Äußere oder Innere von \mathfrak{B}^3 , oder sie kommt aus dem Äußeren und geht ins Äußere oder Innere. Dies

ändert sich beim Übergang zu g^{1*} nicht. Deshalb kann man leicht die Größe der Summe abschätzen, die zu $F(g^1)$ bei Übergang zu g^{1*} hinzutritt.

$$|F(g^{1*}) - F(g^1)| \leq 2M \sum_i \delta_i + \sum_i \delta_i.$$

Dabei bedeuten die δ_i die Schwankung von $\omega^2(v^2)$ in den Kugeln $K_i(\delta_i)$. Sie streben also mit den δ_i gegen Null. M ist die obere Schranke für den Differentialquotienten von $\omega^2(v^2)$, aufgefaßt als Funktion in g^{1*} . Es ist offenbar möglich, eine für jede Gerade im R^3 gültige Schranke M zu finden, deshalb kann man zu vorgegebenem ε stets die Zahlen δ so klein machen und eine dementsprechend kleine Umgebung von g^1 angeben, daß für alle g^{1*} dieser Umgebung gilt

$$|F(g^{1*}) - F(g^1)| < \varepsilon.$$

Deshalb ist in der Tat $F(g^1)$ fast überall stetig.

Zum Schluß dieses Paragraphen will ich einen später notwendigen Satz erwähnen, der vielleicht mit dazu beitragen kann, unseren Integralbegriff verständlich zu machen. Es sei \mathfrak{S} ein Streckenzug in der Ebene R^2 , und ω^1 sei eine 1-Form. Dann ist das Integral

$$\int_{\mathfrak{S}} \omega^1$$

genau das gewöhnliche Integral längs eines Streckenzuges. Es genügt, dies für eine der Strecken s von \mathfrak{S} zu beweisen. Zu diesem Zwecke führen wir die Integration über alle g^1 in zwei Schritten aus. Zunächst integriert man über alle Geraden durch einen Punkt von s und das Resultat wird über alle Punkte von s integriert. Vgl. § 2 (1).

Um die erste Integration ausführen zu können, zerlegt man den Vektor v^1 in $\omega^1(v^1)$ in zwei Komponenten v_1^1, v_2^1 . Die erste Komponente v_1^1 sei die in Richtung von s , die andere v_2^1 sei die dazu senkrechte. Das Integral von $\omega^1(v_2^1)$ verschwindet, das Integral von $\omega^1(v_1^1)$ ist bis auf einen konstanten Faktor eben wieder dieses $\omega^1(v_1^1)$. Integriert man $\omega^1(v_1^1)$ längs s , so sieht man also, daß $\int_s \omega^1$ und somit auch $\int_{\mathfrak{S}} \omega^1$ bis auf einen konstanten Faktor das gewöhnliche Kurvenintegral ist, wie man es aus der Integralrechnung kennt. Wenn man s durch eine Kurve ersetzt, darf man nicht ohne weiteres in derselben Weise schließen, wie wir es eben taten, obwohl der Satz richtig bleibt. — Ähnlich kann man zeigen, daß das Flächenintegral (4) für stückweis ebene Flächen \mathfrak{F}^2 mit dem gewöhnlichen Flächenintegral übereinstimmt bis auf einen konstanten Faktor. Für krumme Kurven und Flächen folgen die entsprechenden Sätze durch Grenzübergänge.

§ 5.

Formeln von Stokes im gewöhnlichen Raume.

Um zu zeigen, daß das im vorigen Paragraphen erklärte Integral brauchbar und vernünftig ist, wird man die bekannten Formeln für Flächenintegrale möglichst einfach zu beweisen suchen. Eine der wichtigsten ist die allgemeine Stokes-Formel

$$(1) \quad \int_{Rd\mathfrak{M}^{p+1}} \omega^p = \int_{\mathfrak{M}^{p+1}} d\omega^p.$$

Man kann sie durch vollständige Induktion beweisen. Gemäß unserer Definition ist

$$(2) \quad \int_{\mathfrak{M}^{p+1}} d\omega^p = \int_{I^{n-p-1}} \int_{D(\mathfrak{M}^{p+1}, I^{n-p-1})} d\omega^p$$

ein gewisses, über alle I^{n-p-1} im R^n zu erstreckendes Integral. Man führt gemäß § 2 (3) dies Integral aus, indem man zunächst über alle I^{n-p-1} in einem I^{n-p} integriert. Es ergibt sich nach § 3 (4)

$$(3) \quad \int_{I^{n-p-1}} \int_{D(\mathfrak{M}^{p+1}, I^{n-p-1})} d\omega^p = \int_{I^{n-p-1}} \int_{D(D(\mathfrak{M}^{p+1}, I^{n-p}), I^{n-p-1})} d\omega^p \\ = \int_{D(\mathfrak{M}^{p+1}, I^{n-p})} d\omega^p.$$

Nun ist $D(\mathfrak{M}^{p+1}, I^{n-p})$ eine in einem $(n-p)$ -dimensionalen Raum gelegene Kurve. Man macht die Induktionsvoraussetzung, daß man für alle Räume mit einer Dimension $< n$ den Hauptsatz für Kurvenintegrale

$$(4) \quad \int_{\mathfrak{M}^1} d\omega^0 = \int_{Rd\mathfrak{M}^1} \omega^0$$

bewiesen hätte. In (3) ist $d\omega^p$ in der Tat eine 1-Form im I^{n-p} . Ihr Integral ist wegen (4) und § 3 (3) für $p > 0$

$$(5) \quad \int_{D(\mathfrak{M}^{p+1}, I^{n-p})} d\omega^p = \int_{RdD(\mathfrak{M}^{p+1}, I^{n-p})} \omega^p = \int_{D(Rd\mathfrak{M}^{p+1}, I^{n-p})} \omega^p.$$

Integriert man unser Resultat (5) über alle I^{n-p} , so haben wir gemäß § 2 (3) tatsächlich das Integral (2) berechnet. Wir erhalten

$$\int_{\mathfrak{M}^{p+1}} d\omega^p = \int_{I^{n-p}} \int_{D(Rd\mathfrak{M}^{p+1}, I^{n-p})} \omega^p = \int_{Rd\mathfrak{M}^{p+1}} \omega^p.$$

Damit hat man (1) bewiesen. Den Hauptsatz (4) über Kurvenintegrale in R^n folgert man aus

$$\int_{\mathfrak{M}^2} d\omega^1 = \int_{Rd\mathfrak{M}^2} \omega^1.$$

Man zeigt, daß man jede Kurve \mathfrak{M}^1 durch eine stückweis $(n-1)$ -dimensionale Kurve \mathfrak{S}^1 zu einem $\mathcal{R}^d \mathfrak{M}^2$ ergänzen kann. Wenn dann $\omega^1 = d\omega^0$, so folgt

$$\int_{\mathcal{R}^d \mathfrak{M}^2} d\omega^0 = \int_{\mathfrak{M}^2} d\omega^0 = 0,$$

also wegen Induktionsvoraussetzung über R^{n-1}

$$\int_{\mathfrak{M}^1} d\omega^0 = - \int_{\mathfrak{S}^1} d\omega^0 = - \int_{\mathcal{R}^d \mathfrak{S}^1} \omega^0 = \int_{\mathcal{R}^d \mathfrak{M}^1} \omega^0.$$

Ich will darauf verzichten, den eben angedeuteten Beweis in Einzelheiten in dieser Abhandlung durchzuführen. Statt dessen werde ich ausführlicher diejenigen Fälle der Stokes-Formel besprechen, die sich auf den gewöhnlichen Raum und die Ebene beziehen.

Für $n = 1$ und $p = 0$ ergibt (1)

$$(6) \quad \int_{\mathcal{R}^d \mathfrak{M}^1} \omega^0 = \int_{\mathfrak{M}^1} d\omega^0.$$

Dies ist der *Fundamentalsatz der Integralrechnung*, auf den ich nicht näher einzugehen brauche. Die Integrale existieren z. B., wenn \mathfrak{M}^1 beschränkt und ω^0 totalstetig ist.

In der Ebene ergibt sich für $p = 1$

$$(7) \quad \int_{\mathcal{R}^d \mathfrak{M}^2} \omega^1 = \int_{\mathfrak{M}^2} d\omega^1.$$

Nach § 1 (8) gilt für komplementäre v_1 und v_2

$$d\omega^1 = \sum_{k=1}^2 da_k^{v_1} dx_k^{v_2} - \sum_{k=1}^2 da_k^{v_2} dx_k^{v_1}.$$

Diese Form soll über alle p^0 in \mathfrak{M}^2 integriert werden. Ich betrachte zunächst nur

$$(8) \quad I_1 = \int_{p^0} \sum_{k=1}^2 da_k^{v_1} dx_k^{v_2} = \sum_{k=1}^2 \int_{p^0} da_k^{v_1} dx_k^{v_2}.$$

Dies Integral führe ich aus, indem ich zuerst über alle p^0 auf einer Geraden g^1 von der Richtung v_1 integriere. Wir erhalten wegen (6)

$$(9) \quad \int_{p^0 \subset g^1} da_k^{v_1} dx_k^{v_2} = dx_k^{v_2} \int_{p^0 \subset g^1} da_k^{v_1} = dx_k^{v_2} \int_{D(\mathcal{R}^d \mathfrak{M}^2, g^1)} a_k.$$

Integrieren wir (9) über alle g^1 , so ergibt sich nach § 2 (4) bis auf einen Normierungsfaktor C das Integral in (8)

$$I_1 = C \int_{g^1} \sum_{k=1}^2 dx_k^{v_2} \int_{D(\mathcal{R}^d \mathfrak{M}^2, g^1)} a_k = C \int_{\mathcal{R}^d \mathfrak{M}^2} \omega^1.$$

Ebenso ergibt sich

$$I_2 = - \int_{p^0} \sum_{k=1}^2 da_k^{v_2} dx_k^{v_1} = C \int_{g^1} \sum_{k=1}^2 dx_k^{v_1} \int_{D(\mathcal{R}^d \mathfrak{M}^2, g^1)} a_k = C \int_{\mathcal{R}^d \mathfrak{M}^2} \omega^1.$$

Insgesamt haben wir

$$(10) \quad \int_{\mathfrak{M}^2} d\omega^1 = I_1 + I_2 = 2C \int_{\mathfrak{M}^2} \omega^1.$$

In § 2 haben wir das Geradenmaß nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Wir normieren es jetzt derart, daß $C = \frac{1}{2}$ wird. Dann ergibt sich aus (10) in der Tat die Formel (7).

Ich ziehe aus (7) eine wichtige Folgerung. In § 3 wurde bewiesen, daß jede Kurve \mathfrak{K}^1 im \mathfrak{M}^2 homolog einem Streckenzuge \mathfrak{S}^1 ist. In § 4 habe ich gezeigt, daß unser Integral längs Streckenzügen \mathfrak{S}^1 bis auf einen Faktor denselben Wert hat wie das gewöhnliche alte Kurvenintegral. Nach der eben erfolgten Normierung muß dieser Faktor notwendig 1 sein, weil auch für gewöhnliche Integrale bekanntlich die Stokes-Formel gilt. Setzen wir nun $\omega^1 = d\omega^0$, so folgt aus (7)

$$(11) \quad \int_{\mathfrak{K}^1} d\omega^0 + \int_{\mathfrak{S}^1} d\omega^0 = \int_{\mathfrak{M}^2} d d\omega^0 = 0.$$

Also

$$\int_{\mathfrak{K}^1} d\omega^0 = - \int_{\mathfrak{S}^1} d\omega^0.$$

Nun ist aber

$$\int_{\mathfrak{S}^1} d\omega^0 = \int_{\mathfrak{K}^1} \omega^0 = - \int_{\mathfrak{K}^1} \omega^0.$$

Also

$$\int_{\mathfrak{K}^1} d\omega^0 = \int_{\mathfrak{K}^1} \omega^0.$$

Dies ist aber der *Hauptsatz über Kurvenintegrale* in der Ebene.

Die Existenz des Integrals

$$\int_{\mathfrak{M}^2} d\omega^1$$

in (7) ist gesichert, wenn wir \mathfrak{M}^2 als beschränkt annehmen und die Koeffizienten von ω^1 als differenzierbar voraussetzen. Denn \mathfrak{M}^2 ist sicher meßbar, weil $\mathfrak{K}^1 \mathfrak{M}^2$ das Maß 0 hat. Die Existenz von

$$(12) \quad \int_{\mathfrak{K}^1} \omega^1$$

in (7) folgt z. B. aus dem Fubini-Theorem im Verlaufe des Beweises von (7). Die Existenz von

$$\int_{\mathfrak{K}^1} d\omega^0$$

ergibt sich aus der Existenz von (12), wenn man bedenkt, daß die Existenz von

$$\int_{\mathfrak{S}^1} d\omega^0$$

in (11) selbstverständlich ist. Dabei setzen wir aber die Funktion ω^0 als zweimal stetig differenzierbar voraus. Sonst wäre auch

$$d\omega^0 = 0$$

nicht notwendig richtig.

Wir gehen nun zur Betrachtung des Raumes R^3 über. Die Stokes-Formel für $p = 1$ lautet ganz ähnlich wie (7)

$$(13) \quad \int_{Rd\tilde{B}^2} \omega^1 = \int_{\tilde{B}^2} d\omega^1.$$

Die Existenz des Flächenintegrals auf der rechten Seite von (13) folgt aus dem Existenzsatz in § 4. Wir wollen dies Integral berechnen. Aus § 1 (9) entnehmen wir für $v^2 = \{v_1, v_2\}$

$$d\omega^1 = \sum_{k=1}^3 da_k^{v_1} dx_k^{v_2} - \sum_{k=1}^3 da_k^{v_2} dx_k^{v_1},$$

also nach § 2 (5)

$$(14) \quad \int_{\tilde{B}^2} d\omega^1 = C \int_{e_1^2} \sum_{k=1}^3 dx_k^{v_2} \int_{g^1 \subset e_1^2} \int_{D(\tilde{B}^2, g^1)} da_k^{v_1} - C \int_{e_2^2} \sum_{k=1}^3 dx_k^{v_1} \int_{g^1 \subset e_2^2} \int_{D(\tilde{B}^2, g^1)} da_k^{v_2}.$$

Darin bedeutet g^1 eine Gerade, deren komplementärer 2-Vektor unser v^2 ist. Den zu g^1 gehörigen Vektor nenne ich v_3 . Die Ebene, die g^1 enthält und in ihrer Richtung durch $\{v_3, v_1\}$ bestimmt ist, heißt e_1^2 . Zu e_1^2 ist v_2 komplementär. Diejenige Ebene, welche g^1 enthält, deren Richtung aber durch $\{v_3, v_2\}$ gegeben ist, heißt e_2^2 . Zu e_2^2 ist $-v_1$ komplementär. Offenbar gilt

$$\int_{g^1 \subset e_1^2} \int_{D(\tilde{B}^2, g^1)} da_k^{v_1} = \int_{g^1} \int_{D(\nu(\tilde{B}^2, e_1^2), g^1)} da_k = \int_{D(\tilde{B}^2, e_1^2)} da_k = \int_{RdD(\tilde{B}^2, e_1^2)} a_k = \int_{D(Rd\tilde{B}^2, e_1^2)} a_k$$

und ebenso

$$\int_{g^1 \subset e_2^2} \int_{D(\tilde{B}^2, g^1)} da_k^{v_2} = \int_{D(Rd\tilde{B}^2, e_2^2)} a_k.$$

Folglich

$$(15) \quad \int_{e_1^2} \sum_{k=1}^3 dx_k^{v_2} \int_{g^1 \subset e_1^2} \int_{D(\tilde{B}^2, g^1)} da_k^{v_1} = \int_{e_1^2} \int_{D(Rd\tilde{B}^2, e_1^2)} \omega^1(v_3) = \int_{Rd\tilde{B}^2} \omega^1$$

und

$$(16) \quad \int_{e_2^2} \sum_{k=1}^3 dx_k^{v_1} \int_{g^1 \subset e_2^2} \int_{D(\tilde{B}^2, g^1)} da_k^{v_2} = \int_{e_2^2} \int_{D(Rd\tilde{B}^2, e_2^2)} \omega^1(v_1) = - \int_{Rd\tilde{B}^2} \omega^1.$$

Aus (14), (15), (16) folgt

$$(17) \quad \int_{\tilde{B}^2} d\omega^1 = 2C \int_{Rd\tilde{B}^2} \omega^1.$$

Wir normieren das Ebenenmaß derart, daß $C = \frac{1}{2}$ wird. Dann folgt (13) in der Tat aus (17). Die Existenz des Randintegrals in (13) folgt im Laufe unseres Beweises zwangsläufig aus der Existenz des Flächenintegrals.

Als letztes will ich im Raume die Formel

$$(18) \quad \int_{\mathcal{R}d\mathfrak{B}^3} \omega^3 = \int_{\mathfrak{B}^3} d\omega^3$$

beweisen. Es seien die Funktionen in ω^3 differenzierbar. Dann ist der Koeffizient in $d\omega^3$ integrierbar. Weil \mathfrak{B}^3 einen Rand vom Maße 0 hat, ist \mathfrak{B}^3 meßbar. Wenn \mathfrak{B}^3 außerdem beschränkt ist, so existiert das Raumintegral in (18). Die Existenz des Flächenintegrals folgt entweder zwangsläufig aus der Existenz des Raumintegrals oder aber aus unserem Existenzsatz für Flächenintegrale in § 4.

Unter Benutzung von § 1 (10) folgt

$$(19) \quad \int_{\mathfrak{B}^3} d\omega^3 = \int_{\mathfrak{B}^3} \sum_{i,k=1}^3 da_{ik}^{v_1} \cdot dx_i^{v_1} dx_k^{v_1} + \int_{\mathfrak{B}^3} \sum_{i,k=1}^3 da_{ik}^{v_2} \cdot dx_i^{v_2} dx_k^{v_2} + \int_{\mathfrak{B}^3} \sum_{i,k=1}^3 da_{ik}^{v_3} \cdot dx_i^{v_3} dx_k^{v_3}.$$

Ich berechne nun gemäß § 2 (4) die einzelnen drei Integrale auf der rechten Seite von (19).

$$(20) \quad \int_{\mathfrak{B}^3} \sum_{i,k=1}^3 da_{ik}^{v_j} \cdot dx_i^{v_j} dx_k^{v_j} = C \int_{\mathfrak{g}_j^1} \sum_{i,k=1}^3 dx_i^{v_j} dx_k^{v_j} \int_{p^0 \subset \mathfrak{g}_j^1} da_{ik}^{v_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Darin sei \mathfrak{g}_j^1 eine Gerade von der Richtung v_j . Die zu \mathfrak{g}_1^1 komplementäre Richtung ist v_1^2 , die zu \mathfrak{g}_2^1 komplementäre Richtung aber ist v_2^2 , die zu \mathfrak{g}_3^1 komplementäre Richtung ist v_3^2 . Aus (6) folgt

$$\int_{p^0 \subset \mathfrak{g}_j^1} da_{ik}^{v_j} = \int_{D(\mathfrak{B}^3, \mathfrak{g}_j^1)} da_{ik}^{v_j} = \int_{\mathcal{R}dD(\mathfrak{B}^3, \mathfrak{g}_j^1)} a_{ik} = \int_{D(\mathcal{R}d\mathfrak{B}^3, \mathfrak{g}_j^1)} a_{ik}.$$

Setzen wir dies in (20) ein, so ergibt sich

$$\int_{\mathfrak{B}^3} \sum_{i,k=1}^3 da_{ik}^{v_j} \cdot dx_i^{v_j} dx_k^{v_j} = C \int_{\mathfrak{g}_j^1} \sum_{i,k=1}^3 dx_i^{v_j} dx_k^{v_j} \int_{D(\mathcal{R}d\mathfrak{B}^3, \mathfrak{g}_j^1)} a_{ik} = C \int_{\mathcal{R}d\mathfrak{B}^3} \omega^3.$$

Für (19) erhalten wir somit

$$(21) \quad \int_{\mathfrak{B}^3} d\omega^3 = 3C \int_{\mathcal{R}d\mathfrak{B}^3} \omega^3.$$

Wir haben das Geradenmaß in der Ebene normiert, nicht aber das Geradenmaß im Raume. Wir setzen nun fest, daß das räumliche Geradenmaß so normiert werden soll, daß $C = \frac{1}{2}$ wird. Dann ergibt (21) in der Tat die Formel (18).

Man pflegt in den Lehrbüchern der Analysis im allgemeinen andere Bezeichnungen zu verwenden. Führt man etwa die in § 1 (3) genannten Zeichen ein, so kann man (7) auf folgende Weise schreiben:

$$\int_{R d\mathfrak{M}^2} \mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \int_{\mathfrak{M}^2} \operatorname{rot} \mathfrak{A} d\mathfrak{f}.$$

Diese Formel für ebene Mengen \mathfrak{M}^2 wird die *Integralformel von Green* genannt. Im Raume kann man die Abkürzungen aus § 1 (6) benutzen. Dann schreiben sich die Formeln (13) und (18) folgendermaßen:

$$(22) \quad \int_{R d\mathfrak{S}^2} \mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \int_{\mathfrak{S}^2} \operatorname{rot} \mathfrak{A} d\mathfrak{f}$$

und

$$(23) \quad \int_{R d\mathfrak{U}^3} \mathfrak{A} d\mathfrak{f} = \int_{\mathfrak{U}^3} \operatorname{div} \mathfrak{A} dv.$$

Man nennt (23) die *Formel von Gauß*, und (22) ist die *Formel von Stokes*. Die allgemeine Stokes-Formel (1) wird als Verallgemeinerung dieser speziellen räumlichen Stokes-Formel aufgefaßt.

(Eingegangen am 26. 10. 1938.)

Über die Multiplizität der Schnittpunkte von Hyperflächen.

Von

Wei-Liang Chow in Shanghai (China).

Wir werden hier einen einfachen rein-algebraischen Beweis für den folgenden Satz bringen:

n Hyperflächen F_i im n -dimensionalen projektiven Raume schneiden sich in einem Punkt ξ , der für die Hyperflächen F_i bzw. s_i -fach ist, im allgemeinen Πs_i -fach; die Schnittmultiplizität wird dann und nur dann größer, wenn die Hyperflächen F_i in ξ eine gemeinsame Tangente besitzen.

Der Beweis, der, dem rein algebraischen Standpunkt gemäß, auf der van der Waerdenschen Multiplizitätstheorie beruht¹⁾, bildet eine einfache Anwendung von dem Prinzip der Erhaltung der Anzahl. Die zur Anwendung dieses Prinzips nötigen Betrachtungen werden hier durch zwei allgemeinere Sätze A und B über Schnittmultiplizität geliefert. Diese Sätze über Schnittmultiplizität sind Verallgemeinerungen eines Satzes über die Einfachheit der Schnittmultiplizität von Herrn van der Waerden²⁾, und sie lassen sich auch mit einer ähnlichen Methode beweisen.

A. Wenn bei einer relationstreuen Spezialisierung der Schnittpunkte der Hyperflächen $G_i(\lambda, x) = 0$ für $\lambda \rightarrow \mu$ zwei Schnittpunkte $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ in einen Schnittpunkt η der spezialisierten Hyperflächen $G_i(\mu, x) = 0$ hineinrücken und wenn der Punkt $\xi^{(1)}$ bzw. s_i -fach für die Hyperflächen $G_i(\lambda, x) = 0$ ist, so haben die Polaren s_i -ter Ordnung von $G_i(\mu, x) = 0$ in bezug auf η eine gemeinsame Erzeugende.

B. Wenn bei einer relationstreuen Spezialisierung der Schnittpunkte der Hyperflächen $G_i(\lambda, x) = 0$ für $\lambda \rightarrow \mu$ zwei Schnittpunkte $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ in einen Schnittpunkt η der spezialisierten Hyperflächen $G_i(\mu, x) = 0$ hineinrücken und wenn die Hyperflächen $G_i(\lambda, x) = 0$ in $\xi^{(1)}$ bzw. s_i -fach sind und dort eine gemeinsame Tangente besitzen, so haben entweder die Polaren s_i -ter Ordnung von $G_i(\mu, x) = 0$ in bezug auf η zwei gemeinsame Erzeugende, oder es gelten gewisse Relationen R, die wir nachher angeben werden.

¹⁾ B. L. van der Waerden, Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie, Math. Annalen 97 (1927), S. 756—774.

²⁾ B. L. van der Waerden, Zur algebraischen Geometrie V, Math. Annalen 110 (1934), S. 128—133.

Beweis von A. Der Beweis lautet fast wörtlich genau so wie bei van der Waerden²⁾, nur werden hier statt der Tangentialhyperebenen die Tangentialkegel (die Polaren s_i -ter Ordnung) betrachtet. Wir können $\xi_0^{(1)} = \xi_0^{(2)} = \eta_0 = 1$ annehmen. Die Verbindungslinie von $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ schneide die Hyperebene $x_0 = 0$ in einem Punkt τ , der bei der relationstreuen Spezialisierung $(\lambda, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \rightarrow (\mu, \eta, \eta)$ in den Punkt ω hineinrücken möge. Wir können $\tau_1 = \omega_1 = 1$ annehmen, dann ist $\xi^{(2)} = \xi^{(1)} + (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}) \tau$. Entwickeln wir nun $G_i(\lambda, \xi^{(2)}) = G_i(\lambda, \xi^{(1)} + (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}) \tau)$ nach den Potenzen von $(\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)})$, so haben wir

$$G_i(\lambda, \xi^{(2)}) = (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)})^i H_{s_i}(\lambda; \xi^{(1)}, \tau) + (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)})^{i+1} H_{s_{i+1}}(\lambda; \xi^{(1)}, \tau) + \dots = 0$$

oder, durch $(\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)})^i$ dividiert,

$$H_{s_i}(\lambda; \xi^{(1)}, \tau) + (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}) [H_{s_{i+1}}(\lambda; \xi^{(1)}, \tau) + \dots] = 0.$$

Machen wir diese Gleichungen durch Einführung von $\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \tau_1$ homogen, machen dann den Übergang $(\lambda, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \tau) \rightarrow (\mu, \eta, \eta, \omega)$ und setzen dann wieder $\eta_0 = \omega_1 = 1$, so bekommen wir

$$H_{s_i}(\mu; \eta, \omega) = 0.$$

Daraus folgt, wie man leicht einsieht, daß die $H_{s_i}(\mu; \eta, x) = 0$ die Verbindungslinie $\overline{\eta\omega}$ von η und ω enthalten.

Beweis von B. Wir können $\eta_0 = \xi_0^{(1)} = \xi_0^{(2)} = 1$ annehmen. Die gemeinsame Tangente von $G_i(\lambda, x) = 0$ schneide die Hyperebene $x_0 = 0$ in einem Punkt σ , der bei der relationstreuen Spezialisierung $(\lambda, \xi^{(1)}) \rightarrow (\mu, \eta)$ in ω' hineinrücken möge, wobei wir $\sigma_1 = \omega'_1 = 1$ annehmen können. Es gelten dann offenbar $H_{s_i}(\mu; \eta, \omega') = 0$. Die Verbindungslinie von $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ schneide die Hyperebene $x_0 = 0$ in τ , der bei der relationstreuen Spezialisierung $(\lambda, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \rightarrow (\mu, \eta, \eta)$ in ω hineinrücken möge. Aus A folgt dann $H_{s_i}(\mu; \eta, \omega) = 0$. Ist $\omega \neq \omega'$, so haben die Polaren $H_{s_i}(\mu; \eta, x) = 0$ zwei Erzeugende $\overline{\eta\omega}, \overline{\eta\omega'}$ gemeinsam. Es sei nun $\omega = \omega'$. Wir können dann $\tau_1 = \omega_1 = 1$ und folglich $\xi^{(2)} = \xi^{(1)} + (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}) \tau$ setzen. Daraus folgt wie bei A

$$(1) \quad H_{s_i}(\lambda; \xi^{(1)}, \tau) + (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}) H_{s_{i+1}}(\lambda; \xi^{(1)}, \tau) + \dots = 0.$$

Die Verbindungslinie von σ und τ möge nun die Hyperebene $x_1 = 0$ in einem Punkt ϱ schneiden, der bei der relationstreuen Spezialisierung $(\lambda, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \tau, \sigma) \rightarrow (\mu, \eta, \eta, \omega, \omega)$ in π hineinrücke, wobei wir $\varrho_2 = \pi_2 = 1$ annehmen können. Wir haben dann

$$(2) \quad \tau = \sigma + (\tau_2 - \sigma_2) \varrho.$$

Die Gleichung

$$\alpha(\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}) - \beta(\tau_2 - \sigma_2) \\ \equiv \alpha \tau_1 \omega_1 (\xi_1^{(2)} \xi_0^{(1)} - \xi_1^{(1)} \xi_0^{(2)}) - \beta \xi_0^{(1)} \xi_0^{(2)} (\tau_2 \sigma_1 - \tau_1 \sigma_2) = 0$$

definiert ein Elementenpaar (α, β) , das bei der relationstreuen Spezialisierung $(\lambda, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \tau, \sigma) \rightarrow (\mu, \eta, \eta, \omega, \omega)$ in das Paar A, B hineinrücken möge, wobei A, B nicht beide verschwinden können. Falls $A \neq 0$ ist, dann können wir $A = \alpha = 1$ setzen, und wir haben

$$(3) \quad \xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)} = \beta(\tau_2 - \sigma_2).$$

Setzen wir nun (2) und (3) in (1) ein und entwickeln die $H(\lambda; \xi^{(1)}, \tau)$ nach den Potenzen von $(\tau_2 - \sigma_2)$, so haben wir (da $H_{s_i}(\lambda; \xi^{(1)}, \sigma) = 0$)

$$(\tau_2 - \sigma_2) \sum_j \varrho_j \partial_j H_{s_i}(\lambda; \xi^{(1)}, \sigma) + (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}) H_{s_i+1}(\lambda; \xi^{(1)}, \sigma) \\ + (\tau_2 - \sigma_2)^2 (\dots) + (\tau_2 - \sigma_2) (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}) (\dots) + (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)})^2 (\dots) \\ = (\tau_2 - \sigma_2) \left[\sum_j \varrho_j \partial_j H_{s_i}(\lambda; \xi^{(1)}, \sigma) + \beta H_{s_i+1}(\lambda; \xi^{(1)}, \sigma) \right] \\ + (\tau_2 - \sigma_2)^2 (\dots) = 0$$

oder, dividiert durch $(\tau_2 - \sigma_2)$,

$$(4) \quad \sum_j \varrho_j \partial_j H_{s_i}(\lambda; \xi^{(1)}, \sigma) + \beta H_{s_i+1}(\lambda; \xi^{(1)}, \sigma) + (\tau_2 - \sigma_2) (\dots) = 0.$$

Machen wir nun (4) durch Einführung von $\xi_0^{(1)}, \sigma_1, \tau_1, \varrho_2, \alpha$ homogen, machen dann den Übergang $(\lambda, \xi^{(1)}, \tau, \sigma, \varrho, \alpha, \beta) \rightarrow (\mu, \eta, \omega, \omega, \pi, A, B)$ und setzen dann wieder $\eta_0 = \omega_1 = \pi_1 = 1$, so haben wir die Relationen

$$(R) \quad A \sum_{j=2}^n \pi_j \partial_j H_{s_i}(\mu; \eta, \omega) + B H_{s_i+1}(\mu; \eta, \omega) = 0,$$

die dadurch, daß wir den Koeffizienten A beibehalten haben, auch für den Fall $A = 0$ gelten, wie man sich in ähnlicher Weise wie oben überzeugt.

Beweis des Satzes. Zunächst wenden wir A auf n allgemeine Hyperflächen $F_i(\lambda, x)$ der Ordnung n_i an, die bzw. s_i -fach durch einen festen Punkt η gehen. Für die Spezialisierung $\lambda \rightarrow \mu$ sollen diejenigen Hyperflächen $F_i(\mu, x)$ entstehen, die bzw. aus s_i allgemeinen durch η gehenden Hyperebenen und $n_i - s_i$ allgemeinen Hyperebenen bestehen. Da die $F_i(\mu, x)$ offenbar in η einen Πs_i -fachen Schnittpunkt haben und dort keine gemeinsame Tangente besitzen, so müssen sich die Hyperflächen $F_i(\lambda, x)$ auch Πs_i -fach in η schneiden. Damit ist der erste Teil des Satzes schon bewiesen. Daß die Schnittmultiplizität nur dann größer sein kann, wenn eine gemeinsame Tangente vorhanden ist, folgt wieder unmittelbar aus A. Daß dann auch tatsächlich eine größere Schnittmultiplizität auftritt, läßt sich so schließen. Wir wenden B auf n allgemeine Hyperflächen $F_i(\lambda, x)$ der Ordnung n_i an, die bzw. s_i -fach durch einen festen Punkt η , etwa den Punkt $(1, 0, \dots, 0)$, gehen und dort eine

festen Tangente in der Richtung des Punktes ω , etwa des Punktes $(0, 1, 0, \dots, 0)$, besitzen. Als spezialisierte Hyperflächen $F_i(\mu, x)$ nehmen wir nun die folgenden: $F_1(\mu, x)$ besteht aus einer allgemeinen quadratischen Hyperfläche $\sum a_{s,i} x_s x_i = 0$, die durch η (aber nicht durch ω) geht und dort eine Tangente in der Richtung ω besitzt (d. h. $\sum a_{s,i} \eta_s \eta_i = \sum a_{s,i} \eta_s \omega_i = 0$, also $a_{00} = a_{01} = a_{10} = 0$, die sonstigen $a_{s,i}$ sind allgemein), und $s_1 - 1$ allgemein durch η gehenden Hyperebenen und $n_1 - s_1$ allgemeinen Hyperebenen; die anderen $F_i(\mu, x)$ ($i = 2, 3, \dots, n$) bestehen bzw. aus einer allgemeinen durch η, ω gehenden Hyperebene $\sum b_s^{(i)} x_s = 0$ (d. h. $\sum b_s^{(i)} \eta_s = \sum b_s^{(i)} \omega_s = 0$, also $b_0^{(i)} = b_1^{(i)} = 0$, die sonstigen $b_s^{(i)}$ sind allgemein), $s_i - 1$ allgemeinen durch η gehenden Hyperebenen und $n_i - s_i$ allgemeinen Hyperebenen³⁾.

Die Relationen R lauten dann

$$2(s_i + 1)A \sum a_{s,i} \eta_s \pi_i + B \sum a_{s,i} \omega_s \omega_i = 2(s_i + 1)A \sum a_{1,i} \pi_i + B a_{11} = 0,$$

$$A \sum b_s^{(i)} \pi_s = A(b_2^{(i)} \pi_2 + \dots + b_n^{(i)} \pi_n) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A \sum b_s^{(n)} \pi_s = A(b_2^{(n)} \pi_2 + \dots + b_n^{(n)} \pi_n) = 0.$$

Da die Determinante $|b_s^{(i)}|$ ($i, s = 2, 3, \dots, n$) nicht verschwindet (denn die $b_s^{(i)}$ sind ja alle Unbestimmte) und die π_s nicht alle Null sind, so muß $A = 0$ sein, woraus folgt $B a_{11} = 0$, also $B = 0$ (da a_{11} Unbestimmt ist), in Widerspruch zu der Annahme, daß A, B nicht beide Null sind. Also können die Relationen R nicht bestehen, woraus folgt, daß die $F_i(\lambda, x)$ sich in η mit derselben Multiplizität schneiden wie die $F_i(\mu, x)$. Daß die $F_i(\mu, x)$ nun tatsächlich in η einen $(II s_i + 1)$ -fachen Schnittpunkt haben, läßt sich leicht direkt ausrechnen. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

³⁾ Der Fall $n_i = s_i$ für alle i , der hier ausgeschlossen ist, läßt sich sehr leicht erledigen. In der Tat sind in diesem Falle alle Hyperflächen $F_i(\lambda, x)$ Kegel mit der Spitze in η . Haben sie eine gemeinsame Tangente in η , so enthalten sie alle diese Gerade, sie haben also dann unendlichviele gemeinsame Schnittpunkte.

Über periodische Bewegungen des n -fachen Pendels in der Ebene.

Von

G. Bradistilov in Sofia (Bulgarien).

§ 1.

Einleitung.

In einer früheren Arbeit¹⁾ habe ich ein System von n aneinanderhängenden, um parallele Achsen drehbare Pendel betrachtet und die Existenz von n Scharen periodischer Bewegungen um die stabile Gleichgewichtslage nachgewiesen. In der vorliegenden Arbeit will ich ergänzend zeigen, daß es in einer gewissen Umgebung der stabilen Gleichgewichtslage keine anderen periodischen Bewegungen als die aufgezeigten gibt.

Ich brauche die folgenden Formeln und Ergebnisse der früheren Arbeit. Wird ein kleiner Parameter λ eingeführt und der Drehwinkel um die $(\nu - 1)$ -te Drehachse mit $\lambda \psi_\nu$ bezeichnet ($\nu = 1, \dots, n$), so lauten das Integral der lebendigen Kraft und die Bewegungsgleichungen:

$$(1) \quad \sum_{\nu=1}^n \left[2 B_\nu \lambda^2 \psi'_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \cos \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi'_k + \lambda^2 (A_\nu + J_\nu) \psi_\nu'^2 \right] = 2g \sum_{k=1}^n B_k \cos \lambda \psi_\nu + h$$

und

$$(2) \quad B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k [\cos \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi''_k + \lambda \sin \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi'_k] + (A_\nu + J_\nu) \psi''_\nu + b_\nu \sum_{k=\nu+1}^n B_k [\cos \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi''_k + \lambda \sin \lambda (\psi_\nu - \psi_k) \cdot \psi'_k] = -g B_\nu \psi_\nu + \lambda g B_\nu \sum_{\mu=2}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{\lambda^{2\mu-2} \psi_\nu^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}.$$

[Wegen der Bedeutung der positiven Konstanten $a_\nu, b_\nu, A_\nu, B_\nu$, vgl. die zitierte Arbeit S. 181–182].

Für $\lambda = 0$ ist das allgemeine Integral des Gleichungssystems (2) folgendes:

$$(3) \quad \begin{cases} \psi_\nu = \sum_{\mu=1}^n L_{\nu\mu} (C_\mu \cos \varrho_\mu t + D_\mu \sin \varrho_\mu t), \\ \psi'_\nu = \sum_{\mu=1}^n L_{\nu\mu} (-C_\mu \varrho_\mu \sin \varrho_\mu t + D_\mu \varrho_\mu \cos \varrho_\mu t) \end{cases} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

¹⁾ Über periodische und asymptotische Lösungen beim n -fachen Pendel in der Ebene, Math. Annalen 116 (1938), S. 181–201.

wobei $i \varrho_\mu$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$(4) \quad \begin{vmatrix} (A_1 + J_1) \varrho^2 + g B_1 & b_1 B_2 \varrho^2 & \dots & b_1 B_n \varrho^2 \\ b_1 B_n \varrho^2 & (A_2 + J_2) \varrho^2 + g B_2 & \dots & b_2 B_n \varrho^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 B_n \varrho^2 & b_2 B_n \varrho^2 & \dots & (A_n + J_n) \varrho^2 + g B_n \end{vmatrix} = 0$$

sind (die als voneinander verschieden angenommen werden) und $L_{\nu\mu}$ dem Gleichungssystem

$$(5) \quad B_\nu \varrho_\mu^2 \sum_{k=1}^{v-1} b_k L_{k\mu} + [(A_\nu + J_\nu) \varrho_\mu^2 - g B_\nu] L_{\nu\mu} + b_\nu \varrho_\mu^2 \sum_{k=\nu+1}^n B_k L_{k\mu} = 0$$

$$(\nu = 1, \dots, n)$$

genügen. Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden.

Ich konnte nun zeigen, daß in hinreichender Nähe der stabilen Gleichgewichtslage, d. h. für genügend kleine λ , jeder Wurzel der charakteristischen Gleichung, z. B. ϱ_1 , und den Anfangswerten

$$(6) \quad \begin{cases} \psi_\nu(0) = 0, \\ \psi'_\nu(0) = L_{\nu 1} \varrho_1 + \sum_{\mu=2}^n L_{\nu\mu} \varrho_\mu \alpha_\mu \end{cases} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

ein Integral des Systems (2) entspricht, das eine periodische Funktion mit der Periode $\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}$ darstellt, wenn δ und $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ dem Gleichungssystem genügen:

$$(7) \quad -L_{\nu 1} \delta + \sum_{\mu=2}^n L_{\nu\mu} \alpha_\mu \sin \frac{\pi \varrho_\mu}{\varrho_1} + f_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

wo f_ν Potenzentwicklungen nach $\lambda, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta$ darstellen. Dieses System ist aber immer lösbar, wenn kein ϱ_μ ($\mu = 2, \dots, n$) ein Vielfaches von ϱ_1 ist.

In dieser Arbeit soll nachgewiesen werden, daß es unter der gleichen Voraussetzung über die ϱ in hinreichender Nähe der stabilen Gleichgewichtslage keine anderen periodischen Lösungen gibt als die genannten.

§ 2.

Beweis.

Wir betrachten eine ganz beliebige Lösung von (2). Ihre Anfangswerte können wegen $\Delta \neq 0$ immer in der Form angenommen werden:

$$(8) \quad \begin{cases} \psi_\nu(0) = \sum_{\mu=1}^n L_{\nu\mu} \beta_\mu, \\ \psi'_\nu(0) = \sum_{\mu=1}^n L_{\nu\mu} \varrho_\mu \alpha_\mu \end{cases} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

wobei die β_μ und α_μ weiterhin bestimmt werden. Diese Lösung hat die Form

$$(9) \quad \begin{cases} \psi_r = \psi_r(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n; \lambda), \\ \psi'_r = \psi'_r(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n; \lambda) \end{cases} \quad (v = 1, \dots, n).$$

Nach (3) ist speziell für $\lambda = 0$

$$(10) \quad \begin{cases} \psi_r(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n; 0) = \sum_{\mu=1}^n L_{r\mu} (\beta_\mu \cos \varrho_\mu t + \alpha_\mu \sin \varrho_\mu t), \\ \psi'_r(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n; 0) = \sum_{\mu=1}^n L_{r\mu} (-\beta_\mu \varrho_\mu \sin \varrho_\mu t + \alpha_\mu \varrho_\mu \cos \varrho_\mu t). \end{cases}$$

Hier ist die Periode $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ dann und nur dann vorhanden, wenn $\beta_2 = \dots = \beta_n = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, während α_1, β_1 willkürlich sein dürfen. Aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man, da man eine periodische Bewegung an jeder Stelle der Bahn beginnen lassen kann, $\beta_1 = 0$ annehmen. Weiterhin darf $\alpha_1 = 1$ angenommen werden, weil in der Lösung $\varphi_r = \lambda \psi_r$ eine andere Wahl von α_1 durch eine andere Wahl des Parameters λ ausgedrückt wird. Damit gehen die Gleichungen (10) über in:

$$(11) \quad \begin{cases} \psi_r(t; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; 0) \\ \quad = L_{r1} \sin \varrho_1 t + \sum_{\mu=2}^n L_{r\mu} (\beta_\mu \cos \varrho_\mu t + \alpha_\mu \sin \varrho_\mu t), \\ \psi'_r(t; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; 0) \\ \quad = L_{r1} \varrho_1 \cos \varrho_1 t + \sum_{\mu=2}^n L_{r\mu} (-\beta_\mu \varrho_\mu \sin \varrho_\mu t + \alpha_\mu \varrho_\mu \cos \varrho_\mu t), \end{cases}$$

und die rechten Seiten des Integrals (9) lassen sich nach Poincaré bekanntlich in Potenzreihen in bezug auf $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_n, \lambda$ entwickeln, sofern $|\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|$ und $|\beta_2|, \dots, |\beta_n|$ hinreichend klein sind.

Das Integral (9) wird die modifizierte Periode $\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}$ haben, wenn

$$\begin{aligned} \psi_r\left(t + \frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda\right) &= \psi_r(t; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda), \\ \psi'_r\left(t + \frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda\right) &= \psi'_r(t; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda) \\ &\quad (v = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

ist. Diese Gleichungen sind aber bereits von selbst erfüllt, wenn nur

$$(12) \quad \begin{cases} \psi_v \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \psi_v(0; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda), \\ \psi'_v \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \psi'_v(0; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda), \end{cases}$$

da ja t nicht explizit in (2) vorkommt.

Nun werden wir zeigen, daß, wenn $2n - 1$ beliebige Gleichungen des Systems (12), z. B.

$$(13) \quad \begin{cases} \psi_v \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \psi_v(0; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda), \\ \psi'_k \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \psi'_k(0; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda) \\ \qquad \qquad \qquad (v = 1, \dots, n; k = 1, \dots, q-1, q+1, \dots, n) \end{cases}$$

erfüllt sind, auch die restliche Gleichung

$$(14) \quad \begin{aligned} \psi'_q \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1}; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda \right) \\ = \psi'_q(0; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda) \end{aligned}$$

von selbst erfüllt ist.

Dazu wollen wir

$$\begin{aligned} \psi_v(t; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda), \\ \psi'_v(t; 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \beta_2, \dots, \beta_n; \lambda) \end{aligned} \quad (v = 1, \dots, n)$$

entsprechend mit

$$\psi_v(t) \text{ und } \psi'_v(t)$$

bezeichnen. Indem wir ψ_v und ψ'_v in (1) zuerst durch $\psi_v \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right)$ und $\psi'_v \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right)$, dann durch $\psi_v(0)$ und $\psi'_v(0)$ ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^n \left\{ 2B_v \lambda^3 \psi'_v \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right) \sum_{k=1}^{v-1} b_k \cos \lambda \left[\psi_v \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \psi_k \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right) \right] \psi'_k \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right) + \lambda^3 (A_v + J_v) \psi_v'^2 \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right) \right\} \\ = 2g \sum_{v=1}^n B_v \cos \lambda \psi_v \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right) + h, \end{aligned}$$

und

$$\sum_{v=1}^n \left\{ 2 B_v \lambda^2 \psi'_v(0) \sum_{k=1}^{v-1} b_k \cos \lambda [\psi_v(0) - \psi_k(0)] \psi'_k(0) + \lambda^2 (A_v + J_v) \psi_v''(0) \right\} \\ = 2g \sum_{v=1}^n B_v \cos \lambda \psi_v(0) + h.$$

Durch Subtraktion der beiden Identitäten und durch Berücksichtigung von (13) finden wir

$$\left[\psi_q' \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right) - \psi_q'(0) \right] \left\{ 2 B_q \sum_{k=1}^{q-1} b_k \cos \lambda [\psi_q(0) - \psi_k(0)] \psi'_k(0) \right. \\ \left. + (A_q + J_q) \left[\psi_q' \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right) + \psi_q'(0) \right] + 2b_q \sum_{k=q+1}^n B_k \cos \lambda [\psi_q(0) - \psi_k(0)] \psi'_k(0) \right\} = 0.$$

Diese Identität ist nur dann erfüllt, wenn

$$\psi_q' \left(\frac{2\pi + 2\delta}{\varrho_1} \right) - \psi_q'(0) = 0,$$

weil der Ausdruck in der geschweiften Klammer für kleine Werte von λ ; $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_n$; δ nahezu gleich

$$2 \left[B_q \sum_{k=1}^{q-1} b_k \psi'_k(0) + (A_q + J_q) \psi'_q(0) + b_q \sum_{k=q+1}^n \psi'_k(0) \right]_{\lambda=0} \\ = 2\varrho_1 \left[B_q \sum_{k=1}^{q-1} b_k L_{k1} + (A_q + J_q) L_{q1} + b_q \sum_{k=q+1}^n B_k L_{k1} \right] = 2g \frac{B_q L_{q1}}{\varrho_1},$$

also verschieden von Null ist, da wir, ohne dadurch die Allgemeinheit der Betrachtung zu beschränken, annehmen können, daß L_{q1} und die Unterdeterminante Δ_{q1} von Null verschieden sind, weil $\Delta \neq 0$.

Damit ist gezeigt, daß die Gleichung (14) eine Folge von (13) ist. Es handelt sich nun noch darum zu zeigen, daß aus den $2n - 1$ Gleichungen (13) die $2n - 1$ Unbekannten $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_n, \delta$ sich eindeutig als Funktionen von λ bestimmen lassen.

Setzen wir $\omega_\mu = \frac{\varrho_\mu}{\varrho_1} \pi$, so werden die Potenzentwicklungen nach δ ; $\alpha_2, \dots, \alpha_n$; β_2, \dots, β_n ; λ der Gleichungen (13) mit Rücksicht auf (11) die folgenden sein:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} 2L_{v1} \delta + \sum_{\mu=2}^n L_{v\mu} [\sin 2\omega_\mu \cdot \alpha_\mu + (\cos 2\omega_\mu - 1)\beta_\mu] + f_v &= 0, \\ \sum_{\mu=2}^n L_{k\mu} \varrho_\mu [(\cos 2\omega_\mu - 1)\alpha_\mu - \sin 2\omega_\mu \cdot \beta_\mu] + F_k &= 0 \\ (v = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, q-1, q+1, \dots, n), \end{aligned} \right.$$

wo I_r und F_k Potenzentwicklungen nach λ , $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_n, \delta$ darstellen. In I_r und F_k sind diejenigen Glieder, die den Faktor λ nicht enthalten, wenigstens von zweiter Dimension.

Nun haben die Gleichungen (15) für $\lambda = 0$ die Lösung $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = \beta_2 = \dots = \beta_n = \delta = 0$. Um ihre Lösbarkeit für kleine Werte von λ sicherzustellen, müssen wir ihre Funktionaldeterminante nach $\delta, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_n$ für das Wertesystem $\delta = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ berechnen. Diese ist gleich

$$\begin{array}{ccccccc} \phi = 2 & L_{11} & L_{12} \sin 2\omega_2 & \dots & L_{1n} \sin 2\omega_n & L_{12} (\cos 2\omega_2 - 1) & \dots & L_{1n} (\cos 2\omega_n - 1) \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & L_{n1} & L_{n2} \sin 2\omega_2 & \dots & L_{nn} \sin 2\omega_n & L_{n2} (\cos 2\omega_2 - 1) & \dots & L_{nn} (\cos 2\omega_n - 1) \\ & 0 & L_{12} \varrho_2 (\cos 2\omega_2 - 1) & \dots & L_{1n} \varrho_n (\cos 2\omega_n - 1) & -L_{12} \varrho_2 \sin 2\omega_2 & \dots & -L_{1n} \sin 2\omega_n \\ & 0 & L_{n2} \varrho_2 (\cos 2\omega_2 - 1) & \dots & L_{nn} \varrho_n (\cos 2\omega_n - 1) & -L_{n2} \varrho_2 \sin 2\omega_2 & \dots & -L_{nn} \varrho_n \sin 2\omega_n \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{ccccccc} 2^{2n-1} \sin^2 \omega_2 \dots \sin^2 \omega_n & L_{11} & -L_{12} \cos \omega_2 & \dots & -L_{1n} \cos \omega_n & L_{12} \sin \omega_2 & \dots & L_{1n} \sin \omega_n \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & L_{n1} & -L_{n2} \cos \omega_2 & \dots & -L_{nn} \cos \omega_n & L_{n2} \sin \omega_2 & \dots & L_{nn} \sin \omega_n \\ & 0 & L_{12} \varrho_2 \sin \omega_2 & \dots & L_{1n} \varrho_n \sin \omega_n & L_{12} \varrho_2 \cos \omega_2 & \dots & L_{1n} \varrho_n \cos \omega_n \\ & 0 & L_{n2} \varrho_2 \sin \omega_n & \dots & L_{nn} \varrho_n \sin \omega_n & L_{n2} \varrho_2 \cos \omega_2 & \dots & L_{nn} \varrho_n \cos 2\omega_n \end{array}$$

wobei die $(n + q)$ -te Zeile fehlt. Durch Quadrieren der letzten Determinante, wobei die Multiplikation zeilenweise durchgeführt wird, erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n L_{1k}^2 & \dots & \sum_{k=1}^n L_{1k} L_{nk} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n L_{1k} L_{nk} & \dots & \sum_{k=1}^n L_{nk}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{k=2}^n \varrho_k^2 L_{1k}^2 & \dots & \sum_{k=2}^n \varrho_k^2 L_{1k} L_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{k=2}^n \varrho_k^2 L_{1k} L_{nk} & \dots & \sum_{k=2}^n \varrho_k^2 L_{nk}^2 \end{vmatrix}.$$

Genau die gleiche Determinante erhält man auch, wenn man das folgende Produkt quadriert:

$$\varrho_2 \dots \varrho_n \begin{vmatrix} L_{12} \dots L_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ L_{n2} \dots L_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_{11} \dots L_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ L_{n1} \dots L_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei die q -te Zeile der ersten Determinante fehlt. Daher ist der Wert der Funktionaldeterminante folgender:

$$\Phi = 2^{2n-1} \varrho_2 \dots \varrho_n \sin^2 \omega_2 \dots \sin^2 \omega_n \Delta_{q1}, \Delta.$$

Dieser Wert ist von Null verschieden, wenn

$$(16) \quad \sin \omega_2 \dots \sin \omega_n \neq 0,$$

d. h. wenn $\omega_2, \dots, \omega_n$ keine Multipla von π , bzw. $\varrho_2, \dots, \varrho_n$ keine Multipla von ϱ_1 sind. Das sind also hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Schar periodischer Lösungen existiert, deren Periode annähernd gleich $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ ist.

Durch Ersetzen von ϱ_1 durch $\varrho_2, \dots, \varrho_n$ erhalten wir weitere $n - 1$ Lösungsscharen, die ebenfalls von nur einem Parameter abhängen. Daraus folgt, daß andere periodische Lösungen des Gleichungssystems (2) als die so gefundenen in der Nähe von $\lambda = 0$ nicht existieren können, vorausgesetzt, daß keine der Zahlen $\frac{\varrho_\mu}{\varrho_\nu}$ ganzzahlig ist.

Die Bedingungen (16) sind dieselben wie diejenigen für die Lösbarkeit des Systems (7). Daraus folgt, daß für beide Systeme (7) und (15) bei gleichen Bedingungen Lösungen existieren.

Da die nachgewiesenen periodischen Lösungen des Systems (2), deren Perioden annähernd gleich $\frac{2\pi}{\varrho_1}, \dots, \frac{2\pi}{\varrho_n}$ sind, die einzigen in der Nähe der stabilen Gleichgewichtslage sind, so müssen die Werte $\delta, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, welche dem Gleichungssystem (7) genügen, auch den Gleichungen (15) genügen, weil es für diese Werte ebenfalls periodische Lösungen gibt. Aber dies ist nur dann möglich, wenn

$$\beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

sind.

Wir haben damit nachgewiesen, daß es *wirklich in hinreichender Nähe der stabilen Gleichgewichtslage keine anderen periodischen Lösungen gibt außer denen, bei welchen das Pendelsystem zweimal durch die stabile Gleichgewichtslage geht, vorausgesetzt, dass keine der Zahlen $\frac{\varrho_n}{\varrho_r}$ ganzzahlig ist.*

(Eingegangen am 15. 9. 1938.)

Über einige Eigenschaften der symmetrischen Funktionen $S(\alpha_n, k)$.

Von

Chr. Foussianis in Leipzig.

Es sei eine geordnete Reihe von n Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gegeben. Wir bezeichnen durch das Symbol

$$S(\alpha_n, k)$$

die Summe

$$\sum \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_n^{p_n} \quad (p_1 + \dots + p_n = k),$$

wobei die Zahlen p ganz und positiv oder Null sind. Offenbar ist

$$(1) \quad S(\alpha_n, k) = S(\alpha_{n-1}, k) + \alpha_n S(\alpha_n, k-1),$$

und hieraus ergibt sich für $n = 1, 2, \dots, n$

$$(2) \quad S(\alpha_n, k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i S(\alpha_i, k-1).$$

Wir betrachten die Determinante

$$\Delta_p^m = |S(\alpha_{n-p}, k_s - m) S(\alpha_n, k_s - 1) \dots S(\alpha_n, k_s - \lambda)|$$

mit $\lambda + 1$ Zeilen, die den $\lambda + 1$ Werten $1, 2, \dots, (\lambda + 1)$ von s entsprechen wobei n, m, k_s ganze positive Zahlen sind und p die Werte $0, 1, \dots, (n-2)$ durchläuft, daher $n > 1$ ist. Gemäß (1) ist

$$S(\alpha_{n-p}, k_s - m) = S(\alpha_{n-p-1}, k_s - m) + \alpha_{n-p} S(\alpha_{n-p}, k_s - m - 1).$$

Diese Relation ist gültig für alle Werte von s und m , sofern wir die Summe

$$S(\alpha_n, k)$$

für $k < 0$ als Null definieren. Demnach läßt sich die obige Determinante zerlegen:

$$(3) \quad \Delta_p^m = \Delta_{p+1}^m + \alpha_{n-p} \Delta_p^{m+1},$$

$$p = 0, 1, \dots, (n-2) \quad \text{und} \quad m = 1, 2, \dots$$

Aus der Betrachtung von

$$\Delta_p^m$$

folgt sofort

$$\Delta_0^m = 0 \quad \text{für} \quad m = 1, 2, \dots, \lambda.$$

Unter Berücksichtigung dieser Relation bekommen wir aus (3) für $p = 0$

$$\Delta_1^m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, (\lambda - 1);$$

wegen der letzten Gleichung folgt aus (3) für $p = 1$

$$\Delta_2^m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, (\lambda - 2).$$

In dieser Art schrittweise weitergehend, findet man für $p = n - 2$ und unter der Voraussetzung, daß $\lambda \geq n$ ist, die Formel

$$\Delta_{n-1}^m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, (\lambda - n + 1).$$

Also haben wir für $\lambda \geq n$, $n > 1$:

$$(4) \quad \Delta_s^1 = 0, \quad s = 0, 1, \dots, (n - 1).$$

Wir betrachten nun die Determinante

$$\Delta = |S(\alpha_n, k_s) S(\alpha_n, k_s - 1) \dots S(\alpha_n, k_s - \lambda)|, \quad s = 1, 2, \dots, (\lambda + 1),$$

die sich aus

$$\Delta_p^m$$

für $p = 0$, $m = 0$ ergibt. Aus ihr ergibt sich, wenn man ihre erste Spalte nach der Formel (2) entwickelt:

$$(5) \quad \Delta = \sum_{n-p}^p \alpha_{n-p} \Delta_p^1.$$

Sie ist also wegen (4) gleich Null. Für $n = 1$ ist offenbar wieder Δ gleich 0. Mithin ist bewiesen

I. Die Determinanten Δ , deren Ordnung größer als n ist, sind gleich Null.

Wenn nun $\lambda < n$ ist, dann bekommen wir nach der obigen Reihe

$$\Delta_{\lambda-1}^1 = 0,$$

folglich gelten die Formeln

$$\Delta_s^1 = 0, \quad s = 0, 1, \dots, (\lambda - 1).$$

Also beschränkt sich die Summe (5) auf

$$(6) \quad \Delta = \sum_{\lambda-n+1}^p \alpha_{n-p} \Delta_p^1.$$

Wir setzen jetzt in

$$\Delta_p^m$$

$k_s = s$, ($s = 1, 2, \dots, \lambda + 1$) und untersuchen in diesem Spezialfalle die Summe (6). Man kann dann schreiben, indem man die erste Spalte in Δ_p^1 von der zweiten subtrahiert:

$$\Delta_p^1 = \begin{vmatrix} S(\alpha_n, 1) - S(\alpha_{n-p}, 1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ S(\alpha_n, 2) - S(\alpha_{n-p}, 2) & S(\alpha_n, 1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \\ S(\alpha_n, \lambda) - S(\alpha_{n-p}, \lambda) & S(\alpha_n, \lambda - 1) & \dots & \dots & S(\alpha_n, 1) \end{vmatrix}$$

und so findet man weiter

$$\Delta = (\alpha_1, \alpha_n)_{i+1} = \sum \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}.$$

Also ist die folgende Eigenschaft bewiesen:

II. Wenn $\lambda < n$ ist, gilt die Gleichheit

$$\Delta = \begin{vmatrix} S(\alpha_n, 1) & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ S(\alpha_n, \lambda) & S(\alpha_n, \lambda-1) & \dots & 1 & \\ S(\alpha_n, \lambda+1) & S(\alpha_n, \lambda) & \dots & S(\alpha_n, 1) & \end{vmatrix} = \sum \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}.$$

Wir betrachten nun die p Gleichungen ($p = \lambda + 1$):

$$A_p + A_{p-1} S(\alpha_n, 1) + \dots + A_0 S(\alpha_n, p) = 0, \quad A_0 = 1, \quad p = 1, 2, \dots, p.$$

Eliminiert man A_1, \dots, A_{p-1} aus den p Gleichungen, so findet man, da die Determinante des Gleichungssystems gleich Eins ist, daß A_p gleich der Determinante Δ des oben bewiesenen Satzes multipliziert mit dem Faktor $(-1)^p$ ist; also haben wir für $p \leq n$

$$A_p = (-1)^p \sum \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p.$$

Damit ist bewiesen

III. Für alle ganzen Werte von p im Intervall $1 \leq p \leq n$ gilt die Relation

$$A_p + A_{p-1} S(\alpha_n, 1) + \dots + A_0 S(\alpha_n, p) = 0,$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Wurzeln des Polynoms

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n \quad (A_0 = 1)$$

sind.

Man kann nunmehr auch die Funktion

$$S(\alpha_n, p) \quad (p \leq n)$$

der Wurzeln des Polynoms

$$A_0 x^n + \dots + A_n \quad (A_0 = 1)$$

durch ihre Koeffizienten, und zwar durch die p ersten Koeffizienten bestimmen, indem man

$$S(\alpha_n, l) \quad l = 1, 2, \dots, (p-1)$$

aus den p obigen Gleichungen eliminiert; man bekommt dann

$$S(\alpha_n, p) = (-1)^p \begin{vmatrix} A_1 & 1 & & & \\ A_2 & A_1 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 1 & \\ A_p & A_{p-1} & \dots & A_1 & \end{vmatrix}, \quad p \leq n.$$

Diese Beziehung bleibt richtig, wenn p größer als n ist, sofern wir A_p , ($p > n$) als Null definieren.

Weiter untersuchen wir den obigen Satz, falls

$$A_1, \dots, A_k \quad (k < n)$$

die Koeffizienten eines Polynoms sind, das k Wurzeln unter den $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ hat. Wir nehmen an, es gelte die Formel

$$(8) \quad S(\alpha_n, p) - S(\alpha_{n-k}, p) = \beta_1 S(\alpha_n, p-1) + \dots + (-1)^{k-1} \beta_k S(\alpha_n, p-k),$$

wobei β_λ , ($\lambda = 1, 2, \dots, k$) die Summe der Produkte von $\alpha_{n-k+1}, \dots, \alpha_n$ zu je λ ist.

Diese Formel läßt sich vermöge (1) schreiben:

$$\begin{aligned} & S(\alpha_n, p) - S(\alpha_{n-k-1}, p) \\ &= \alpha_{n-k} S(\alpha_{n-k}, p-1) + \beta_1 S(\alpha_n, p-1) + \dots + (-1)^{k-1} \beta_k S(\alpha_n, p-k) \\ &= (\alpha_{n-k} + \beta_1) S(\alpha_n, p-1) - \alpha_{n-k} [S(\alpha_n, p-1) - S(\alpha_{n-k}, p-1)] + A, \end{aligned}$$

wobei

$$A = -\beta_2 S(\alpha_n, p-2) + \dots + (-1)^{k-1} \beta_k S(\alpha_n, p-k)$$

ist. Hier entwickeln wir die Klammer auf der rechten Seite nach der Formel (8), dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & S(\alpha_n, p) - S(\alpha_{n-k-1}, p) \\ &= (\alpha_{n-k} + \beta_1) S(\alpha_n, p-1) - (\alpha_{n-k} \beta_1 + \beta_2) S(\alpha_n, p-2) + \dots \\ & \quad + (-1)^{k-1} (\alpha_{n-k} \beta_{k-1} + \beta_k) S(\alpha_n, p-k) + (-1)^k \alpha_{n-k} \beta_k S(\alpha_n, p-k-1) \\ &= B_1 S(\alpha_n, p-1) - B_2 S(\alpha_n, p-2) + \dots + (-1)^k B_{k+1} S(\alpha_n, p-k-1), \end{aligned}$$

wo B_λ , ($\lambda = 1, 2, \dots, k+1$) die Summe der Produkte von je λ der $\alpha_{n-k}, \alpha_{n-k+1}, \dots, \alpha_n$ ist. Also gilt die Formel (8) auch für $k+1$ statt k und, da sie für $k=1$ gültig ist, gilt sie auch für alle ganzen und positiven Werte von k .

Mithin ist bewiesen

IV. Sind $\alpha_{n-k+1}, \alpha_{n-k+2}, \dots, \alpha_n$ die Wurzeln des Polynoms

$$x^k + \beta_1 x^{k-1} + \dots + \beta_k,$$

so gilt die Formel

$$S(\alpha_n, p) + \beta_1 S(\alpha_n, p-1) + \dots + \beta_k S(\alpha_n, p-k) = S(\alpha_{n-k}, p)$$

für beliebige $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}$ und p ganz positiv.

Ist $k=n$, so kommen wir auf den Satz III zurück.

Wir wollen nun in einer anderen Richtung die Untersuchung fortsetzen.

Wir betrachten die Summe

$$R_k \equiv \sum \frac{\alpha_i^k}{(\alpha_1 - \alpha_2) \dots (\alpha_1 - \alpha_n)}, \quad n > 1,$$

wobei k eine ganze positive Zahl ist und α_s , ($s = 1, \dots, n$) verschieden voneinander sind. Für $k = 0, 1, \dots, (n-2)$ ist, wie bekannt

$$(9) \quad R_k = 0,$$

während für $k \geq n-1$ gilt

$$(10) \quad R_{n+k-1} = S(\alpha_n, \lambda) \quad (\lambda \geq 0)$$

Aus (9) und (10) folgt

$$(11) \quad c_0 R_{n+k-1} + \dots + c_k R_{n-1} + \dots + c_{n+k-1} R_0 \\ = c_0 S(\alpha_n, \lambda) + c_1 S(\alpha_n, \lambda-1) + \dots + c_k S(\alpha_n, 0), \quad S(\alpha_n, 0) = 1.$$

Die linke Seite von (11) läßt sich mit Hilfe des Polynoms

$$\varphi(x) = c_0 x^{n+k-1} + \dots + c_k x^{n-1} + \dots + c_{n+k-1} \quad (n > 1, \lambda \geq 0)$$

in die Gestalt

$$f = \sum \frac{\varphi(\alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2) \dots (\alpha_1 - \alpha_n)}$$

bringen. Also, wenn man $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ als Wurzeln von $\varphi(x)$ ansieht und $\lambda \geq 1$ ist, dann muß

$$f = 0$$

sein, d. h. die rechte Seite von (11) muß gleich 0 sein, und offenbar gilt das auch, wenn mehrere oder alle α_n untereinander gleich sind. Daher gilt die Formel

$$(12) \quad c_k + c_{k-1} S(\alpha_{m-k+1}, 1) + \dots + c_0 S(\alpha_{m-k+1}, \lambda) = 0$$

für $1 \leq \lambda \leq m$, wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-k+1}$ Wurzeln von

$$c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_m$$

sind.

Wir nehmen nun an: Mit (12) gilt auch die Formel

$$(13) \quad c_{k+k} + c_{k+k-1} S(\alpha_{m-k+1}, 1) + \dots + c_0 S(\alpha_{m-k+1}, \lambda+k) = 0, \\ \lambda + k \leq m,$$

wo k ganz und positiv ist. Diese Formel wird für $\lambda+1$ statt λ

$$(14) \quad c_{k+k+1} + c_{k+k} S(\alpha_{m-k}, 1) + \dots + c_0 S(\alpha_{m-k}, \lambda+k+1) = 0, \\ \lambda + k + 1 \leq m.$$

Wir betrachten jetzt den Ausdruck

$$P = c_{k+k} [S(\alpha_{m-k+1}, 1) - S(\alpha_{m-k}, 1)] + \dots + c_0 [S(\alpha_{m-k+1}, \lambda+k+1) - S(\alpha_{m-k}, \lambda+k+1)] \quad \text{für } \lambda+k+1 \leq m.$$

Wegen (1) ist aber

$$S(\alpha_{m-k+1}, k) - S(\alpha_{m-k}, k) = \alpha_{m-k+1} S(\alpha_{m-k+1}, k-1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

und deshalb ist

$$P = \alpha_{m-i+1} N,$$

wobei N die linke Seite von (13) bedeutet. Folglich ist

$$(15) \quad P = 0.$$

Durch die Summation von (14) und (15) bekommen wir

$$c_{i+k+1} + c_{i+k} S(\alpha_{m-i+1}, 1) + \dots + c_0 S(\alpha_{m-i+1}, \lambda + k + 1) = 0, \\ \lambda + k + 1 \leq m.$$

Also gilt die Formel (13) auch für $k + 1$ statt k und weil sie, vermöge (12), für $k = 0$ gültig ist, ist sie für alle ganzen und positiven Werte von k richtig. Mithin ist bewiesen

V. Sind die Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-i+1}$ Wurzeln von

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m,$$

so gilt die Formel

$$A_p + A_{p-1} S(\alpha_{m-i+1}, 1) + \dots + A_0 S(\alpha_{m-i+1}, p) = 0$$

für alle ganzen Werte von p im Intervall

$$\lambda \leq p \leq m \quad (\lambda \geq 1).$$

(Eingegangen am 2. Juli 1938.)

Berichtigung

zu der Arbeit von V. Jørgensen:

„Über den Gültigkeitsbereich des Picardschen Satzes“,

Math. Annalen 115, S. 710–719.

$$\text{Seite 715, Zeile 18 statt } \left| \frac{\pi^2}{2K} \cdot \frac{1}{x_p} - \sigma_n \right| \quad \text{lies} \quad \left| \frac{\pi^2}{2K} \cdot \frac{1}{x_p} - \sigma_n \right|$$

$$\left| \frac{\pi^2}{2K} \cdot \frac{1}{x_p} + \sigma_p \right| \quad \left| \frac{\pi^2}{2K} \cdot \frac{1}{x_p} + \sigma_n \right|$$

Seite 718, Fußnote ¹⁰⁾ statt $\omega = 1$ lies $\omega = 0,030 \dots$

Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades.

Von

Carl Ludwig Siegel in Göttingen.

Trotz der Bemühungen ausgezeichneten Mathematiker befindet sich die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Variablen noch in einem recht unbefriedigenden Zustand. Dies liegt wohl zum Teil daran, daß wir noch nicht genügend Erfahrung gesammelt haben, um überblicken zu können, welche speziellen Arten von Funktionen sich mit den heutigen Mitteln der Analysis näher untersuchen lassen. Der klassischen Funktionentheorie einer Variablen war ja eine 200jährige Entwicklung vorangegangen, in welcher man erst ganz allmählich von den elementaren transzendenten Funktionen und den elliptischen Integralen her zu allgemeineren Begriffsbildungen gekommen ist. Obwohl nun Fragestellungen verschiedener mathematischer Disziplinen schon vor längerer Zeit auf Probleme der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen geführt haben, so verfügen wir in dieser Theorie doch nur über recht wenige nichttriviale Beispiele von solchen Funktionsklassen, deren Eigenschaften wir näher durchschauen. Es handelt sich bei diesen Beispielen um Funktionen, welche bei gewissen Gruppen von Transformationen der Variablen entweder invariant bleiben oder dabei selbst in einfacher Weise transformiert werden. Solche Funktionen traten zuerst beim Umkehrproblem der Abelschen Integrale auf. Man kam dann bei der Untersuchung der Abelschen Funktionen auf die allgemeinen Thetafunktionen und die $2n$ -fach periodischen meromorphen Funktionen von n Variablen¹⁾. Ferner hat Picard²⁾ Funktionen zweier Veränderlichen betrachtet, die bei einer Gruppe projektiver Transformationen dieser Veränderlichen invariant bleiben, also eine Verallgemeinerung der automorphen Funktionen einer Variablen. Später behandelte

¹⁾ Vgl. hierzu die ausführliche geschichtliche Übersicht im Enzyklopädie-Referat II, B 7 von A. Krazer und W. Wirtinger über Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen.

²⁾ E. Picard, Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions, Acta mathematica 1 (1882), S. 297—320.

Blumenthal³⁾ auf Hilberts Anregung eine andere Übertragung der elliptischen Modulfunktionen, in welcher nämlich die Gruppe der unimodularen gebrochenen linearen Substitutionen mit ganzen Koeffizienten aus einem beliebigen totalreellen algebraischen Zahlkörper zugrunde gelegt wird. In dieser Untersuchung wurde insbesondere sehr sorgfältig die algebraische Abhängigkeit solcher Funktionen studiert. Endlich hat Hecke⁴⁾ die Hilbert-Blumenthalschen Funktionen für die Konstruktion gewisser Klassenkörper nutzbar gemacht und eine wichtige Darstellung durch verallgemeinerte Eisensteinsche Reihen gefunden.

Von der analytischen Theorie der quadratischen Formen her ist man⁵⁾ neuerdings zu Funktionen von $\frac{n(n+1)}{2}$ Variablen geführt worden, die für ein beliebiges algebraisches Gebilde vom Geschlecht n dasselbe leisten wie die elliptischen Modulfunktionen im Falle $n = 1$ und die deshalb Modulformen n -ten Grades genannt werden. Diese Funktionen sind von Interesse wegen verschiedenartiger Anwendungen auf Algebra und Arithmetik, und ihre analytischen Eigenschaften lassen sich ziemlich weit verfolgen. Einige beachtenswerte Beiträge auf diesem Gebiete verdankt man H. Braun⁶⁾. Da aber die Grundlage der Theorie dieser Funktionen bisher nur in großen Zügen skizziert worden ist, so soll jetzt eine eingehende Begründung gegeben werden. Die Anwendungen bleiben in dieser einführenden Darstellung außer Betracht.

Zunächst werden die Eigenschaften der Modulgruppe n -ten Grades genauer untersucht, insbesondere ihr Fundamentalebene, und dann die Modulformen n -ten Grades eingeführt. Der wichtige Satz, daß zwischen je $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ Modulformen eine isobare algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten besteht, wird in allen Einzelheiten bewiesen. Dabei benötigt man nicht die sehr mühsam zu begründenden Hilfsbetrachtungen aus der allgemeinen Funktionentheorie mehrerer Variablen, wie sie in der Blumen-

³⁾ O. Blumenthal, Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen, *Math. Annalen* **56** (1903), S. 509—548 und **58** (1904), S. 497—527; Über Thetafunktionen und Modulformen mehrerer Veränderlicher, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **13** (1904), S. 120—132.

⁴⁾ E. Hecke, Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, *Math. Annalen* **71** (1912), S. 1—37; Über die Konstruktion relativ-Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen, ebenda **74** (1913), S. 465—510; Analytische Funktionen und algebraische Zahlen II. Teil, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **3** (1924), S. 213—236.

⁵⁾ C. L. Siegel, *Lectures on the analytical theory of quadratic forms*, autographiert, Princeton (1935); Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, *Annals of mathematics* **36** (1935), S. 527—606; *Formes quadratiques et modules des courbes algébriques*, *Bulletin des sciences mathématiques*, 2. Reihe, **61** (1937), S. 331—352.

⁶⁾ H. Braun, Zur Theorie der Modulformen n -ten Grades, *Math. Annalen* **115** (1938), S. 507—517; Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen, *Math. Zeitschr.* **44** (1939), S. 387—397.

thalschen Untersuchung auftreten. Es wird die Reduktionstheorie der definiten quadratischen Formen herangezogen und eine gewisse Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas. Dann werden Modulformen durch Eisensteinsche Reihen konstruiert, und es wird gezeigt, daß es unter diesen $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ algebraisch unabhängige gibt. Definiert man die Modulformen n -ten Grades durch Quotienten von Modulformen gleichen Gewichtes, so folgt sofort die algebraische Abhängigkeit von je $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Modulformen. Ferner ergibt sich, daß jede Modulfunktion rational durch Eisensteinsche Reihen ausgedrückt werden kann. Endlich wird noch bewiesen, daß die zwischen den Eisensteinschen Reihen identisch bestehenden algebraischen Gleichungen rationale Zahlenkoeffizienten haben.

Nicht berücksichtigt wird im folgenden die von der Theorie der elliptischen Modulformen her naheliegende Verallgemeinerung, welche auch die Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe n -ten Grades umfaßt. Gleichfalls fällt aus dem Rahmen unserer Betrachtung die Untersuchung derjenigen Funktionen, die zu den Modulformen n -ten Grades in analogem Verhältnis stehen, wie die Hilbert-Blumenthalschen Funktionen zu den elliptischen Modulformen.

Es seien hier noch einige der weiterhin zu benutzenden Symbole erklärt. Deutsche Buchstaben bezeichnen *Matrizen*, und zwar *kleine* deutsche Buchstaben stets *Spalten*. Durch den oberen Index (a, b) in $\mathfrak{M}^{(a, b)}$ wird ausgedrückt, daß \mathfrak{M} eine Matrix aus a Zeilen und b Spalten ist; ferner bedeutet $\mathfrak{M}^{(a)}$ eine Matrix aus a Zeilen und Spalten. Gelegentlich werden unwichtige Elemente einer Matrix durch das Zeichen $*$ angedeutet. Unter $\text{abs } \mathfrak{R}$ verstehen wir den absoluten Betrag der Determinante einer komplexen Matrix \mathfrak{R} . *Nullmatrix* und *Einheitsmatrix* werden mit \mathfrak{N} und \mathfrak{E} bezeichnet, die *Nullspalte* mit \mathfrak{n} . Der Buchstabe \mathfrak{S} wird für *symmetrische* Matrizen reserviert. Geht die quadratische Form $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ durch die lineare Transformation $\mathfrak{x} = \mathfrak{C} \mathfrak{y}$ in $\mathfrak{y}' \mathfrak{T} \mathfrak{y}$ über, so ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}' \mathfrak{S} \mathfrak{C}$, und hierfür schreiben wir kürzer $\mathfrak{T} = \mathfrak{S} [\mathfrak{C}]$; insbesondere ist also $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = \mathfrak{S} [\mathfrak{x}]$. Ist \mathfrak{S} reell und stets $\mathfrak{S} [\mathfrak{x}] \geq 0$ für reelles \mathfrak{x} , so nennen wir \mathfrak{S} *nicht-negativ* und bezeichnen dies durch $\mathfrak{S} \geq 0$; gilt schärfer sogar $\mathfrak{S} [\mathfrak{x}] > 0$ für alle reellen $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}$, so heißt \mathfrak{S} *positiv*, und wir schreiben dafür $\mathfrak{S} > 0$. Dieselbe Bezeichnung verwenden wir sinngemäß bei *hermiteschen* Formen. Eine Matrix \mathfrak{M} heißt *ganz*, wenn alle ihre Elemente ganze rationale Zahlen sind. Sind \mathfrak{M} und \mathfrak{M}^{-1} beide ganz, so heißt \mathfrak{M} *unimodular*; für solche

Matrizen bleibt der Buchstabe \mathfrak{U} vorbehalten. Ist die Zahl $\mathfrak{S} [\mathfrak{x}] = \sum_{k, l=1}^n s_{kl} x_k x_l$ ganz für alle ganzen \mathfrak{x} , so müssen die Koeffizienten s_{kl} ($k = 1, \dots, n$) und $2 s_{kl}$ ($1 \leq k < l \leq n$) der quadratischen Form sämtlich ganze Zahlen sein; wir nennen dann \mathfrak{S} *halbganz*.

§ 1.

Die Modulgruppe n -ten Grades.

In verschiedenen Teilen der Mathematik wird man zu der Aufgabe geführt, die homogenen linearen Substitutionen zweier Reihen von je $2n$ Variablen x_1, \dots, x_{2n} und y_1, \dots, y_{2n} zu bestimmen, welche die bilineare Form

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n (x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k)$$

in sich überführen. Bezeichnet man mit

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$$

die Matrix der gesuchten Substitution, wobei $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ aus n Zeilen und Spalten bestehen, und mit

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \mathfrak{R} & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

die Matrix der bilinearen Form (1), so muß also \mathfrak{M} der Bedingung

$$(2) \quad \mathfrak{M}' \mathfrak{I} \mathfrak{M} = \mathfrak{I}$$

genügen. Diese Bedingung besagt, daß die 3 Gleichungen

$$(3) \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}'\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{D} - \mathfrak{C}'\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$$

gelten sollen. Wegen $\mathfrak{I}^{-1} = -\mathfrak{I}$ und (2) gilt auch

$$(4) \quad \mathfrak{M} \mathfrak{I} \mathfrak{M}' = \mathfrak{I},$$

also

$$(5) \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{C}\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\mathfrak{C}', \quad \mathfrak{A}\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}\mathfrak{C}' = \mathfrak{E}.$$

Ein Paar von Matrizen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} mit der Eigenschaft

$$(6) \quad \mathfrak{X}\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}\mathfrak{X}'$$

heiße *symmetrisch*. Zuzufolge (3) gilt dann für jedes symmetrische Paar n -reihiger Matrizen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{X}\mathfrak{C}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{D}' & -\mathfrak{X}\mathfrak{A}' - \mathfrak{Y}\mathfrak{B}' \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} \mathfrak{M} \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{X}' \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{Y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Y} & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{C}\mathfrak{X}' + \mathfrak{D}\mathfrak{Y}' \end{pmatrix}$$

und daher

$$(7) \quad |\mathfrak{X}\mathfrak{C}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{D}'| \cdot |\mathfrak{M}| \cdot |\mathfrak{Y}'| = |\mathfrak{Y}| \cdot |\mathfrak{C}\mathfrak{X}' + \mathfrak{D}\mathfrak{Y}'|.$$

Nun ist aber die Determinante $|\mathfrak{X}\mathfrak{C}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{D}'|$ auch unter der Nebenbedingung (6) nicht identisch in \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} gleich 0, denn nach (5) hat sie speziell für $\mathfrak{X} = -\mathfrak{B}, \mathfrak{Y} = \mathfrak{A}$ den Wert 1. Daher folgt aus (7) die Gleichung

$$(8) \quad |\mathfrak{M}| = 1.$$

Alle reellen Matrizen \mathfrak{M} mit der Eigenschaft (2) bilden offenbar bei Multiplikation eine Gruppe Ω . Unter ihnen bilden die ganzen \mathfrak{M} wegen (8) ebenfalls eine Gruppe Γ , und diese nennen wir *homogene Modulgruppe n -ten Grades*. Die *homogenen Modulsstitutionen*

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$$

erhält man durch die sämtlichen ganzen Lösungen von

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{C}\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\mathfrak{C}', \quad \mathfrak{A}\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}\mathfrak{C}' = \mathfrak{E},$$

und es ist dann

$$\mathfrak{M}^{-1} = -\mathfrak{I}\mathfrak{M}'\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}' & -\mathfrak{B}' \\ -\mathfrak{C}' & \mathfrak{A}' \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ heißen erste und zweite *Matrizenzeile* der Modulsstitution \mathfrak{M} . Es sollen jetzt einige einfache Eigenschaften dieser beiden Matrizenzeilen abgeleitet werden. Nach (5) und der Erklärung (6) ist zunächst jedes der Paare $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ symmetrisch. Nach (5) ist ferner

$$\mathfrak{G}\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}' - \mathfrak{G}\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{B}' = \mathfrak{G};$$

sind also für irgendeine Matrix \mathfrak{G} die Matrizen $\mathfrak{G}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{G}\mathfrak{D}$ beide ganz, so ist \mathfrak{G} selbst ganz. Diese Eigenschaft von \mathfrak{C} und \mathfrak{D} drücken wir aus, indem wir sagen, das Paar $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ist *teilerfremd*. Das Paar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ist ebenfalls teilerfremd. Die Matrizen jeder der beiden Zeilen von \mathfrak{M} bilden also ein teilerfremdes symmetrisches Paar.

Nun sei ein beliebiges teilerfremdes symmetrisches Paar $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ gegeben. Wir wollen ein weiteres teilerfremdes symmetrisches Paar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ derart bestimmen, daß eine Modulsstitution zustande kommt, daß also $\mathfrak{A}\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}\mathfrak{C}' = \mathfrak{E}$ wird. Zu diesem Zwecke zeigen wir zunächst, daß die Gleichung $\mathfrak{C}\mathfrak{X} + \mathfrak{D}\mathfrak{Y} = \mathfrak{E}$ in ganzen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ lösbar ist. Wir wählen eine unimodulare Matrix \mathfrak{U} , für welche $(\mathfrak{C}\mathfrak{D})\mathfrak{U}$ rechts von der Diagonale nur Nullen enthält. Dann ist sicher

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{D})\mathfrak{U} = (\mathfrak{F}\mathfrak{N})$$

mit ganzem $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{(n)}$, und da das Paar $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ teilerfremd ist, so muß \mathfrak{F} unimodular sein. Setzt man

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{X} \\ \mathfrak{Y} \end{pmatrix} = \mathfrak{U} \begin{pmatrix} \mathfrak{F}^{-1} \\ \mathfrak{N} \end{pmatrix},$$

so leisten \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} das Gewünschte. Endlich sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Y}' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{B} = -\mathfrak{X}' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}\mathfrak{D}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}\mathfrak{A}' = (\mathfrak{Y}' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}\mathfrak{C})(\mathfrak{D}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}') - (\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}\mathfrak{D} - \mathfrak{X}')(\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{X}) = \mathfrak{N},$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}\mathfrak{C}' = (\mathfrak{Y}' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}\mathfrak{C})\mathfrak{D}' + (\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}\mathfrak{D})\mathfrak{C}' = \mathfrak{E},$$

also unsere Aufgabe gelöst.

Wie erhält man alle Modulsstitutionen \mathfrak{M} mit gegebener zweiter Matrizenzeile $(\mathfrak{C} \mathfrak{D})$? Sind

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$$

zwei derartige Modulsstitutionen, so bilde man

$$\mathfrak{M} \mathfrak{M}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{D}' & -\mathfrak{B}'_1 \\ -\mathfrak{C}' & \mathfrak{A}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{S} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{B} \mathfrak{A}'_1 - \mathfrak{A} \mathfrak{B}'_1, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{D} \mathfrak{A}'_1 - \mathfrak{C} \mathfrak{B}'_1.$$

Da $\mathfrak{M} \mathfrak{M}_1^{-1}$ wieder eine Modulsstitution ist, so folgt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{S}' = \mathfrak{S},$$

und es ist

$$(9) \quad \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{S} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} \mathfrak{M}_1$$

mit ganzem symmetrischem \mathfrak{S} . Für jedes solches \mathfrak{S} ist umgekehrt mit \mathfrak{M}_1 auch \mathfrak{M} eine Modulsstitution, und beide haben die gleiche zweite Matrizenzeile. Aus einer festen Modulsstitution \mathfrak{M}_1 mit der vorgeschriebenen zweiten Matrizenzeile erhält man also eineindeutig alle \mathfrak{M} mit derselben zweiten Zeile, indem man in (9) für \mathfrak{S} alle ganzen symmetrischen Matrizen einträgt.

Die speziellen Modulsstitutionen

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{S} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

bilden eine Abelsche Untergruppe Δ_0 in der homogenen Modulgruppe Γ . Nach (9) ist nun die Menge aller \mathfrak{M} aus Γ mit fester zweiter Matrizenzeile genau eine rechtsseitige Nebengruppe in bezug auf Δ_0 .

Die Elemente von Δ_0 sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre zweite Zeile $(\mathfrak{R} \mathfrak{E})$ ist. Wir wollen allgemeiner alle Modulsstitutionen von der Form

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$$

untersuchen. Diese bilden eine Δ_0 umfassende Untergruppe Δ von Γ , welche wir die Gruppe der *ganzen* Modulsstitutionen nennen wollen. Es ist dann

$$\mathfrak{D} \mathfrak{A}' = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{A} \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \mathfrak{A}',$$

also $\mathfrak{A}' = \mathfrak{U}$ unimodular, $\mathfrak{D} = \mathfrak{U}^{-1}$, $\mathfrak{B} \mathfrak{U} = \mathfrak{S}$ symmetrisch. Die Elemente von Δ sind daher

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}' & \mathfrak{S} \mathfrak{U}^{-1} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{U}^{-1} \end{pmatrix}$$

mit beliebigem unimodularem U und beliebigem ganzem symmetrischem \mathfrak{S} . Aus den Zerlegungen

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C} & \mathfrak{S} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & U^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U' & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{C} & \mathfrak{S}[U^{-1}] \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{C} \end{pmatrix}$$

ersieht man, daß Δ_0 eine invariante Untergruppe von Δ ist. Die Faktorgruppe Δ/Δ_0 besteht aus den Moduls substitutionen

$$\begin{pmatrix} U' & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & U^{-1} \end{pmatrix}$$

mit beliebigem unimodularem U .

Endlich wollen wir noch Γ in rechtsseitige Nebengruppen zu Δ einteilen. Sind

$$\mathfrak{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{D}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}_0 = \begin{pmatrix} U' & \mathfrak{S}[U^{-1}] \\ \mathfrak{R} & U^{-1} \end{pmatrix}$$

Elemente von Γ und Δ , so gilt für die zweite Zeile $(\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ von

$$\mathfrak{M}_0 \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$(10) \quad (\mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1) = U (\mathfrak{C} \mathfrak{D}),$$

also auch

$$(11) \quad \mathfrak{C} \mathfrak{D}'_1 = \mathfrak{D} \mathfrak{C}'_1.$$

Ist umgekehrt \mathfrak{M} irgendeine Moduls substitution, deren zweite Zeile $(\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ die Bedingung (11) erfüllt, so wird

$$\mathfrak{M} \mathfrak{M}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{D}'_1 & -\mathfrak{B}'_1 \\ -\mathfrak{C}'_1 & \mathfrak{A}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \mathfrak{R} & * \end{pmatrix}$$

ein Element \mathfrak{M}_0 von Δ . Insbesondere gilt dann wieder (10), mit einer eindeutig bestimmten unimodularen Matrix U .

Stehen nun zwei teilerfremde symmetrische Matrizenpaare $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$ in der Beziehung (11) zueinander, so sagen wir, die Paare sind *assoziiert*. Diese Relation ist reflexiv und symmetrisch; nach (10) ist sie auch transitiv. Wir vereinigen alle assoziierten teilerfremden symmetrischen Matrizenpaare $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ in eine *Klasse* $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}$. Dann bilden alle Moduls substitutionen, deren zweite Matrizenzeilen derselben Klasse angehören, genau eine rechtsseitige Nebengruppe in bezug auf Δ .

Ist der Rang r von \mathfrak{C} kleiner als n , so läßt das teilerfremde symmetrische Paar $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ noch eine gewisse Reduktion zu, die wir später benötigen werden. Man bestimme dann zwei unimodulare Matrizen U_1 und U_2 , so daß

$$U_1 \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{R} \end{pmatrix} U_2, \quad \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}'_1, \quad |\mathfrak{C}_1| \neq 0$$

gilt. Setzt man analog

$$U_1 D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} U_2^{-1},$$

so folgen wegen $U D' = D U'$ die Gleichungen

$$U_1 D'_1 = D_1 U'_1, \quad U_1 D'_2 = R;$$

also ist das Paar U_1, D_1 symmetrisch und $D_2 = R$. Da das Paar U, D teilerfremd ist, so ist D_4 unimodular und das Paar U_1, D_1 teilerfremd. Ersetzt man noch U_1 durch

$$\begin{pmatrix} U & D_2 \\ R & D_4 \end{pmatrix} U_1,$$

so wird

$$(12) \quad U_1 U = \begin{pmatrix} U_1 & R \\ R & R \end{pmatrix} U'_1, \quad U_1 D = \begin{pmatrix} D_1 & R \\ R & U \end{pmatrix} U_2^{-1}.$$

Es sei nun Ω die aus den ersten r Spalten von U_2 gebildete Matrix. Ist $U_3 = U_3^{(r)}$ eine beliebige unimodulare Matrix, so bleibt (12) erfüllt, wenn darin Ω, U_1, D_1 durch $\Omega U'_3, U_1 U_3^{-1}, D_1 U'_3$ ersetzt werden. Die Gesamtheit der $\Omega U'_3$, die für variables U'_3 entsteht, vereinigen wir wieder in eine Klasse $\{\Omega\}$. Aus jeder solchen Klasse wählen wir einen festen Repräsentanten. Dieser möge die ersten r Spalten von U_2 bilden. Endlich kann man über U_1 noch so verfügen, daß das Paar U_1, D_1 ein vorgeschriebener Repräsentant seiner Klasse ist.

Wir wollen jetzt nachweisen, daß die Zuordnung zwischen den Klassen $\{U, D\}$ und den Klassen $\{\Omega\}, \{U_1, D_1\}$ eine umkehrbar eindeutige ist. Es sei U_4 eine unimodulare Matrix, die mit U_2 in den ersten r Spalten übereinstimmt. Dann ist

$$(13) \quad \begin{pmatrix} D_1 & R \\ R & U \end{pmatrix} U_1^{-1} U_4 \begin{pmatrix} D_1 & R \\ R & U \end{pmatrix}^{-1} = U_4$$

wieder unimodular und

$$(14) \quad U_4 U_1 U = \begin{pmatrix} U_1 & R \\ R & R \end{pmatrix} U'_1, \quad U_4 U_1 D = \begin{pmatrix} D_1 & R \\ R & U \end{pmatrix} U_2^{-1}.$$

Folglich ist die Klasse $\{U, D\}$ durch $\{\Omega\}$ und $\{U_1, D_1\}$ eindeutig bestimmt. Um das Umgekehrte zu zeigen, nehmen wir an, es sei auch

$$(15) \quad U_4 U = \begin{pmatrix} U_1 & R \\ R & R \end{pmatrix} U'_1, \quad U_4 D = \begin{pmatrix} D_1 & R \\ R & U \end{pmatrix} U_2^{-1}.$$

Aus der Gleichung

$$U_4 U_1^{-1} \begin{pmatrix} U_1 & R \\ R & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & R \\ R & R \end{pmatrix} (U_2^{-1} U_4)'$$

folgt, daß

$$U_2^{-1} U_4 = \begin{pmatrix} U_1 & * \\ R & * \end{pmatrix}$$

ist. Bilden die ersten r Spalten von U_6 die Matrix Ω_1 , so ist also

$$\Omega_1 = \Omega U_7.$$

Da wir den Klassenrepräsentanten Ω fest gewählt haben, so ist

$$\Omega_1 = \Omega.$$

Benutzen wir nun (13) und (14) mit U_6 statt U_4 , so sehen wir, daß wir in (15) bereits die Annahme

$$U_6 = U_2$$

machen können. Endlich sei noch

$$U_0 U_1^{-1} = U_8.$$

Aus (12) und (15) ergibt sich dann

$$U_8 \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_0 & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{R} \end{pmatrix}, \quad U_8 \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_0 & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{E} \end{pmatrix},$$

also

$$U_8 = \begin{pmatrix} U_9 & \mathfrak{R} \\ * & \mathfrak{E} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{C}_0 = U_9 \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{D}_0 = U_9 \mathfrak{D}_1,$$

und wegen der festen Wahl des Klassenrepräsentanten \mathfrak{C}_1 , \mathfrak{D}_1 ist schließlich

$$\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}_1.$$

§ 2.

Der Fundamentalbereich.

Zwei beliebige komplexe Matrizen $\mathfrak{B}^{(n)}$ und $\mathfrak{W}^{(n)}$ unterwerfen wir der linearen Transformation

$$(16) \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A} \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \mathfrak{W}, \quad \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{C} \mathfrak{B} + \mathfrak{D} \mathfrak{W},$$

kürzer

$$(17) \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{W}_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{M} \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ \mathfrak{W} \end{pmatrix}.$$

Dabei gehöre \mathfrak{M} zu der Gruppe Ω aller reellen linearen Substitutionen, welche die bilineare Form (1) in sich überführen. Nach (2) ist dann

$$\mathfrak{B}'_1 \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}'_1 \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}' \mathfrak{W} - \mathfrak{W}' \mathfrak{B}$$

und, wenn durch Überstreichen die Bildung der konjugiert komplexen Matrix angedeutet wird, auch

$$\mathfrak{B}'_1 \overline{\mathfrak{W}}_1 - \mathfrak{W}'_1 \overline{\mathfrak{B}}_1 = \mathfrak{B}' \overline{\mathfrak{W}} - \mathfrak{W}' \overline{\mathfrak{B}}.$$

Die Matrix $\mathfrak{B}'_1 \mathfrak{W}_1$ ist also dann und nur dann symmetrisch, wenn $\mathfrak{B}' \mathfrak{W}$ es ist. Ferner ist die hermitesche Matrix

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2i} (\mathfrak{B}' \overline{\mathfrak{W}} - \mathfrak{W}' \overline{\mathfrak{B}})$$

bei der Transformation (17) invariant.

Weiterhin sei dauernd $\mathfrak{B}' \mathfrak{W} = \mathfrak{W}' \mathfrak{B}$ symmetrisch und $\mathfrak{H} > 0$, also $\mathfrak{z}' \mathfrak{H} \overline{\mathfrak{z}} > 0$ für jedes komplexe $\mathfrak{z} \neq n$. Dies ist z. B. für $\mathfrak{B} = i\mathfrak{E}$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{E}$ erfüllt. Es ist dann stets $|\mathfrak{W}| \neq 0$; denn aus $\mathfrak{W}\mathfrak{z} = n$ folgt $\mathfrak{W}\overline{\mathfrak{z}} = n$, $\mathfrak{z}' \mathfrak{B}' \mathfrak{W} \overline{\mathfrak{z}} = 0$, $\mathfrak{z}' \mathfrak{H} \overline{\mathfrak{z}} = 0$, $\mathfrak{z} = n$. Wegen der Invarianz von \mathfrak{H} ist also auch $|\mathfrak{W}_1| \neq 0$.

Wir setzen nun

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{B} \mathfrak{W}^{-1}.$$

Aus den Formeln

$$\mathfrak{W}' \mathfrak{B} = \mathfrak{W}' \mathfrak{Z} \mathfrak{W}, \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{2i} \mathfrak{W}' (\mathfrak{Z}' - \overline{\mathfrak{Z}}) \overline{\mathfrak{W}}$$

ersieht man, daß \mathfrak{Z} symmetrisch ist und daß der imaginäre Teil \mathfrak{Y} von $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$ positiv ist. Setzt man analog $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{W}_1^{-1}$, $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{X}_1 + i\mathfrak{Y}_1$ mit reellen \mathfrak{X}_1 , \mathfrak{Y}_1 , so geht (16) über in

$$(18) \quad \mathfrak{Z}_1 = (\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1},$$

und wegen der Invarianz von \mathfrak{H} gilt $\mathfrak{W}' \mathfrak{Y} \overline{\mathfrak{W}} = \mathfrak{W}'_1 \mathfrak{Y}_1 \overline{\mathfrak{W}}_1$, also

$$(19) \quad \mathfrak{Y} = (\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})' \mathfrak{Y}_1 (\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{Z}} + \overline{\mathfrak{D}}).$$

Deutet man die $n(n+1)$ Elemente x_{ki} und y_{ki} ($k \leq l$) von \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} als kartesische Koordinaten eines Punktes, so erfüllen alle komplexen symmetrischen $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$ mit positivem Imaginärteil \mathfrak{Y} eine offene konvexe Punktmenge P , deren Begrenzung von endlich vielen algebraischen Flächen gebildet wird. Nach dem oben Bewiesenen geht P in sich selbst über bei allen gebrochenen linearen Substitutionen (18), für welche \mathfrak{W} zu Ω gehört. Im folgenden möge \mathfrak{W} dauernd sogar der homogenen Modulgruppe Γ angehören.

Wann ergeben nun zwei Modulsstitutionen \mathfrak{W} und \mathfrak{W}_1 dieselbe gebrochene Substitution (18)? Gilt identisch für symmetrisches \mathfrak{Z} die Gleichung

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1} = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{Z} + \mathfrak{B}_1)(\mathfrak{C}_1\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}_1)^{-1},$$

so folgt wegen $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_1$ zunächst

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{E}'_1 + \mathfrak{D}'_1)(\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B}) = (\mathfrak{Z}\mathfrak{A}'_1 + \mathfrak{B}'_1)(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}),$$

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{C}'_1\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'_1\mathfrak{C})\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}(\mathfrak{C}'_1\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'_1\mathfrak{C}) + (\mathfrak{D}'_1\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'_1\mathfrak{D})\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}'_1\mathfrak{D} - \mathfrak{D}'_1\mathfrak{B}$$

und hieraus

$$\mathfrak{C}'_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_1\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}'_1\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'_1\mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D}'_1\mathfrak{A} - \mathfrak{B}'_1\mathfrak{C} = \mathfrak{A}'_1\mathfrak{D} - \mathfrak{C}'_1\mathfrak{B} = \lambda\mathfrak{E},$$

mit einer gewissen Zahl λ . Dann wird aber auch

$$\mathfrak{M}_1^{-1} \mathfrak{M} = \lambda \mathfrak{E},$$

und da dies ebenfalls eine Modulsstitution ist, so ergibt sich $\lambda^2 = 1$, $\mathfrak{M}_1 = \pm \mathfrak{M}$. Aus der Gruppe Γ aller homogenen Modulsstitutionen \mathfrak{M} erhält man also die Gruppe Γ_0 der gebrochenen Modulsstitutionen (18), indem man \mathfrak{M} und $-\mathfrak{M}$ nicht als verschieden ansieht; d. h. Γ_0 ist die Faktorgruppe von Γ in bezug auf die von \mathfrak{E} und $-\mathfrak{E}$ gebildete invariante Untergruppe. Fortan wollen wir dauernd unter der *Modulgruppe* die Gruppe Γ_0 verstehen.

Zwei Punkte 3_1 und 3 von P heißen *äquivalent*, wenn sie in der Beziehung (18) zueinander stehen, also durch eine Modulsstitution auseinander hervorgehen. Es ist eine wichtige Aufgabe, durch geeignete Bedingungen in jedem vollen System äquivalenter Punkte einen *reduzierten* Punkt derart festzulegen, daß die reduzierten Punkte einen Bereich mit möglichst einfacher Begrenzung ergeben. Eine Lösung dieser Aufgabe erhält man durch die folgenden Betrachtungen.

Wir nennen den mit 3 äquivalenten Punkt 3_1 *höher* als 3 , wenn für die imaginären Teile \mathfrak{y}_1 und \mathfrak{y} von 3_1 und 3 die Ungleichung $|\mathfrak{y}_1| > |\mathfrak{y}|$ gilt. Nach (19) ist dies gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\text{abs}(\mathfrak{C}3 + \mathfrak{D}) < 1.$$

Jetzt sei $3, 3_1, 3_2, \dots$ eine Folge äquivalenter Punkte, von denen jeder höher ist als der vorangehende. Wir wollen zeigen, daß diese Folge nur endlich viele Glieder enthalten kann. Ist nämlich

$$3_k = (\mathfrak{U}_k 3 + \mathfrak{B}_k)(\mathfrak{C}_k 3 + \mathfrak{D}_k)^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

so gilt

$$(20) \quad 1 > \text{abs}(\mathfrak{C}_1 3 + \mathfrak{D}_1) > \text{abs}(\mathfrak{C}_2 3 + \mathfrak{D}_2) > \dots$$

Hierbei können keine zwei Paare $\mathfrak{C}_k, \mathfrak{D}_k$ und $\mathfrak{C}_l, \mathfrak{D}_l$ ($k < l$) miteinander assoziiert sein, denn aus $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{U} \mathfrak{C}_l, \mathfrak{D}_k = \mathfrak{U} \mathfrak{D}_l$ mit unimodularem \mathfrak{U} folgte $\text{abs}(\mathfrak{C}_k 3 + \mathfrak{D}_k) = \text{abs}(\mathfrak{C}_l 3 + \mathfrak{D}_l)$. Andererseits gibt es nur endlich viele Klassen $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}$, für welche der Ausdruck $\text{abs}(\mathfrak{C}3 + \mathfrak{D})$ unterhalb einer beliebigen festen Schranke liegt. Dies folgt z. B. aus dem von H. Brauer bewiesenen Satze, daß die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}} \text{abs}(\mathfrak{C}3 + \mathfrak{D})^{-s}$$

für $s > n + 1$ konvergiert, kann aber auch aus den weiter unten hergeleiteten Abschätzungen von $\text{abs}(\mathfrak{C}3 + \mathfrak{D})$ entnommen werden. Folglich treten in (20) nur endlich viele Glieder auf.

Es existiert also ein mit \mathfrak{Z} äquivalenter Punkt, zu dem es keinen höheren mehr gibt. Bezeichnen wir ihn wieder mit \mathfrak{Z} , so gilt daher für alle teilerfremden symmetrischen Paare $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ die Ungleichung

$$\text{abs}(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}) \geq 1.$$

Unterwerfen wir dann \mathfrak{Z} einer beliebigen ganzen Modulsstitution

$$\mathfrak{Z}_1 = (\mathfrak{U}'\mathfrak{Z} + \mathfrak{S}\mathfrak{U}^{-1})\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}[\mathfrak{U}] + \mathfrak{S}$$

mit unimodularem \mathfrak{U} und ganzem symmetrischem \mathfrak{S} , so wird

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}[\mathfrak{U}] + \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}[\mathfrak{U}], \quad |\mathfrak{Y}_1| = |\mathfrak{Y}|.$$

Nun können wir \mathfrak{U} so wählen, daß die positive symmetrische Matrix \mathfrak{Y}_1 den *Minkowskischen Reduktionsbedingungen* ⁷⁾ genügt. Diese besagen folgendes: Setzt man $\mathfrak{Y}_1 = (y_{kl})$, $y_{kk} = y_k$, so ist für jede Spalte g_k aus ganzen Zahlen g_1, \dots, g_n , von denen g_k, g_{k+1}, \dots, g_n teilerfremd sind, die Ungleichung

$$\mathfrak{Y}_1[g_k] \geq y_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

erfüllt; außerdem gilt

$$y_{k, k+1} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Endlich bestimmen wir die ganze symmetrische Matrix \mathfrak{S} , so daß alle Elemente x_{kl} von \mathfrak{X}_1 zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ liegen. Schreiben wir dann wieder \mathfrak{Z} für \mathfrak{Z}_1 , so genügt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$ den sämtlichen Ungleichungen

$$(21) \quad \text{abs}(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}) \geq 1,$$

$$(22) \quad \mathfrak{Y}[g_k] \geq y_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad y_{k, k+1} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

$$(23) \quad -\frac{1}{2} \leq x_{kl} \leq \frac{1}{2} \quad (k, l = 1, \dots, n).$$

Jeder Punkt \mathfrak{Z} aus P , der allen diesen Bedingungen genügt, heißt *reduziert*. Zu jedem Punkte aus P gibt es dann mindestens einen äquivalenten reduzierten Punkt. Die Gesamtheit der reduzierten Punkte bildet eine Menge F . Von dieser wollen wir beweisen, daß sie *abgeschlossen* und *zusammenhängend* ist, daß ihre Begrenzung von *endlich* vielen algebraischen Flächen gebildet wird und daß jeder Punkt von P entweder genau *einem* inneren Punkte von F oder aber nicht mehr als *endlich* vielen Randpunkten von F äquivalent ist.

Hat \mathfrak{C} den Rang r , so gilt nach (12) die Formel

$$(24) \quad \text{abs}(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}) = \text{abs}(\mathfrak{C}_0\mathfrak{Z}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{D}_0)$$

mit teilerfremdem symmetrischem Paar $\mathfrak{C}_0^{(r)}, \mathfrak{D}_0^{(r)}$ und $|\mathfrak{C}_0| \neq 0$; ferner ist $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^{(n, r)}$ *primitiv*, d. h. ergänzbar zu einer unimodularen Matrix. Wählt man insbesondere

$$\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C} \\ \mathfrak{R} \end{pmatrix},$$

⁷⁾ H. Minkowski, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, S. 53–100. Leipzig und Berlin 1911.

so folgt aus (21) die Bedingung

$$(25) \quad \text{abs } \mathfrak{Z}_{(r)} \geq 1,$$

wobei $\mathfrak{Z}_{(r)}$ den r -ten Abschnitt von \mathfrak{Z} bedeutet, also diejenige Matrix, welche aus \mathfrak{Z} durch Streichen der letzten $n - r$ Zeilen und Spalten entsteht. Für $r = 1$ folgt speziell aus (23) und (25) die Ungleichung $y_1^2 + \frac{1}{4} \geq 1$, also

$$(26) \quad y_1 \geq \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

Aus den Minkowskischen Reduktionsbedingungen erhält man nun andererseits

$$(27) \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n, \quad \pm 2 y_{kl} \leq y_k \quad (1 \leq k < l \leq n),$$

$$(28) \quad y_1 y_2 \dots y_n < c_1 |\mathfrak{Y}|,$$

wo c_1 , wie auch weiterhin c_2, \dots, c_{2n} , eine nur von n abhängige natürliche Zahl ist. Zuzufolge (26) ist also

$$(29) \quad |\mathfrak{Y}| \geq c_2^{-1}.$$

Jetzt ist zunächst leicht einzusehen, daß F abgeschlossen ist. Konvergiert nämlich irgendeine Punktfolge aus F gegen einen Punkt \mathfrak{Z} , so genügt auch diese den Ungleichungen (21), (22), (23), (29). Aus der letzten folgt, daß \mathfrak{Z} noch zu P gehört, und aus den drei vorhergehenden, daß \mathfrak{Z} sogar ein Punkt von F ist.

Um nachzuweisen, daß F zusammenhängend ist, formen wir zuerst den Ausdruck $\text{abs } (\mathfrak{C}_0 \mathfrak{Z} [\Omega] + \mathfrak{D}_0)$ um. Es sei

$$(30) \quad \mathfrak{Z} [\Omega] + \mathfrak{C}_0^{-1} \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{S}_0 + i \mathfrak{I}_0$$

mit $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{X} [\Omega] + \mathfrak{C}_0^{-1} \mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{Y} [\Omega]$. Man wähle dann eine reelle Matrix $\mathfrak{H}^{(r)}$, so daß $\mathfrak{I}_0 [\mathfrak{H}] = \mathfrak{E}$ und zugleich $\mathfrak{S}_0 [\mathfrak{H}] = \mathfrak{H}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente h_1, \dots, h_r seien. Dann wird $|\mathfrak{H}|^{-2} = |\mathfrak{I}_0|$ und

$$\mathfrak{S}_0 + i \mathfrak{I}_0 = (\mathfrak{H} + i \mathfrak{E}) [\mathfrak{H}^{-1}],$$

$$|\mathfrak{S}_0 + i \mathfrak{I}_0| = |\mathfrak{I}_0| \prod_{k=1}^r (h_k + i).$$

Zuzufolge (24) und (30) ist daher

$$(31) \quad \text{abs } (\mathfrak{C}_0 \mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^2 = |\mathfrak{C}_0|^2 |\mathfrak{I}_0|^2 \prod_{k=1}^r (h_k^2 + 1).$$

Für $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{X} + i \lambda \mathfrak{Y}$ mit $\lambda \geq 1$ gilt dann

$$(32) \quad \text{abs } (\mathfrak{C}_0 \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{D})^2 = |\mathfrak{C}_0|^2 |\mathfrak{I}_0|^2 \prod_{k=1}^r (h_k^2 + \lambda^2),$$

also

$$\text{abs } (\mathfrak{C}_0 \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{D}) \geq \text{abs } (\mathfrak{C}_0 \mathfrak{Z} + \mathfrak{D}),$$

und demnach genügt mit \mathfrak{Z} auch \mathfrak{Z}_1 den sämtlichen Ungleichungen (21), (22), (23). Es ist also $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{X} + i \lambda \mathfrak{Y}$ für alle $\lambda > 1$ reduziert, wenn $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i \mathfrak{Y}$ reduziert ist.

Da bei der Wahl von Ω noch über einen rechtsseitigen unimodularen Faktor beliebig verfügt werden kann, so darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{Y}[\Omega]$ nach Minkowski reduziert ist. Liegt \mathfrak{Z} in F , so ist nach (22) und (26) jedes Diagonalelement von $\mathfrak{Y}[\Omega]$ mindestens gleich $\frac{1}{2} \sqrt{3}$. Wenn man dann (28) für $\mathfrak{Y}[\Omega]$ statt \mathfrak{Y} anwendet, so folgt

$$(33) \quad |\mathfrak{Y}[\Omega]| > c_3^{-1}.$$

Nun setze man $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{X}_0 + i\lambda \mathfrak{Y}$ mit $\lambda > 0$ und einem beliebigen \mathfrak{X}_0 , das nur den Bedingungen (23) genügt. Nach (31) und (33) wird jetzt

$$\text{abs}(\mathfrak{C}\mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{D}) \geq |\lambda \mathfrak{Y}[\Omega]| > \lambda' c_3^{-1}.$$

Für $\lambda \geq c_3$ liegt also auch \mathfrak{Z}_0 in F .

Von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{X}_1 + i\mathfrak{Y}_1$ von F gelangt man zu einem beliebigen anderen Punkt $\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{X}_2 + i\mathfrak{Y}_2$ von F durch den Streckenzug

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \mathfrak{X}_1 + i\lambda \mathfrak{Y}_1 & (1 \leq \lambda \leq c_3), \\ \mathfrak{Z} &= (1 - \lambda)(\mathfrak{X}_1 + i c_3 \mathfrak{Y}_1) + \lambda(\mathfrak{X}_2 + i c_3 \mathfrak{Y}_2) & (0 \leq \lambda \leq 1), \\ \mathfrak{Z} &= \mathfrak{X}_2 + i\lambda \mathfrak{Y}_2 & (c_3 \geq \lambda \geq 1). \end{aligned}$$

Beachtet man noch, daß mit $|c_3 \mathfrak{Y}_1[\Omega]| > 1$ und $|c_3 \mathfrak{Y}_2[\Omega]| > 1$ auch $|(1 - \lambda)c_3 \mathfrak{Y}_1[\Omega] + \lambda c_3 \mathfrak{Y}_2[\Omega]| > 1$ ist, so folgt aus dem in den beiden vorangehenden Absätzen Bewiesenen, daß die drei Strecken ganz zu F gehören. Daher ist F tatsächlich zusammenhängend.

Von den Bedingungen (21) und (22) lassen wir diejenigen fort, die identisch in \mathfrak{Z} erfüllt sind. Diese erhält man aus (21) für $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\} = \{\mathfrak{R}, \mathfrak{E}\}$ und aus (22), indem man in der Spalte g_k für das Element g_k die Werte ± 1 und alle anderen Elemente gleich 0 setzt. Die inneren Punkte von F sind dann dadurch charakterisiert, daß für sie in allen übrig gebliebenen Bedingungen (21), (22) und (23) nirgends das Gleichheitszeichen steht. Hieraus folgt nun leicht, daß kein innerer Punkt \mathfrak{Z} von F einem anderen Punkte \mathfrak{Z}_1 von F äquivalent sein kann. Ist nämlich

$$(34) \quad \mathfrak{Z}_1 = (\mathfrak{U}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1},$$

so gilt

$$(-\mathfrak{C}'\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{A}')(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}) = \mathfrak{E}.$$

Für das teilerfremde symmetrische Paar $-\mathfrak{C}', \mathfrak{A}'$ liefert (21) die Ungleichung

$$\text{abs}(-\mathfrak{C}'\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{A}') \geq 1.$$

Also ist $\text{abs}(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}) = 1$ und folglich $\mathfrak{C} = \mathfrak{R}$,

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}[\mathfrak{U}] + \mathfrak{E}$$

mit unimodularem \mathfrak{U} und ganzem symmetrischem \mathfrak{E} . Da nun $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}[\mathfrak{U}]$

und \mathfrak{Y} Punkte des Minkowskischen reduzierten Bereiches sind, und zwar \mathfrak{Y} nach Voraussetzung ein innerer Punkt, so folgt weiter $\mathfrak{U} = \pm \mathfrak{E}$. Aus $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X} + \mathfrak{S}$ und (23) erhält man dann $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$, und (34) wird die identische Substitution $\mathfrak{Z}_1 = 3$.

Jetzt untersuchen wir schließlich noch den Rand von F . Es sei \mathfrak{Z} ein Randpunkt von F , also \mathfrak{Z} reduziert, und \mathfrak{Z}_k ($k = 1, 2, \dots$) eine Folge von Punkten aus F , die nicht zu F gehören, aber gegen \mathfrak{Z} konvergieren. Es gibt zu jedem k eine von der Identität verschiedene Modulsstitution, so daß

$$(35) \quad \mathfrak{W}_k = (\mathfrak{A}_k \mathfrak{Z}_k + \mathfrak{B}_k) (\mathfrak{C}_k \mathfrak{Z}_k + \mathfrak{D}_k)^{-1}$$

reduziert ist. Wir betrachten zunächst den Fall, daß es unendlich viele k mit $\mathfrak{C}_k \neq \mathfrak{R}$ gibt. Indem wir zu einer geeigneten Teilfolge übergehen, können wir annehmen, daß \mathfrak{C}_k für alle k von \mathfrak{R} verschieden ist. Es sei r der Rang von \mathfrak{C}_k . Nach (24) und (31) gilt dann

$$(36) \quad \text{abs}(\mathfrak{C}_k \mathfrak{Z}_k + \mathfrak{D}_k)^2 = \text{abs}(\mathfrak{C}_0 \mathfrak{Z}_k [\Omega] + \mathfrak{D}_0)^2 = |\mathfrak{C}_0|^2 |\mathfrak{I}_0|^2 \prod_{k=1}^r (h_k^2 + 1).$$

Dabei ist $\mathfrak{C}_0^{(r)}, \mathfrak{D}_0^{(r)}$ ein teilerfremdes symmetrisches Paar, $|\mathfrak{C}_0| \neq 0$, ferner Ω primitiv, $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{Y}_k [\Omega]$ und h_1, \dots, h_r die Wurzeln der Gleichung $|\lambda \mathfrak{I}_0 - \mathfrak{S}_0| = 0$ mit $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{X}_k [\Omega] + \mathfrak{C}_0^{-1} \mathfrak{D}_0$. Bedeutet wieder \mathfrak{H} die Diagonalmatrix aus den Diagonalelementen h_1, \dots, h_r , so gilt $\mathfrak{I}_0 [\mathfrak{Y}] = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}_0 [\mathfrak{Y}] = \mathfrak{H}$ mit reellem \mathfrak{Y} .

Man kann sich Ω so gewählt denken, daß $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{Y}_k [\Omega]$ den Minkowskischen Reduktionsbedingungen genügt. Das erste Diagonalelement von \mathfrak{I}_0

ist dann kleiner als $c_4 |\mathfrak{I}_0|^{-\frac{1}{r}}$ und andererseits mindestens gleich dem Minimum der quadratischen Form $\mathfrak{Y}_k [\mathfrak{g}]$ für alle ganzen $\mathfrak{g} \neq n$. Für \mathfrak{Y} statt \mathfrak{Y}_k ist das Minimum zufolge (22) und (26) mindestens gleich $\frac{1}{2} |\mathfrak{S}|$, ferner ändert es sich stetig mit \mathfrak{Y}_k . Wegen $\mathfrak{Y}_k \rightarrow \mathfrak{Y}$ gilt also

$$|\mathfrak{I}_0| > c_5^{-1}.$$

Da \mathfrak{W}_k reduziert ist, so ist aber außerdem

$$(37) \quad \text{abs}(\mathfrak{C}_k \mathfrak{Z}_k + \mathfrak{D}_k) \leq 1.$$

In Verbindung mit (36) folgt daraus die Beschränktheit der Zahlen $|\mathfrak{C}_0|$, $|\mathfrak{I}_0|$, h_1, \dots, h_r . Da \mathfrak{I}_0 reduziert ist und die Reziproke des ersten Diagonalelementes beschränkt ist, so ergibt sich die Beschränktheit aller Elemente von \mathfrak{I}_0 . Wegen der Beziehungen $\mathfrak{I}_0 [\mathfrak{Y}] = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{H} [\mathfrak{Y}^{-1}]$ erkennt man dann die Beschränktheit von \mathfrak{Y}^{-1} und \mathfrak{S}_0 . Weil \mathfrak{Y}_k gegen das reduzierte \mathfrak{Y} strebt, gilt ferner die Ungleichung

$$\mathfrak{Y}_k [\mathfrak{g}] \geq c_6^{-1} \mathfrak{g}' \mathfrak{g}$$

für alle genügend großen k . Zufolge der Beschränktheit von \mathfrak{I}_0 ist also auch Ω beschränkt. Ferner ist $\mathfrak{I}_k \rightarrow \mathfrak{I}$, und alle Elemente von \mathfrak{I} liegen zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$. Demnach ist auch $\mathfrak{C}_0^{-1} \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{I}_0 [\Omega]$ beschränkt. In dieser rationalen Matrix ist aber wegen der Beschränktheit von $|\mathfrak{C}_0|$ auch der Nenner beschränkt, also gibt es für sie nur beschränkt viele Möglichkeiten. Auf Grund von (11) ist durch die Kenntnis von $\mathfrak{C}_0^{-1} \mathfrak{D}_0$ die Klasse $\{\mathfrak{C}_0, \mathfrak{D}_0\}$ eindeutig festgelegt. Hieraus ergibt sich die Existenz eines beschränkten teilerfremden symmetrischen Paares $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, so daß für eine unendliche Teilfolge

$$\text{abs}(\mathfrak{C}_k \mathfrak{Z}_k + \mathfrak{D}_k) = \text{abs}(\mathfrak{C} \mathfrak{Z} + \mathfrak{D})$$

gilt und $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{R}$ ist. Aus (37) folgt dann, daß der Randpunkt \mathfrak{Z} auf der Fläche

$$(38) \quad \text{abs}(\mathfrak{C} \mathfrak{Z} + \mathfrak{D}) = 1$$

gelegen ist.

Nun haben wir noch den Fall zu untersuchen, daß in (35) unendlich oft $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{R}$ ist. Dann wird

$$\mathfrak{W}_k = \mathfrak{Z}_k [\mathfrak{U}_k] + \mathfrak{S}_k$$

mit unimodularem \mathfrak{U}_k und ganzem symmetrischem \mathfrak{S}_k . Dabei ist $\mathfrak{Y}_k [\mathfrak{U}_k]$ ein Punkt des Minkowskischen reduzierten Bereiches. Dieser Bereich wird von endlich vielen Ebenen begrenzt. Ist nun $\mathfrak{U}_k \neq \pm \mathfrak{E}$ für unendlich viele k , so folgt, daß der Grenzpunkt \mathfrak{Y} von \mathfrak{Y}_k auf einer dieser Ebenen liegt. Die Gleichungen der Ebenen ergeben sich, indem man in gewissen endlich vielen der Beziehungen (22) das Gleichheitszeichen wählt. Schließlich sei $\mathfrak{U}_k = \pm \mathfrak{E}$ für fast alle k , also

$$\mathfrak{W}_k = \mathfrak{Z}_k + \mathfrak{S}_k$$

mit $\mathfrak{S}_k \neq \mathfrak{R}$. Dann muß aber für \mathfrak{I} in einer der Bedingungen (23) ein Gleichheitszeichen stehen.

Damit ist bewiesen, daß die Begrenzung von F aus endlich vielen algebraischen Flächen besteht, nämlich endlich vielen Ebenen und endlich vielen Flächen mit der Gleichung (38). Wir wollen zum Schluß noch zeigen, daß ein Randpunkt \mathfrak{Z} nur *beschränkt* vielen weiteren Randpunkten $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots$ äquivalent sein kann. Es sei

$$(39) \quad \mathfrak{Z}_k = (\mathfrak{U}_k \mathfrak{Z} + \mathfrak{B}_k) (\mathfrak{C}_k \mathfrak{Z} + \mathfrak{D}_k)^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Dann ist jedenfalls $\text{abs}(\mathfrak{C}_k \mathfrak{Z} + \mathfrak{D}_k) = 1$ und folglich bestehen für die Klasse $\{\mathfrak{C}_k, \mathfrak{D}_k\}$ nur beschränkt viele Möglichkeiten. Wir brauchen daher nur noch den Fall zu betrachten, daß $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{U}_k \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_k = \mathfrak{U}_k \mathfrak{D}_1$ ($k = 1, 2, \dots$) gilt, mit unimodularem \mathfrak{U}_k und festem teilerfremdem symmetrischem Paar $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$. Zufolge (9) ist dann aber

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_k [\mathfrak{U}_k] + \mathfrak{S}_k$$

mit ganzem symmetrischem \mathfrak{S}_k , und für die imaginären Teile \mathfrak{Y}_k von \mathfrak{Z}_k gilt also insbesondere

$$\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_k [\mathfrak{U}_k].$$

Da die \mathfrak{Y}_k sämtlich reduziert sind, so folgt hieraus nach einem wichtigen, zuerst von Minkowski bewiesenen Satze die Beschränktheit von \mathfrak{U}_k . Dann ist aber auch

$$\mathfrak{S}_k = \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_k [\mathfrak{U}_k]$$

beschränkt.

Wir haben übrigens hiermit nicht bewiesen, daß die in (39) möglichen Modulusubstitutionen einer von 3 unabhängigen endlichen Menge angehören; wir haben nämlich nicht die Beschränktheit des einen Paares $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$ bewiesen. Erst hieraus würde sich ergeben, daß von den aus F durch die Modulusubstitutionen entstehenden äquivalenten Bereichen nur endlich viele mit F einen Randpunkt gemeinsam haben. Daß auch dieser schärfere Satz richtig ist, ergibt sich durch genauere Untersuchung der Gleichung (19), und zwar auf ähnliche Art, wie beim Beweis des eben genannten Minkowskischen Satzes über den Rand des Bereiches der reduzierten positiven \mathfrak{Y} . Da wir aber diesen Satz weiterhin nicht gebrauchen werden und sein Beweis ein genaueres Eingehen auf die Minkowskische Reduktionstheorie erfordern würde, so wollen wir uns hier mit diesem Hinweis begnügen.

§ 3.

Modulformen n -ten Grades.

Wie im vorhergehenden Paragraphen seien $\mathfrak{B}^{(n)}$ und $\mathfrak{B}^{(n)}$ zwei komplexe Matrizen, für welche $\mathfrak{B}' \mathfrak{B}$ symmetrisch und die hermitesche Matrix $\frac{1}{2i} (\mathfrak{B}' \overline{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B} \overline{\mathfrak{B}'})$ positiv ist. Wir wollen Funktionen der $2n^2$ Elemente von \mathfrak{B} und \mathfrak{B} betrachten, die stetig sind und bei der vollen homogenen Modulgruppe *invariant* bleiben. Für diese Funktionen $\varphi(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ soll also bei jeder homogenen Modulusubstitution

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A} \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C} \mathfrak{B} + \mathfrak{D} \mathfrak{B}$$

die Gleichung

$$(40) \quad \varphi(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) = \varphi(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$$

erfüllt sein. Ferner sollen sie *homogen* in \mathfrak{B} und \mathfrak{B} sein, in folgendem Sinne: Ersetzt man $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{B} \mathfrak{R}, \mathfrak{B} \mathfrak{R}$ mit beliebigem umkehrbarem \mathfrak{R} , so sollen sie sich mit einem nur von \mathfrak{R} abhängigen Faktor $f(\mathfrak{R})$ multiplizieren; es soll also

$$\varphi(\mathfrak{B} \mathfrak{R}, \mathfrak{B} \mathfrak{R}) = f(\mathfrak{R}) \varphi(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$$

gelten. Ist dann $\varphi(\mathfrak{B}, \mathfrak{W})$ nicht identisch 0, so ist $f(\mathfrak{R})$ ebenfalls stetig und nicht identisch 0. Ferner besteht die Funktionalgleichung

$$f(\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2) = f(\mathfrak{R}_1) f(\mathfrak{R}_2),$$

aus der bekanntlich

$$f(\mathfrak{R}) = |\mathfrak{R}|^\gamma$$

folgt, mit konstantem γ . Wegen

$$\varphi(\mathfrak{B}, \mathfrak{W}) = \varphi(-\mathfrak{B}, -\mathfrak{W}) = f(-\mathfrak{E}) \varphi(\mathfrak{B}, \mathfrak{W})$$

muß noch

$$(-1)^{n\gamma} = 1$$

sein, also $n\gamma$ eine gerade ganze Zahl. Es wird nun

$$(41) \quad \varphi(\mathfrak{B}, \mathfrak{W}) = |\mathfrak{W}|^\gamma \varphi(\mathfrak{B} \mathfrak{W}^{-1}, \mathfrak{E}), \quad \varphi(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{W}_1) = |\mathfrak{W}_1|^\gamma \varphi(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{W}_1^{-1}, \mathfrak{E}).$$

Wir brauchen uns demnach nur noch mit den Funktionen

$$\varphi(\mathfrak{Z}, \mathfrak{E}) = \varphi(\mathfrak{Z})$$

zu beschäftigen, die für alle \mathfrak{Z} aus P stetig sind und nach (40) und (41) der Funktionalgleichung

$$\varphi(\mathfrak{Z}_1) = |\mathfrak{E}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}|^{-\gamma} \varphi(\mathfrak{Z})$$

für jede gebrochene Modulsstitution

$$\mathfrak{Z}_1 = (\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{E}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1}$$

genügen.

Für die ganzen Modulsstitutionen

$$(42) \quad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z} [\mathfrak{U}] + \mathfrak{E},$$

mit unimodularem \mathfrak{U} und ganzem symmetrischem \mathfrak{E} , gilt dann insbesondere

$$\varphi(\mathfrak{Z}_1) = |\mathfrak{U}|^\gamma \varphi(\mathfrak{Z}).$$

Den einfachsten Fall erhalten wir, wenn wir γ selbst als gerade ganze Zahl voraussetzen; dann ist nämlich

$$(43) \quad \varphi(\mathfrak{Z}_1) = \varphi(\mathfrak{Z})$$

für alle ganzen Modulsstitutionen (42).

Unter einer *Modulform n -ten Grades* verstehen wir eine Funktion $\varphi(\mathfrak{Z})$ mit folgenden drei Eigenschaften:

1. Sie ist in P eine reguläre analytische Funktion der $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen Elemente von \mathfrak{Z} ;

2. sie ist im Fundamentalbereich F beschränkt;

3. sie genügt für jede Modulsstitution $\mathfrak{Z}_1 = (\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{E}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1}$ der Funktionalgleichung

$$(44) \quad \varphi(\mathfrak{Z}_1) = |\mathfrak{E}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}|^g \varphi(\mathfrak{Z})$$

mit einer festen geraden Konstanten g .

In dieser Erklärung haben wir g an Stelle von $-\gamma$ geschrieben. Wir werden bald sehen, daß $\varphi(3)$ im Falle $g < 0$ identisch verschwindet und im Falle $g = 0$ identisch konstant ist. Die gerade Zahl g nennen wir das *Gewicht* der Modulform.

Nach (42) und (43) hat die Modulform $\varphi(3)$ in jedem Elemente z_{k1} ($1 \leq k \leq l \leq n$) von 3 die Periode 1. Folglich gilt überall in P eine Fouriersche Entwicklung

$$(45) \quad \varphi(3) = \sum_{\mathfrak{I}} a(\mathfrak{I}) e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{I}3)}.$$

Hierin durchläuft \mathfrak{I} alle halbganzen symmetrischen n -reihigen Matrizen, das Zeichen σ bedeutet die Bildung der *Spur* und die Koeffizienten $a(\mathfrak{I})$ hängen nur von \mathfrak{I} ab. Es sei $\mathfrak{X} = (x_{k1})$ der reelle Teil von $3 = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$, ferner X der Einheitswürfel $-\frac{1}{2} \leq x_{k1} \leq \frac{1}{2}$ ($1 \leq k \leq l \leq n$) und $d\mathfrak{X} = \prod dx_{k1}$ das Volumenelement von X . Dann gilt

$$(46) \quad a(\mathfrak{I}) e^{-2\pi i \sigma(\mathfrak{I}\mathfrak{Y})} = \int_X \varphi(3) e^{-2\pi i \sigma(\mathfrak{I}\mathfrak{X})} d\mathfrak{X}.$$

Es bedeute nun \mathfrak{Y}_0 irgendeinen Punkt des Minkowskischen reduzierten Bereiches. Aus (32) entnimmt man, daß $3 = \mathfrak{X} + i\lambda\mathfrak{Y}_0$ für alle genügend großen Zahlen λ und jedes \mathfrak{X} aus X im Fundamentalbereiche F gelegen ist. Da nun aber $\varphi(3)$ in F beschränkt ist, so ergibt (46) die Beschränktheit des Ausdrucks

$$a(\mathfrak{I}) e^{-2\pi i \lambda \sigma(\mathfrak{I}\mathfrak{Y}_0)}$$

für $\lambda \rightarrow \infty$. Wenn $\sigma(\mathfrak{I}\mathfrak{Y}_0) < 0$ ist, so ist also $a(\mathfrak{I}) = 0$.

Nach (42) und (43) gilt für jedes unimodulare U die Gleichung

$$(47) \quad \varphi(3[U]) = \varphi(3),$$

also wegen der Eindeutigkeit der Fourierschen Entwicklung auch

$$(48) \quad a(\mathfrak{I}[U]) = a(\mathfrak{I}).$$

Für jedes $\mathfrak{Y} > 0$ gibt es ein U , so daß $\mathfrak{Y}[U] = \mathfrak{Y}_0$ reduziert ist. Besteht nun die Ungleichung $\sigma(\mathfrak{I}\mathfrak{Y}) < 0$, so ist auch $\sigma(\mathfrak{I}_0\mathfrak{Y}_0) < 0$, mit $\mathfrak{I}_0[U] = \mathfrak{I}$. Dann ist aber $a(\mathfrak{I}_0) = 0$, und (48) ergibt $a(\mathfrak{I}) = 0$.

Folglich kann $a(\mathfrak{I})$ nur dann von 0 verschieden sein, wenn die Ungleichung $\sigma(\mathfrak{I}\mathfrak{Y}) \geq 0$ für alle positiven \mathfrak{Y} erfüllt ist. Setzt man $\mathfrak{Y} = \mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ mit beliebigem reellem \mathfrak{R} und $|\mathfrak{R}| \neq 0$, so muß also $\sigma(\mathfrak{I}[\mathfrak{R}]) \geq 0$ gelten. Wegen der Stetigkeit in \mathfrak{R} ist dies dann auch noch für $|\mathfrak{R}| = 0$ richtig, also für alle reellen \mathfrak{R} . Das bedeutet aber, daß die quadratische Form $\mathfrak{I}[\mathfrak{x}] \geq 0$ ist für alle reellen \mathfrak{x} ; es ist also \mathfrak{I} nicht-negativ, und wir können die Summation in (45) auf $\mathfrak{I} \geq 0$ beschränken.

Wir verstehen jetzt unter 3_1 eine komplexe symmetrische Matrix mit positivem Imaginärteil und nur $n - 1$ Reihen. Für jede positive Zahl λ ist dann offenbar

$$(49) \quad 3 = \begin{pmatrix} 3_1 & n \\ n' & i\lambda \end{pmatrix}$$

ein Punkt von P . Wir werden beweisen, daß für festes 3_1 und $\lambda \rightarrow \infty$ der Wert der Modulform $\varphi(3)$ gegen einen Grenzwert $\psi(3_1)$ strebt, der als Funktion von 3_1 eine Modulform $(n - 1)$ -ten Grades mit dem gleichen Gewicht wie $\varphi(3)$ ist.

Die aus den ersten $n - 1$ Reihen von \mathfrak{I} gebildete Matrix sei \mathfrak{I}_1 , ferner seien t_1, \dots, t_n die Diagonalelemente von \mathfrak{I} . Es gilt dann

$$(50) \quad \sigma(\mathfrak{I}3) = \sigma(\mathfrak{I}_1 3_1) + i\lambda t_n.$$

Wir setzen voraus, 3_1 liege in einem abgeschlossenen Gebiet G des $n(n - 1)$ -dimensionalen Raumes, in welchem der imaginäre Teil \mathfrak{Y}_1 von 3_1 durchweg positiv ist. Es soll zunächst gezeigt werden, daß für alle reellen nicht-negativen \mathfrak{I}_1 die Ungleichung

$$(51) \quad \sigma(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{Y}_1) \geq \gamma \sigma(\mathfrak{I}_1)$$

gilt, mit einer positiven nur von G und n abhängigen Zahl γ . Diese Behauptung ist jedenfalls richtig für $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{R}$. Es sei $\mathfrak{I}_1 \neq \mathfrak{R}$, also $\sigma(\mathfrak{I}_1) > 0$, wegen $\mathfrak{I}_1 \geq 0$. Da die Ungleichung homogen vom ersten Grade in den Elementen von \mathfrak{I}_1 ist, so kann man weiterhin $\sigma(\mathfrak{I}_1) = 1$ voraussetzen. Läßt man 3_1 in G variieren und \mathfrak{I}_1 in dem durch die Bedingungen $\mathfrak{I}_1 \geq 0$, $\sigma(\mathfrak{I}_1) = 1$ festgelegten Bereiche, so erhält man ein abgeschlossenes endliches Gebiet. In diesem hat die stetige Funktion $\sigma(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{Y}_1)$ ein Minimum γ . Wegen $\mathfrak{Y}_1 > 0$, $\mathfrak{I}_1 \neq \mathfrak{R}$ ist dort ferner überall $\sigma(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{Y}_1) > 0$, also auch $\gamma > 0$.

Andererseits konvergiert die Reihenentwicklung (45) speziell für $3 = i\frac{\gamma}{2}\mathfrak{E}$. Folglich ist für alle halbganzen $\mathfrak{I} \geq 0$ der Ausdruck $a(\mathfrak{I})e^{-\pi\gamma\sigma(\mathfrak{I})}$ beschränkt. Für $\lambda \geq \gamma$ und ein geeignetes nur von G und n abhängiges K ist daher die Reihe

$$K \sum_{\mathfrak{I}} e^{-\pi\gamma\sigma(\mathfrak{I})}$$

eine Majorante für die rechte Seite von (45); dabei ist über alle halbganzen nicht-negativen \mathfrak{I} zu summieren. Die Konvergenz dieser Reihe ist nun leicht einzusehen. Wegen $\mathfrak{I} \geq 0$ ist nämlich $t_{k+1}^2 \leq t_k t_1$ und demnach die Anzahl der

halbganzen \mathfrak{I} mit festem Werte von $\sigma(\mathfrak{I}) = t$ nicht größer als $(4t + 1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Es konvergiert aber sogar die Reihe

$$\sum_{t=0}^{\infty} (4t + 1)^{\frac{n(n+1)}{2}} e^{-\pi\gamma t}.$$

Damit ist nachgewiesen, daß die rechte Seite von (45) *gleichmäßig* für alle 3_1 aus G und $\lambda \geq \gamma$ konvergiert, wobei 3 durch (49) erklärt ist. Jetzt führen wir den Grenzübergang $\lambda \rightarrow \infty$ aus. Nach (50) ist dabei $\lim e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{I} 3)} = e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{I}_1 3_1)}$ für $t_n = 0$, aber $= 0$ für $t_n > 0$. Setzt man noch $a(\mathfrak{I}) = a(\mathfrak{I}_1)$ für

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1 & n \\ n' & 0 \end{pmatrix},$$

so ist also

$$\lim \varphi(3) = \sum_{\mathfrak{I}_1} a(\mathfrak{I}_1) e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{I}_1 3_1)},$$

wobei über alle $(n-1)$ -reihigen halbganzen nicht-negativen \mathfrak{I}_1 zu summieren ist. Da die rechte Seite gleichmäßig in G konvergiert, so ist sie eine dort reguläre analytische Funktion $\psi(3_1)$.

Im ganzen Raume P_1 der 3_1 mit positivem Imaginärteil ist also $\lim \varphi(3) = \psi(3_1)$ regulär. Wir betrachten insbesondere den Fundamentalbereich F_1 in bezug auf die Modulgruppe $(n-1)$ -ten Grades. Ist 3_1 ein Punkt von F_1 , so folgt leicht aus den Ungleichungen (21), (22), (23), (25), daß auch der durch (49) erklärte Punkt 3 für genügend großes λ in F gelegen ist. Da nun $\varphi(3)$ in F beschränkt ist, so folgt die Beschränktheit von $\psi(3_1)$ in F_1 .

Endlich sei

$$(52) \quad 3_1 \rightarrow (\mathfrak{A}_1 3_1 + \mathfrak{B}_1)(\mathfrak{C}_1 3_1 + \mathfrak{D}_1)^{-1}$$

eine Modulsstitution $(n-1)$ -ten Grades. Setzt man dann

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & n \\ n' & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1 & n \\ n' & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 & n \\ n' & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & n \\ n' & 1 \end{pmatrix},$$

so ist

$$(53) \quad 3 \rightarrow (\mathfrak{A} 3 + \mathfrak{B})(\mathfrak{C} 3 + \mathfrak{D})^{-1}$$

eine Modulsstitution n -ten Grades. Hat nun 3 die durch (49) gegebene Gestalt, so bleibt bei (53) diese Gestalt erhalten, wobei λ sich nicht ändert und 3_1 nach (52) transformiert wird. Aus (44) folgt dann durch den Grenzübergang $\lambda \rightarrow \infty$, daß $\psi(3_1)$ bei (52) die Transformation

$$\psi(3_1) \rightarrow |\mathfrak{C}_1 3_1 + \mathfrak{D}_1|^\theta \psi(3_1)$$

erleidet.

Hiermit ist bewiesen, daß $\psi(3_1)$ die drei definierenden Eigenschaften einer Modulform besitzt. Die vorhergehenden Betrachtungen sind zum Teil inhaltlos im Falle $n = 1$, dann ist eben $\lim \varphi(3)$ eine Konstante, und zwar die Konstante $a(0)$ der Fourierschen Entwicklung.

Wir wollen schließlich noch zeigen, daß eine Modulform mit negativem Gewicht g *identisch verschwindet*. Nach (19) und (44) ist der absolute Betrag

von $|\mathfrak{Y}|^{\frac{g}{2}} \varphi(3)$ invariant bei allen Modulsstitutionen. Nun ist $\varphi(3)$ in F beschränkt, und nach (29) gilt das gleiche von $|\mathfrak{Y}|^{-1}$. Ist $g \leq 0$, so ist also der Ausdruck $|\mathfrak{Y}|^{\frac{g}{2}} \varphi(3)$ überall in P beschränkt. Wir wählen speziell $\mathfrak{Y} = \varepsilon \mathfrak{E}$ mit $\varepsilon > 0$ und verwenden (46). Dies liefert die Beschränktheit von $a(\mathfrak{I}) \varepsilon^{\frac{ng}{2}} e^{-\frac{1}{2} \pi s s(\mathfrak{I})}$. Im Falle $g < 0$ zeigt der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ das Verschwinden aller Koeffizienten $a(\mathfrak{I})$.

Will man nachweisen, daß eine Modulform mit dem Gewicht 0 identisch konstant ist, so muß man feinere Abschätzungen benutzen. Der Beweis läßt sich wohl am einfachsten führen, indem man den Satz vom Maximum des absoluten Betrages einer analytischen Funktion anwendet. Man muß dabei aber noch genauer untersuchen, wie sich eine Modulform verhält, wenn 3 auf einer Folge von Punkten aus F ins Unendliche wandert. Diese Untersuchung stößt auf keine Schwierigkeiten. Wir verzichten hier auf die Ausführung, da wir den Satz über die Modulformen vom Gewicht 0 im nächsten Paragraphen als Spezialfall einer allgemeineren Aussage finden werden.

§ 4.

Algebraische Abhängigkeit.

Sind φ_1 und φ_2 zwei Modulformen n -ten Grades mit den Gewichten g_1 und g_2 , so ist ihr Produkt $\varphi_1 \varphi_2$ eine Modulform n -ten Grades mit dem Gewicht $g_1 g_2$. Ist $g_1 = g_2 = g$, so ist ferner für beliebige Konstanten a_1 und a_2 auch $a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2$ eine Modulform vom Gewicht g . Allgemeiner erhält man eine Modulform, indem man mit h Modulformen $\varphi_1, \dots, \varphi_h$ von den Gewichten g_1, \dots, g_h ein isobares Polynom bildet, also ein solches Polynom, in welchem alle wirklich auftretenden Systeme von Exponenten k_1, \dots, k_h in den Potenzprodukten der Variablen einer Gleichung $g_1 k_1 + \dots + g_h k_h = g_0$ mit festem g_0 genügen. Wir wollen dann g_0 auch das *Gewicht* des Polynoms nennen.

Weiterhin sei

$$h = \frac{n(n+1)}{2} + 2.$$

Wir werden in diesem Paragraphen den wichtigen Satz beweisen, daß zwischen je h Modulformen n -ten Grades stets eine isobare algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten besteht. Wir werden genauer beweisen: *Es gibt eine nur von n abhängige natürliche Zahl c_7 , so daß zwischen h beliebigen Modulformen mit den Gewichten g_1, \dots, g_h stets eine isobare algebraische Gleichung vom Gewicht $c_7 g_1 \dots g_h$ besteht.* Unser Beweis wird zugleich eine brauchbare Methode zur Konstruktion dieser Gleichung ergeben.

Wir haben zum Schluß des vorigen Paragraphen gesehen, daß eine Modulform mit negativem Gewicht identisch verschwindet. Es wird sich

ferner weiter unten als Nebenresultat ergeben, daß eine Modulform mit dem Gewicht 0 identisch konstant ist. Wir können also weiterhin voraussetzen, daß die Zahlen g_1, \dots, g_h sämtlich positiv sind. Es sei μ eine natürliche Zahl, die später genau festgelegt werden wird. Zunächst werde nur angenommen, daß μ durch $2h - 2$ teilbar ist. Wir setzen noch zur Abkürzung

$$g_1 g_2 \dots g_h = G.$$

Es soll jetzt die Anzahl der Potenzprodukte $\varphi_1^{k_1} \dots \varphi_h^{k_h}$ vom Gewicht $g_0 = \mu G$ nach unten abgeschätzt werden, also die Anzahl der Lösungen von $g_1 x_1 + \dots + g_h x_h = \mu G$ in nicht-negativen ganzen Zahlen x_1, \dots, x_h . Wir setzen für x_k alle ganzen Zahlen des Intervalls

$$0 \leq x_k \leq \frac{\mu G}{(2h-2)g_k} \quad (k = 1, \dots, h-1).$$

Dies liefert insgesamt

$$H = \prod_{k=1}^{h-1} \left(1 + \frac{\mu G}{(2h-2)g_k} \right)$$

verschiedene Systeme x_1, \dots, x_{h-1} . Für mindestens $\frac{H}{g_h}$ dieser Systeme muß dann der Wert der Linearform $g_1 x_1 + \dots + g_{h-1} x_{h-1}$ einer gewissen festen Restklasse modulo g_h angehören. Es sei ξ_1, \dots, ξ_{h-1} ein festes und $\eta_1, \dots, \eta_{h-1}$ ein variables dieser Systeme, außerdem

$$0 \leq \xi_k < g_h \quad (k = 1, \dots, h-1).$$

Setzt man dann

$$x_k = \eta_k + g_h - \xi_k \quad (k = 1, \dots, h-1),$$

$$x_h = \mu \frac{G}{g_h} - \frac{1}{g_h} (g_1 x_1 + \dots + g_{h-1} x_{h-1}),$$

so ist x_h ganz, $x_k > 0$ für $k = 1, \dots, h-1$ und auch

$$x_h \geq \mu \frac{G}{g_h} - \frac{\mu}{2} \frac{G}{g_h} - (g_1 + \dots + g_{h-1}) \geq 0;$$

jedes der Systeme $\eta_1, \dots, \eta_{h-1}$ führt also zu einer Lösung von $g_1 x_1 + \dots + g_h x_h = \mu G$ in nicht-negativen ganzen Zahlen x_1, \dots, x_h . Setzt man noch zur Abkürzung

$$(54) \quad q = \left(\frac{\mu}{2h-2} \right)^{h-1} G^{h-2},$$

so ist

$$\frac{H}{g_h} > q + 1.$$

Es existieren daher sicher $q + 1$ verschiedene Potenzprodukte $\varphi_1^{k_1} \dots \varphi_h^{k_h}$ vom Gewicht μG . Sie seien in irgendeiner Reihenfolge mit Φ_0, \dots, Φ_q bezeichnet.

Wir bilden mit unbestimmten Koeffizienten $\varrho_0, \dots, \varrho_q$ den Ausdruck

$$(55) \quad \Phi = \varrho_0 \Phi_0 + \dots + \varrho_q \Phi_q.$$

Da dies eine Modulform ist, so gilt eine Fouriersche Entwicklung

$$(56) \quad \Phi = \sum a(\mathfrak{I}) e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{I})},$$

wobei über alle halbganzen nicht-negativen $\mathfrak{I}^{(n)}$ zu summieren ist. Da die Koeffizienten $a(\mathfrak{I})$ homogene lineare Funktionen von $\varrho_0, \dots, \varrho_q$ sind, so lassen sich $\varrho_0, \dots, \varrho_q$ derart wählen, daß $a(\mathfrak{I})$ für q vorgeschriebene Werte von \mathfrak{I} verschwindet.

Im folgenden verstehen wir unter der *Diskriminante* $D(\mathfrak{I})$ die Determinante von \mathfrak{I} , wenn diese positiv ist. Ist aber \mathfrak{I} vom Range $r < n$, so gilt für ein geeignetes unimodulares \mathfrak{U} die Gleichung

$$(57) \quad \mathfrak{I}[\mathfrak{U}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{I} & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

mit $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_1^{(r)}$, und dann definieren wir $D(\mathfrak{I}) = |\mathfrak{I}_1|$. Es ist also $D(\mathfrak{I})$ der größte gemeinsame Teiler der r -reihigen Unterdeterminanten von \mathfrak{I} . Vereinigt man alle mit \mathfrak{I} äquivalenten Matrizen $\mathfrak{I}[\mathfrak{U}]$ zu einer Klasse, so hängt die Diskriminante $D(\mathfrak{I})$ nur von der Klasse von \mathfrak{I} ab. Wir wollen uns diese Klassen nach wachsenden Werten der Diskriminante geordnet denken und abschätzen, für wie viele höchstens $D(\mathfrak{I}) \leq T$ sein kann, wobei T irgendeine natürliche Zahl bedeutet. Bedeutet $K_n(T)$ die Anzahl der Klassen halbganzer nicht-negativer $\mathfrak{I}^{(n)}$ mit $D(\mathfrak{I}) \leq T$, so soll die Ungleichung

$$(58) \quad K_n(T) < c_n T^{\frac{n+1}{2}}$$

bewiesen werden.

Offenbar ist

$$K_1(T) = T + 1 \leq 2T.$$

Es sei $n > 1$ und bereits bewiesen, daß

$$K_{n-1}(T) < c_n T^{\frac{n-1}{2}}$$

gilt. Bedeutet $L_n(T)$ die Anzahl der Klassen halbganzer positiver $\mathfrak{I}^{(n)}$ mit $|\mathfrak{I}| = D(\mathfrak{I}) \leq T$, so gilt zufolge (57) die Formel

$$K_n(T) = L_n(T) + K_{n-1}(T).$$

Um (58) mit geeignetem c_n zu beweisen, hat man also nur die Richtigkeit von

$$L_n(T) < c_{10} T^{\frac{n+1}{2}}$$

zu zeigen.

Ist \mathfrak{T} nach Minkowski reduziert, so gelten zufolge (27), (28) die Ungleichungen

$$0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n, \quad \pm 2 t_{kl} \leq t_k \quad (1 \leq k < l \leq n), \\ t_1 t_2 \dots t_n < c_1 |\mathfrak{T}|.$$

Da nun in jeder Klasse mindestens eine reduzierte Matrix liegt, so genügt es zu beweisen, daß für die Anzahl $M_n(T)$ der halbganzen \mathfrak{T} mit $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n, \pm 2 t_{kl} \leq t_k$ ($1 \leq k < l \leq n$), $t_1 \dots t_n \leq c_1 T$ die Ungleichung

$$(59) \quad M_n(T) < c_{10} T^{\frac{n+1}{2}}$$

erfüllt ist. Da $M_1(T) = c_1 T$ ist, so können wir für den Beweis von (59) voraussetzen, daß die Beziehung

$$(60) \quad M_{n-1}(T) < c_{11} T^{\frac{n}{2}}$$

richtig ist.

Wir schätzen zunächst die Anzahl der zulässigen \mathfrak{T} mit festem t_n ab. Es bedeute τ das Minimum der beiden Zahlen t_n^{n-1} und $\frac{c_1 T}{t_n}$. Wegen der Ungleichungen $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ und $t_1 \dots t_n \leq c_1 T$ ist dann $t_1 \dots t_{n-1} \leq \tau$. Da bei festem t_k für das ganze $2 t_{kn}$ genau $2 t_k + 1$ Möglichkeiten bestehen und $\prod_{k=1}^{n-1} (2 t_k + 1) < c_{12} \tau$ ist, so gibt es bei festem t_n höchstens $c_{12} \tau M_{n-1}(\tau)$ zulässige \mathfrak{T} . Nach (60) ist daher

$$M_n(T) < c_{12} \sum_{t_n=1}^T \tau^{\frac{n}{2}+1}$$

oder, mit Rücksicht auf die Bedeutung von τ ,

$$M_n(T) < c_{13} \sum_{t \leq (c_1 T)^{1/n}} t^{\frac{n(n+1)}{2}-1} + c_{13} (c_1 T)^{\frac{n}{2}+1} \sum_{t > (c_1 T)^{1/n}} t^{-\frac{n}{2}-1} \\ < c_{14} T^{\frac{n+1}{2}} + c_{15} T^{\frac{n}{2}+1} T^{-\frac{1}{2}} = c_{16} T^{\frac{n+1}{2}}.$$

Damit ist (59) bewiesen, also auch (58).

Nach (48) hängt der Koeffizient $a(\mathfrak{T})$ in der Fourierschen Entwicklung (56) nur von der Klasse von \mathfrak{T} ab. Zuzufolge (58) können wir für die Koeffizienten q_0, \dots, q_g in (55) solche nicht sämtlich verschwindende Werte finden, daß alle $a(\mathfrak{T})$ mit $D(\mathfrak{T}) \leq T$ gleich 0 sind, wenn nur

$$(61) \quad q \geq c_n T^{\frac{n+1}{2}}$$

gilt. Setzt man noch

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{1}{h-2},$$

so ist nach der Definition (54) von g die Bedingung (61) mit dem Gleichheitszeichen erfüllt, wenn T durch die Formel

$$(62) \quad T^{\frac{1}{n}} = c_s^{-a} \left(\frac{\mu}{2k-2} \right)^{1+a} G$$

festgelegt wird.

Es soll jetzt bewiesen werden, daß die Modulform Φ identisch verschwindet, wenn μ größer als eine nur von n abhängige Zahl gewählt wird. Da die Gleichung $\Phi = 0$ isobar vom Gewicht μG ist, so wird damit der zu Anfang des Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen sein.

Auf Grund von (62) wächst der Quotient $T^{\frac{1}{n}} : \mu G$ mit μ über alle Grenzen. Also genügt es, die Richtigkeit zu zeigen für den folgenden

Satz. Es sei

$$(63) \quad \varphi(3) = \sum a(\mathfrak{I}) e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{I} \cdot 3)}$$

die Fouriersche Entwicklung einer Modulform vom Gewicht $g > 0$. Dabei seien die Koeffizienten $a(\mathfrak{I}) = 0$ für alle \mathfrak{I} mit $D(\mathfrak{I}) \leq T$. Liegt dann das Verhältnis $T : g^n$ oberhalb einer nur von n abhängigen Schranke, so verschwindet $\varphi(3)$ identisch.

Wir beweisen zunächst, daß für $|\mathfrak{I}| = 0$ jedenfalls $a(\mathfrak{I}) = 0$ sein muß, unter den Voraussetzungen des Satzes. Für

$$3 = \begin{pmatrix} 3_1 & n \\ n' & i\lambda \end{pmatrix}$$

und $\lambda \rightarrow \infty$ gilt, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, die Formel

$$\lim \varphi(3) = \psi(3_1) = \sum_{\mathfrak{I}_1} a(\mathfrak{I}) e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{I} \cdot 3_1)},$$

wobei \mathfrak{I} alle halbganzen nicht-negativen Matrizen der Gestalt

$$(64) \quad \mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1 & n \\ n' & 0 \end{pmatrix}$$

durchläuft. Im Falle $n = 1$ ist $\lim \varphi(3) = a(0)$, also $= 0$ wegen der Voraussetzung über T . Im Falle $n > 1$ nehmen wir an, der Satz sei für $n - 1$ statt n schon bewiesen. Da $\psi(3_1)$ eine Modulform $(n - 1)$ -ten Grades vom Gewicht g ist, so ist sie identisch 0, also $a(\mathfrak{I}) = 0$ für alle \mathfrak{I} der Gestalt (64). Nach (48) und (57) ist dann aber $a(\mathfrak{I}) = 0$ für alle \mathfrak{I} mit verschwindender Determinante.

In (63) braucht man also nur über positive \mathfrak{I} zu summieren. Wir wollen jetzt für alle 3 aus dem Fundamentalbereich F eine Majorante der Reihe bestimmen. Zu diesem Zwecke soll die Ungleichung

$$(65) \quad \sigma(\mathfrak{I} \mathfrak{Y}) \geq \frac{1}{c_{1s}} \sum_{k=1}^n l_k y_k$$

abgeleitet werden. Es bedeute R die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\sqrt{y_1}, \dots, \sqrt{y_n}$. Alle Elemente der positiven Matrix $\mathfrak{Y} [R^{-1}] = \mathfrak{Y}_1$ sind dann absolut höchstens gleich 1 und für die Determinante gilt nach (28) die Abschätzung

$$|\mathfrak{Y}_1| = (y_1 \dots y_n)^{-1} |\mathfrak{Y}| > c_1^{-1}.$$

Folglich liegt \mathfrak{Y}_1 in einem festen abgeschlossenen Gebiet im Innern des Raumes der positiven Matrizen. Verwendet man nun (51) mit n statt $n-1$ und $\mathfrak{I} [R]$ statt \mathfrak{I}_1 , so folgt (65).

Da die Reihe (63) für alle z aus P konvergiert, so ist insbesondere die Folge $a(\mathfrak{I}) e^{-\frac{\pi}{c_{16}} \sigma(\mathfrak{I})}$ beschränkt. Da es genügt, die Behauptung des Satzes für $K \varphi(3)$ an Stelle von $\varphi(3)$ zu beweisen, mit irgendeiner Konstanten $K \neq 0$, so kann man

$$(66) \quad \text{abs } a(\mathfrak{I}) < e^{\frac{\pi}{c_{16}} \sigma(\mathfrak{I})}$$

voraussetzen. In F gilt ferner nach (26) und (27) die Ungleichung

$$\sigma(\mathfrak{I}) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^n t_k y_k.$$

In Verbindung mit (65) und (66) erhält man hieraus

$$(67) \quad \text{abs } a(\mathfrak{I}) e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{I}z)} < e^{-\frac{1}{c_{17}} \sum_{k=1}^n t_k y_k}.$$

Für beliebiges natürliches t sei $A(t)$ die Anzahl der halbganzen positiven \mathfrak{I} mit

$$|\mathfrak{I}| > T, \quad t-1 < \sum_{k=1}^n t_k y_k \leq t.$$

Genügt \mathfrak{I} diesen Bedingungen, so ist sicher

$$t^n \geq \prod_{k=1}^n (t_k y_k) \geq |\mathfrak{I} \mathfrak{Y}| > T |\mathfrak{Y}|,$$

also ist $A(t) = 0$ für $t \leq T^n |\mathfrak{Y}|^{\frac{1}{n}}$. Nach (26) und (27) ist andererseits $A(t)$ nicht größer als die Anzahl der halbganzen nicht-negativen \mathfrak{I} mit $\sigma(\mathfrak{I}) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} t$, also

$$(68) \quad A(t) < c_{16} t^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Aus (67) und (68) folgt

$$(69) \quad \text{abs } \varphi(3) < c_{16} \sum_{t > T^{\frac{1}{n}} |\mathfrak{Y}|^{\frac{1}{n}}} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{e^{-\frac{1}{c_{17}}(t-1)}} < c_{16} e^{-\frac{1}{c_{20}} T^{\frac{1}{n}} |\mathfrak{Y}|^{\frac{1}{n}}}$$

Dies gilt für jeden Punkt 3 des Fundamentalbereiches. Bedeutet δ irgend-eine positive Konstante $< \frac{1}{c_{20}}$, so konvergiert also der Ausdruck

$$e^{\delta T^n} |\mathfrak{Y}|^{\frac{1}{n}} \varphi(3)$$

gegen 0, wenn 3 in F ins Unendliche wandert. Demnach hat der absolute Betrag dieses Ausdrucks in einem *endlichen* Punkte 3_0 von F ein Maximum M und es gilt

$$(70) \quad \text{abs } \varphi(3) \leq M e^{-\delta T^n} |\mathfrak{Y}|^{\frac{1}{n}}$$

für alle 3 aus F , wobei insbesondere für $3 = 3_0$ das Gleichheitszeichen zu setzen ist. Wir haben zu beweisen, daß $M = 0$ ist.

Jetzt sei 3_1 ein beliebiger Punkt von P und 3 ein äquivalenter Punkt von F . Da der absolute Betrag von $|\mathfrak{Y}|^{\frac{g}{2}} \varphi(3)$ bei allen Modulsstitutionen invariant ist, so liefert (70) die Ungleichung

$$\text{abs } \varphi(3_1) \leq M |\mathfrak{Y}_1|^{-\frac{g}{2}} |\mathfrak{Y}|^{\frac{g}{2}} e^{-\delta T^n} |\mathfrak{Y}|^{\frac{1}{n}}.$$

Die Funktion

$$y^{\frac{ng}{2}} e^{-\delta T^n y}$$

hat für $y \geq 0$ das Maximum bei $y = \frac{ng}{2\delta} T^{-\frac{1}{n}}$. Folglich ist

$$(71) \quad \text{abs } \varphi(3_1) \leq M \left(\frac{ng}{2\delta\epsilon} T^{-\frac{1}{n}} |\mathfrak{Y}_1|^{-\frac{1}{n}} \right)^{\frac{ng}{2}}.$$

Dies verwenden wir speziell für $3_1 = \mathfrak{X} + \frac{i}{2} \mathfrak{Y}_0$, wobei also \mathfrak{Y}_0 den imaginären Teil von 3_0 bedeutet, und benutzen (46). Es wird

$$\text{abs } \varphi(3_0) \leq \int_X \text{abs } \varphi(3_1) d\mathfrak{X} \sum_{|\mathfrak{Z}| > T} e^{-\pi \sigma(\mathfrak{Z} \mathfrak{Y}_0)}.$$

Schätzt man die Summe analog wie bei der Herleitung von (69) ab, so folgt wegen (71) die Relation

$$\text{abs } \varphi(3_0) \leq M c_{21} \left(\frac{ng}{\delta\epsilon} T^{-\frac{1}{n}} |\mathfrak{Y}_0|^{-\frac{1}{n}} \right)^{\frac{ng}{2}} e^{-\frac{1}{c_{22}} T^{\frac{1}{n}} |\mathfrak{Y}_0|^{\frac{1}{n}}},$$

also nach (70) auch

$$(72) \quad M e^{\left(\frac{1}{c_{22}} - \delta\right) T^{\frac{1}{n}} |\mathfrak{Y}_0|^{\frac{1}{n}}} \leq M c_{21} \left(\frac{ng}{\delta\epsilon} T^{-\frac{1}{n}} |\mathfrak{Y}_0|^{-\frac{1}{n}} \right)^{\frac{ng}{2}}.$$

Wir wählen noch $\delta^{-1} = c_{20} + c_{22}$ und berücksichtigen (29). Dann wird erst recht

$$M \leq M (c_{23} g^n T^{-1})^{\frac{g}{2}}.$$

Für

$$Tg^{-n} > c_{23}$$

ist also $M = 0$ und damit der Satz bewiesen.

Durch die gleiche Schlußweise ergibt sich, daß jede Modulform $\varphi(3)$ vom Gewicht 0 *identisch konstant* ist. Es sei T eine beliebige natürliche Zahl und $q \geq c_8 T^{\frac{n+1}{2}}$. Man kann dann $q+1$ nicht sämtlich verschwindende Zahlen $\varrho_0, \dots, \varrho_q$ derart bestimmen, daß in der Fourierschen Entwicklung der Funktion

$$\Phi = \varrho_0 + \varrho_1 \varphi + \dots + \varrho_q \varphi^q$$

die Koeffizienten $a(\mathfrak{I}) = 0$ sind für $D(\mathfrak{I}) \leq T$. Dabei ist Φ eine Modulform vom Gewicht 0. Es gilt genau die zu (72) führende Rechnung auch im Falle $g = 0$, wenn dann unter g^q die Zahl 1 verstanden wird. Folglich ist

$$\begin{aligned} \text{abs } \Phi(3) &\leq M e^{-\frac{1}{c_{24}} T^{\frac{1}{n}} |\mathfrak{I}|^{\frac{1}{n}}}, \\ M e^{\frac{1}{c_{25}} T^{\frac{1}{n}}} &\leq M c_{21}. \end{aligned}$$

Wählt man

$$T > (c_{25} \log c_{21})^n,$$

so folgt $M = 0$, also das identische Verschwinden von Φ und damit die Behauptung über φ .

§ 5.

Eisensteinsche Reihen.

Es sei wieder $h = \frac{n(n+1)}{2} + 2$. Im vorigen Paragraphen wurde nachgewiesen, daß je h Modulformen isobar algebraisch abhängig sind. Nunmehr soll die Existenz von $h-1$ algebraisch unabhängigen Modulformen n -ten Grades gezeigt werden.

Zu diesem Zweck betrachten wir die *Eisensteinschen Reihen*

$$(73) \quad \varphi_g(3) = \sum_{(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})} |\mathfrak{C}3 + \mathfrak{D}|^{-g},$$

wo g eine gerade natürliche Zahl bedeutet und das Paar $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ein volles System von Repräsentanten der verschiedenen Klassen teilerfremder symmetrischer Matrizenpaare durchläuft. Wie H. Braun bewiesen hat, ist die Reihe für alle 3 aus P dann und nur dann absolut konvergent, wenn $g > n+1$ ist. Aus dem Beweis ist auch leicht ersichtlich, daß die Reihe im Fundamentalbereich F gleichmäßig konvergiert. Also ist $\varphi_g(3)$ eine in P reguläre und in F beschränkte Funktion von 3. Bei einer Modulsstitution

$$3 = (\mathfrak{A}_1 3_1 + \mathfrak{B}_1) (\mathfrak{C}_1 3_1 + \mathfrak{D}_1)^{-1}$$

wird ferner

$$(74) \quad \mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D} = (\mathfrak{C}_0\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{D}_0)(\mathfrak{C}_1\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{D}_1)^{-1}$$

mit

$$(75) \quad (\mathfrak{C}_0\mathfrak{D}_0) = (\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{D}_1 \end{pmatrix}.$$

Ist auch

$$(\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0) = (\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{D}_1 \end{pmatrix},$$

so folgt nach (4) die Beziehung

$$\mathfrak{C}_0\mathfrak{Q}'_0 - \mathfrak{D}_0\mathfrak{P}'_0 = \mathfrak{C}\mathfrak{Q}' - \mathfrak{D}\mathfrak{P}'.$$

Auf Grund der Definition der Klasse $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}$ bilden die durch (75) erklärten Paare $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{D}_0$ ebenso wie die $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ein volles System nicht-assoziiierter teilerfremder symmetrischer Matrizenpaare. Ersetzt man aber $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ durch irgendeinen anderen Klassenrepräsentanten $\mathfrak{U}\mathfrak{C}, \mathfrak{U}\mathfrak{D}$, mit unimodularem \mathfrak{U} , so bleibt dabei jede *gerade* Potenz der Determinante $|\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}|$ ungeändert. Nach (73) und (74) ist daher

$$\psi_g(\mathfrak{Z}) = |\mathfrak{C}_1\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{D}_1|^g \psi_g(\mathfrak{Z}_1).$$

Demnach ist $\psi_g(\mathfrak{Z})$ eine Modulform mit dem Gewicht g .

Daß kein $\psi_g(\mathfrak{Z})$ identisch verschwindet, ergibt sich aus der Fourierschen Reihenentwicklung, die wir im letzten Paragraphen ableiten werden. Man kann dies aber auch einfacher einsehen, indem man $\mathfrak{Z} = i\lambda\mathfrak{E}$ setzt und die Zahl λ positiv unendlich werden läßt. Aus (24) entnimmt man, daß dann jedes Glied der Reihe (73) für $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\} \neq \{\mathfrak{R}, \mathfrak{E}\}$ den Grenzwert 0 hat, und aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe folgt nun $\lim \psi_g(\mathfrak{Z}) = 1$. Also ist $\psi_g(\mathfrak{Z})$ nicht identisch gleich 0. Für jedes Gewicht $g > n + 1$ existiert daher eine nicht-triviale Modulform n -ten Grades.

Es sei jetzt $\Phi_g(\mathfrak{Z})$ irgendeine nicht identisch verschwindende Modulform vom Gewicht g , z. B. die Funktion $\psi_g(\mathfrak{Z})$ selbst, und \mathfrak{Z} ein Punkt aus P mit $\Phi_g(\mathfrak{Z}) \neq 0$. Wir bilden mit beliebigem komplexen λ die Reihe

$$M(\lambda) = \sum_{(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})} (\lambda - \Phi_g(\mathfrak{Z}) |\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}|^g)^{-1}.$$

Die hierdurch erklärte Funktion von λ ist offenbar meromorph. Ihre Pole sind sämtlich von erster Ordnung und liegen in den Punkten

$$(76) \quad \lambda = \Phi_g(\mathfrak{Z}) |\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}|^g.$$

Setzt man noch

$$\varphi_{k,g}(\mathfrak{Z}) \Phi_g^{-k}(\mathfrak{Z}) = f_k(\mathfrak{Z}) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

so gilt zufolge (73) in einer gewissen Umgebung von $\lambda = 0$ die Potenzreihenentwicklung

$$(77) \quad -M(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(3) \lambda^{k-1}.$$

Ist die Folge der Werte $f_1(3), f_2(3), \dots$ gegeben, so kennt man die Potenzreihe der meromorphen Funktion $M(\lambda)$ und findet durch analytische Fortsetzung die sämtlichen Pole (76), also die Menge der Zahlen $\Phi_\nu(3) | \mathfrak{C}3 + \mathfrak{D} |^\nu$, aber zunächst ohne ihre Zuordnung zu den Klassen $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}$.

Es sei auch 3_1 ein Punkt aus P mit $\Phi_\nu(3_1) \neq 0$. Wir wollen im folgenden untersuchen, wann die unendlich vielen Gleichungen $f_k(3) = f_k(3_1)$ ($k = 1, 2, \dots$) sämtlich erfüllt sein können. Dies ist zunächst sicher der Fall, wenn 3 und 3_1 äquivalent sind, denn die Funktionen $f_k(3)$ sind gegenüber den Modulsstitutionen absolut invariant. Wir wollen beweisen: *Liegt 3 nicht auf gewissen algebraischen Flächen, von denen durch jeden abgeschlossenen Teilbereich von P nur endlich viele gehen, so folgt aus den Gleichungen $f_k(3) = f_k(3_1)$ ($k = 1, 2, \dots$) die Äquivalenz von 3 und 3_1 .* Da die Berandung des Fundamentalbereiches F von endlich vielen algebraischen Flächen gebildet wird, so kann man zum Beweis dieser Behauptung wegen der Invarianzeigenschaft von $f_k(3)$ voraussetzen, daß 3 und 3_1 Punkte von F sind, und zwar 3 ein innerer Punkt. Für alle Klassen $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\} \neq \{\mathfrak{R}, \mathfrak{E}\}$ ist dann $\text{abs}(\mathfrak{C}3 + \mathfrak{D}) > 1$ und $\text{abs}(\mathfrak{C}3_1 + \mathfrak{D}) \geq 1$. Unter allen Polen der Funktion $M(\lambda)$ liegt genau einer dem Nullpunkt am nächsten, nämlich $\lambda = \Phi_\nu(3)$. Folglich ist auch $\text{abs}(\mathfrak{C}3_1 + \mathfrak{D}) > 1$ für $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\} \neq \{\mathfrak{R}, \mathfrak{E}\}$ und $\Phi_\nu(3) = \Phi_\nu(3_1)$.

Für eine gewisse Permutation $\{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1\}$ aller Klassen $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\} \neq \{\mathfrak{R}, \mathfrak{E}\}$ muß jetzt

$$(78) \quad |\mathfrak{C}3 + \mathfrak{D}| = \varepsilon |\mathfrak{C}_1 3_1 + \mathfrak{D}_1|$$

gelten, wobei ε eine g -te Einheitswurzel bedeutet, die noch von $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, 3, 3_1$ abhängen kann. Es liege 3 in einem abgeschlossenen Teilbereich G von F . Unter Benutzung von (31) erkennt man, daß bei jeder festen Klasse $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}$ und variablem 3_1 aus F die Gleichung (78) nur für endlich viele von G abhängige Klassen $\{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1\}$ erfüllt sein kann. Man wähle speziell \mathfrak{C} vom Range 1. Hat \mathfrak{C}_1 den Rang r , so geht (78) vermöge (12) über in

$$(79) \quad c 3 [q] + d = \varepsilon |\mathfrak{C}_2 3_2 + \mathfrak{D}_2|;$$

dabei ist $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{D}_2$ ein r -reihiges teilerfremdes symmetrisches Matrizenpaar, $|\mathfrak{C}_2| \neq 0$, $3_2 = 3_1 [\Omega_2]$ mit ganzem $\Omega_2 = \Omega_2^{(n)}$, ferner sind c, d irgend zwei teilerfremde Zahlen und q irgendeine Spalte aus n teilerfremden Elementen. Setzt man insbesondere c, d gleich 1, 1 und 1, 0 bei festgehaltenem q , so folgt aus (79) durch Subtraktion eine Gleichung

$$(80) \quad \varepsilon_2 |\mathfrak{C}_2 3_2 + \mathfrak{D}_2| - \varepsilon_3 |\mathfrak{C}_2 3_2 + \mathfrak{D}_2| = 1$$

mit einem s -reihigen teilerfremden symmetrischen Paar $\mathfrak{C}_3, \mathfrak{D}_3$, $|\mathfrak{C}_3| \neq 0$, $\mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{Z}_1[\mathfrak{Q}_3]$, ganzem $\mathfrak{Q}_3 = \mathfrak{Q}_3^{(n, d)}$ und g -ten Einheitswurzeln $\varepsilon_2, \varepsilon_3$. Es sei q_{kl} die Spalte, in welcher das k -te und l -te Element den Wert 1 haben und alle anderen den Wert 0. Dann wird $\mathfrak{Z}[q_{kl}] = z_k$ für $k = l$ und $\mathfrak{Z}[q_{kl}] = z_k + z_l + 2z_{kl}$ für $k \neq l$. Aus (79) ergeben sich dann alle Elemente von \mathfrak{Z} als Polynome in den Elementen von \mathfrak{Z}_1 , und die Koeffizienten dieser Polynome gehören einem endlichen Wertevorrat an. Gilt nun (80) nicht identisch in \mathfrak{Z}_1 , so würde durch Elimination von \mathfrak{Z}_1 folgen, daß \mathfrak{Z} auf einer von endlich vielen algebraischen Flächen gelegen ist. Wegen unserer Voraussetzung können wir diesen Fall ausschließen, und es muß also (80) identisch in \mathfrak{Z}_1 gelten. Man schreibe diese Gleichung in der Gestalt

$$(81) \quad |\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_3| - \alpha |\mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{Z}_3| = \beta$$

mit $\alpha\beta \neq 0$, $\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{C}_2^{-1} \mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{C}_3^{-1} \mathfrak{D}_3$. Hieraus folgt zunächst $r = s$ und $|\mathfrak{Z}_2| = \alpha |\mathfrak{Z}_3|$. Da diese Gleichung identisch in \mathfrak{Z}_1 besteht, so zeigt eine einfache Betrachtung, daß $\mathfrak{Q}_3 = \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{R}$ ist, mit konstantem \mathfrak{R} und $\alpha |\mathfrak{R}|^3 = 1$. In (81) kann man also $\alpha = 1$ und $\mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{Z}_2$ voraussetzen. Wäre nun $r > 1$, so folgte durch Vergleich der Glieder $(r-1)$ -ter Dimension die Beziehung $\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_3$ und damit der Widerspruch $\beta = 0$. Also ist $r = 1$. Aus der Identität (80) ergibt sich ferner, daß beide Einheitswurzeln $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ rationale Zahlen sind, also den Wert ± 1 haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß sie beide gleich 1 sind, da in $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{D}_2$ noch ein linksseitiger unimodularer Faktor willkürlich ist.

Die Elemente z_{kl} von \mathfrak{Z} sind folglich lineare Funktionen der Elemente ζ_{kl} von \mathfrak{Z}_1 , etwa

$$(82) \quad z_{kl} = a_{kl} + \sum_{\kappa, \lambda} a_{kl, \kappa \lambda} \zeta_{\kappa \lambda}$$

wobei die Koeffizienten a_{kl} und $a_{kl, \kappa \lambda}$ rationale Zahlen aus einem endlichen Wertevorrat sind. Benutzen wir (79) für $c = 1$, $d = 0$ und alle Spalten q , deren Elemente q_1, \dots, q_n einem beliebig vorgegebenen endlichen Vorrat von Systemen teilerfremder Zahlen angehören, so liefert (82) eine Beziehung

$$\sum_{k, l, \kappa, \lambda} a_{kl, \kappa \lambda} \zeta_{\kappa \lambda} q_k q_l = c \sum_{\kappa, \lambda} \zeta_{\kappa \lambda} p_\kappa p_\lambda$$

mit ganzem $c \neq 0$ und teilerfremden Zahlen p_1, \dots, p_n . Dabei können wir wieder voraussetzen, daß dies identisch in \mathfrak{Z}_1 gilt. Es wird dann

$$(83) \quad \sum_{k, l} (a_{kl, \kappa \lambda} + a_{kl, \lambda \kappa}) q_k q_l = 2c p_\kappa p_\lambda.$$

Faßt man κ als Zeilenindex und λ als Spaltenindex auf, so hat also die mit den linken Seiten von (83) gebildete n -reihige Matrix den Rang 1; und zwar gilt dies auch identisch in q_1, \dots, q_n , wenn es für genügend viele Zahlensysteme q_1, \dots, q_n richtig ist. Beachtet man nun noch, daß es in (82) nur

auf die Verbindung $a_{k1, \lambda 1} + a_{k1, \lambda 2}$ ankommt, so folgt leicht, daß man $a_{k1, \lambda 1} = b_{\lambda k} b_{\lambda 1}$ wählen kann und demnach

$$(84) \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 [\mathfrak{B}] + \mathfrak{A}$$

mit gewissen Matrizen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} aus einem endlichen Vorrat. Aus (83) entnimmt man, daß $\mathfrak{B} = \sqrt{c} \mathfrak{G}$ ist, mit ganzem \mathfrak{G} . Da nach (84) auch \mathfrak{Z}_1 in einem abgeschlossenen Teilgebiet von F liegt, so gilt das für \mathfrak{Z} Bewiesene auch analog für \mathfrak{Z}_1 . Folglich ist $\mathfrak{B}^{-1} = \sqrt{c_0} \mathfrak{G}_1$, mit ganzen c_0, \mathfrak{G}_1 . Also ist \mathfrak{G} unimodular $= \mathfrak{U}$ und $c = \pm 1$, also $\mathfrak{Z} = \pm \mathfrak{Z}_1 [\mathfrak{U}] + \mathfrak{A}$. Hierin kann nicht das untere Vorzeichen gelten, da \mathfrak{Z} und \mathfrak{Z}_1 beide positiven Imaginärteil haben.

Wählen wir endlich $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}, \mathfrak{D} = \mathfrak{D}$ in (78), so folgt

$$|\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{A} [\mathfrak{U}^{-1}]| = \varepsilon |\mathfrak{C}_1 \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{D}_1|,$$

und zwar bei geeigneter Voraussetzung wieder identisch in \mathfrak{Z}_1 . Es wird demnach $\varepsilon |\mathfrak{C}_1| = 1$ und $\mathfrak{A} [\mathfrak{U}^{-1}] = \mathfrak{C}_1^{-1} \mathfrak{D}_1$. In der Gleichung $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 [\mathfrak{U}] + \mathfrak{A}$ ist also \mathfrak{A} ganz. Damit ist nachgewiesen, daß \mathfrak{Z} und \mathfrak{Z}_1 äquivalent sind. Da aber beide Punkte im Innern von F liegen, so folgt $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}$.

Wir können nunmehr beweisen, daß es unter den unendlich vielen Funktionen $f_k(3)$ sicherlich $\frac{n(n+1)}{2}$ algebraisch unabhängige geben muß. Es sei q die Höchstzahl algebraisch unabhängiger unter diesen Funktionen. Sind dann die q Funktionen $f_{k_a}(3) = \chi_a(3)$ für $a = 1, \dots, q$ algebraisch unabhängig, so genügt jede der Funktionen $f_k(3)$ einer algebraischen Gleichung $A_k(f_k) = 0$, deren Koeffizienten Polynome in den χ_a sind. Die Diskriminante D_k von $A_k(f_k)$ ist ebenfalls ein Polynom in den χ_a ; wir können annehmen, daß sie nicht identisch verschwindet.

Wie oben bewiesen wurde, läßt sich im Fundamentalbereich F ein abgeschlossenes Gebiet G so wählen, daß für keinen Punkt \mathfrak{Z} aus G und keinen Punkt $\mathfrak{Z}_1 \neq \mathfrak{Z}$ aus F die sämtlichen Gleichungen $f_k(3) = f_k(3_1)$ gelten. In G gibt es ein Gebiet G_1 , in welchem überall $D_1 \neq 0$ ist, darin wieder ein Gebiet G_2 , in welchem auch $D_2 \neq 0$ ist, allgemein eine Folge von ineinander geschachtelten abgeschlossenen Gebieten G_1, G_2, \dots , so daß in G_k überall $D_k \neq 0$ ist. Also existiert jedenfalls im Innern von G ein Punkt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0$, für den alle Diskriminanten D_k von 0 verschieden sind. Wäre nun $q < \frac{n(n+1)}{2}$, so würde durch die q Bedingungsgleichungen

$$(85) \quad \chi_a(3) = \chi_a(3_0) \quad (a = 1, \dots, q)$$

eine analytische Mannigfaltigkeit von mindestens $\frac{n(n+1)}{2} - q$ komplexen Parametern definiert. Es gäbe also in G eine Kurve durch den Punkt \mathfrak{Z}_0 , auf welcher überall die Bedingungen (85) erfüllt wären. Wegen $D_k \neq 0$

wäre dann aber auf dieser Kurve auch $f_k(3) = f_k(3_0)$ für alle k , und das ist ein Widerspruch. Folglich ist $q \geq \frac{n(n+1)}{2}$.

Wäre $q > \frac{n(n+1)}{2}$, so hätte man in den $q+1$ Funktionen $\psi_k = \Phi_g^k f_k$ ($k = k_1, k_2, \dots, k_q$) und Φ_g mindestens $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ Modulformen. Nach dem Satze des § 4 besteht zwischen diesen eine isobare algebraische Gleichung. Da ψ_k und Φ_g^k gleiches Gewicht haben, so erhielte man eine algebraische Gleichung zwischen den Funktionen χ_1, \dots, χ_q . Folglich ist $q = \frac{n(n+1)}{2}$. Es ist jetzt noch leicht zu sehen, daß $\chi_1(3), \dots, \chi_q(3)$ sogar analytisch unabhängig sind. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man (85) wieder auf einer Kurve durch 3_0 erfüllen, was aber unmöglich ist.

Wir können speziell $\Phi_g = \psi_g$ wählen. Dann sind also die $q+1$ Modulformen ψ_k ($k = 1, k_1, k_2, \dots, k_q$) isobar algebraisch unabhängig. Sie sind dann übrigens überhaupt algebraisch unabhängig; denn aus einer nicht-isobaren algebraischen Gleichung zwischen den ψ_k würde durch die Modulsubstitutionen folgen, daß die Determinante $|\mathfrak{C}3 + \mathfrak{D}|$ für alle Klassen $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}$ einer und derselben algebraischen Gleichung genüge, während sie doch für jedes feste 3 aus P unendlich viele verschiedene Werte hat.

Wir betrachten jetzt die Ausdrücke $\lambda^k \psi_k(3)$ für alle geraden $k > n+1$, wobei λ ein willkürlicher Parameter $\neq 0$ ist. Aus der Formel

$$-\lambda^{-g} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{kg} \psi_{k_g}(3) = \sum_{\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}} (\lambda^g - |\mathfrak{C}3 + \mathfrak{D}|^g)^{-1}$$

ist ersichtlich, daß für jedes 3 aus P mindestens ein $\psi_k(3) \neq 0$ ist. Wir haben bewiesen, daß 3 im Fundamentalbereich F eine eindeutige Funktion der Werte $\lambda^k \psi_k(3)$ ist, wenn nicht 3 auf gewissen algebraischen Flächen liegt, von denen durch jeden abgeschlossenen Teilbereich von F nur endlich viele gehen. Unter den Ausdrücken $\lambda^k \psi_k(3)$ gibt es $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ algebraisch unabhängige, und je $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ von ihnen sind isobar algebraisch abhängig.

§ 6.

Modulfunktionen.

Jeder Quotient von Modulformen gleichen Gewichtes soll *Modulfunktion* genannt werden. Ist $\chi(3) = \varphi_1(3) : \varphi_2(3)$ eine Darstellung der Modulfunktion $\chi(3)$ als Quotient von zwei Modulformen mit möglichst kleinem Gewicht g , so soll g die *Ordnung* von $\chi(3)$ heißen.

Nach § 5 gibt es $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ algebraisch unabhängige Eisensteinsche Reihen $\psi_{i_0}, \dots, \psi_{i_q}$. Nach § 4 besteht zwischen den $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ Modul-

formen $\varphi_1, \psi_{l_0}, \dots, \psi_{l_q}$ eine isobare algebraische Gleichung vom Gewicht $c_7 g l_0 l_1 \dots l_q$. Jedes in dieser Gleichung auftretende Potenzprodukt $\varphi_1^a \psi_0^{a_0} \dots \psi_q^{a_q}$ hat dann die Eigenschaft

$$ag + a_0 l_0 + \dots + a_q l_q = c_7 g l_0 \dots l_q,$$

und folglich ist

$$(86) \quad a \leq c_7 l_0 \dots l_q.$$

Eine ebensolche Gleichung erhält man für φ_2 an Stelle von φ_1 . Durch Elimination von φ_1 und φ_2 gewinnen wir eine algebraische Gleichung zwischen den Funktionen $\chi, \psi_{l_0}, \dots, \psi_{l_q}$. Diese Gleichung ist isobar in den Funktionen $\psi_{l_0}, \dots, \psi_{l_q}$. Ferner ist ihr Grad in bezug auf χ beschränkt, und zwar hängt diese Schranke nach (86) nur von n ab, wenn l_0, \dots, l_q fest gewählt sind. Nimmt man wie in § 5 die Zahlen l_0, \dots, l_q gleich $g, k_1 g, \dots, k_q g$ und setzt

$$\chi_a = \psi_g^{-k_a} \psi_{k_a g} \quad \left(a = 1, \dots, \frac{n(n+1)}{2} \right),$$

so sind die χ_a insgesamt $\frac{n(n+1)}{2}$ algebraisch unabhängige feste Modulfunktionen. Jede Modulfunktion χ genügt dann einer algebraischen Gleichung beschränkten Grades, deren Koeffizienten Polynome in den χ_a sind. *Folglich bilden die Modulfunktionen einen algebraischen Funktionenkörper mit genau $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen Elementen.*

Wie in § 5 bewiesen wurde, ist 3 im Fundamentalbereich F eine im allgemeinen eindeutige Funktion der unendlich vielen Werte $\lambda^k \psi_k(3)$, also ist auch die Modulfunktion $\chi(3)$ eine solche eindeutige Funktion, und zwar wegen der Invarianzeigenschaft gegenüber der Modulgruppe überall in P , abgesehen von gewissen sich nirgends häufenden algebraischen Flächenstücken. Andererseits ist aber χ eine algebraische Funktion der $\lambda^k \psi_k$. Hieraus folgt nun aber, daß χ sogar eine rationale Funktion dieser Werte ist. *Also läßt sich jede Modulfunktion rational durch die Eisensteinschen Reihen ausdrücken, und zwar als Quotient von zwei isobaren Polynomen gleichen Gewichtes.*

Die Sätze über die Modulfunktionen ergaben sich deshalb so einfach aus den Eigenschaften der Modulformen, weil wir die Modulfunktionen direkt als Quotienten von Modulformen gleichen Gewichtes erklärt haben. Diese Definition ist gerade für viele Fälle zweckmäßig. Man kann nun aber die Voraussetzungen in der Definition noch abschwächen. Jede Modulfunktion $\chi(3)$ ist nach unserer Erklärung meromorph in P , invariant bei der Modulgruppe und für alle Punkte 3 aus F mit genügend großem absoluten Betrag der Determinante $|3|$ als Quotient zweier Fourierscher Reihen der Gestalt (45) mit nicht-negativen \mathfrak{Z} darstellbar. Daß umgekehrt diese Eigenschaften

auch ausreichen, um eine Modulfunktion zu charakterisieren, läßt sich beweisen, aber nicht mehr ohne Heranziehung von recht mühsam abzuleitenden funktionentheoretischen Hilfssätzen. Hierbei hätte man die Gedankengänge zu verwenden, mit denen Blumenthal die algebraische Abhängigkeit von Funktionen mit gewissen Fundamentalbereichen hergeleitet hat.

§ 7.

Fouriersche Entwicklung der Eisensteinschen Reihen.

Für arithmetische Anwendungen der Modulfunktionen ist es von Wichtigkeit, daß die Koeffizienten $a(\mathfrak{I})$ der Fourierschen Reihenentwicklung bei den Eisensteinschen Reihen $\psi_r(3)$ sämtlich *rationale* Zahlen sind. Da dieser Satz nicht ganz leicht zu beweisen ist, so möge er hier noch abgeleitet werden.

Zur Gewinnung der Fourierschen Reihe für ψ_r bedient man sich am besten einer Verallgemeinerung der Partialbruchzerlegung der Cotangens-Funktion, nämlich der Formel

$$(87) \quad \sum_{\mathfrak{I}} |\mathfrak{I}|^{\sigma - \frac{n+1}{2}} e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{I}3)} \\ = (4\pi)^{-\frac{n(n-1)}{4}} (2\pi i)^{-n\sigma} \Gamma(g) \Gamma\left(g - \frac{1}{2}\right) \dots \Gamma\left(g - \frac{n-1}{2}\right) \sum_{\mathfrak{G}} |3 + \mathfrak{G}|^{-\sigma};$$

dabei läuft \mathfrak{I} über alle halbganzen positiven symmetrischen $\mathfrak{I}^{(n)}$ und \mathfrak{G} über alle ganzen symmetrischen $\mathfrak{G}^{(n)}$. Diese Relation erhält man leicht, indem man auf ihre linke Seite die Poissonsche Summenformel anwendet und von der Integralformel

$$\int_Y |\mathfrak{Y}|^{\sigma - \frac{n+1}{2}} e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{Y}3)} d\mathfrak{Y} \\ = \pi^{-\frac{n(n-1)}{4}} (2\pi i)^{-n\sigma} \Gamma(g) \Gamma\left(g - \frac{1}{2}\right) \dots \Gamma\left(g - \frac{n-1}{2}\right) |3|^{-\sigma}$$

Gebrauch macht, in welcher $d\mathfrak{Y}$ das Volumenelement des Raumes Y aller positiven symmetrischen $\mathfrak{Y}^{(n)}$ bedeutet.

In der Eisensteinschen Reihe (73) fassen wir zunächst alle Klassen $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}$ zusammen, für welche \mathfrak{C} den gleichen Rang r besitzt. Unter Benutzung von (12) erhält man dann die Zerlegung

$$(88) \quad \psi_r(3) = 1 + \sum_{r=1}^n \omega_r$$

mit

$$(89) \quad \omega_r = \sum_{\substack{(\mathfrak{C}^{(r)}, \mathfrak{D}^{(r)}) \\ (\mathfrak{Q}^{(n)}, r)}} |\mathfrak{C}|^{-\sigma} |3[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{D}|^{-\sigma},$$

wobei über alle nicht-assoziierten teilerfremden symmetrischen r -reihigen Paare $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ unter der Bedingung $|\mathfrak{C}| \neq 0$ zu summieren ist und \mathfrak{Q} alle zu einer n -reihigen unimodularen Matrix ergänzbaren Matrizen $\mathfrak{Q}^{(n, r)}$ durchläuft, welche sich nicht durch einen rechtsseitigen r -reihigen unimodularen Faktor unterscheiden.

Um nun die Reihe (89) vermöge (87) umzuformen, fassen wir die Glieder mit den gleichen $\mathfrak{C}, \mathfrak{Q}$ zusammen, für welche außerdem $\mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{D}$ in einer festen Restklasse modulo 1 liegt. Das allgemeine \mathfrak{D} mit dieser Eigenschaft ergibt sich aus einem speziellen $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1$ in der Gestalt $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{C} \mathfrak{S}$, mit beliebigem ganzen symmetrischen \mathfrak{S} . Damit ist dann (89) aufgespalten in Reihen vom Typus der rechten Seite in (87), und man kann diese Formel anwenden. Dabei erhält man für $\mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{D} = \mathfrak{X}$ alle r -reihigen rationalen symmetrischen Matrizen modulo 1. Wie leicht zu sehen ist, bestimmt sich aus \mathfrak{X} auch wieder die Klasse $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}$ eindeutig. Speziell ist der absolute Betrag der Determinante $|\mathfrak{C}|$ gleich dem Produkt der gekürzten Nenner der Elementarteiler von \mathfrak{X} ; hierfür werde $\nu(\mathfrak{X})$ geschrieben. Daher gilt

$$(90) \quad \omega_r = \frac{(4\pi)^{\frac{r(r-1)}{4}} (2\pi i)^r}{\Gamma(g) \Gamma(g - \frac{1}{2}) \dots \Gamma(g - \frac{r-1}{2})} \sum_{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Q}, \mathfrak{X}} |\mathfrak{X}_1|^{g - \frac{r+1}{2}} \nu(\mathfrak{X})^{-g} e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{X}_1, 3[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X})},$$

wobei über alle rationalen symmetrischen $\mathfrak{X}^{(r)}$ modulo 1, alle halbganzen positiven symmetrischen $\mathfrak{X}_1^{(r)}$ und dieselben $\{\mathfrak{Q}\}$ wie in (89) summiert wird. Beachtet man endlich noch, daß $\mathfrak{X}_1[\mathfrak{Q}'] = \mathfrak{X}$ genau alle halbganzen nicht-negativen symmetrischen $\mathfrak{X}^{(n)}$ vom Range r durchläuft, so erhält man für die Koeffizienten der Fourierschen Entwicklung von $\psi_r(3)$ vermöge (88) und (90) die Werte

$$a(\mathfrak{X}) = (-1)^{\frac{r g}{2}} 2^{r(g - \frac{r-1}{2})} \prod_{l=0}^{r-1} \frac{\pi^{\frac{g-l}{2}}}{\Gamma(g - \frac{l}{2})} \cdot D(\mathfrak{X})^{g - \frac{r+1}{2}} \sum_{\mathfrak{X}} e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X})} \nu(\mathfrak{X})^{-g};$$

hierin ist \mathfrak{X}_1 durch (57) erklärt und $D(\mathfrak{X}) = |\mathfrak{X}_1|$ die Diskriminante von \mathfrak{X} .

Um zu beweisen, daß $a(\mathfrak{X})$ eine rationale Zahl ist, kann man sich offenbar auf den Fall $r = n$, also $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}$ beschränken. Setzen wir noch

$$S = \sum_{\mathfrak{X}} e^{-2\pi i \sigma(\mathfrak{X} \mathfrak{X})} \nu(\mathfrak{X})^{-g},$$

wo \mathfrak{X} alle n -reihigen rationalen symmetrischen Matrizen modulo 1 durchläuft, so haben wir zu zeigen, daß für gerades n die Zahl $\pi^{ng - \frac{n^2}{4}} |\mathfrak{X}|^{\frac{1}{2}} S$ rational ist und für ungerades n die Zahl $\pi^{ng - \frac{n^2-1}{4}} S$. Zu diesem Zwecke verwandeln wir S in ein über alle Primzahlen p zu erstreckendes Produkt.

Durchläuft \mathfrak{R}_p alle rationalen Matrizen modulo 1, für welche $\nu(\mathfrak{R}_p)$ eine Potenz von p allein ist, so ist nämlich umkehrbar eindeutig

$$\mathfrak{R} \equiv \sum_p \mathfrak{R}_p \pmod{1},$$

und ferner gilt dabei

$$\nu(\mathfrak{R}) = \prod_p \nu(\mathfrak{R}_p).$$

Setzt man

$$(91) \quad S_p = \sum_{\mathfrak{R}_p} e^{-2\pi i \sigma(\mathfrak{T} \mathfrak{R}_p)} \nu(\mathfrak{R}_p)^{-g},$$

so wird also

$$S = \prod_p S_p.$$

Zur Berechnung der Faktoren S_p setzen wir zunächst $p \neq 2$ voraus. Es sei P eine durch $\nu(\mathfrak{R}_p)$ teilbare Potenz von p und

$$(92) \quad G = \sum_{f \pmod{P}} e^{2\pi i \mathfrak{R}_p[f]},$$

wo die Spalte f ein volles Restsystem modulo P durchläuft. Es gibt eine unimodulare Matrix U , so daß $\mathfrak{R}_p[U]$ modulo P einer Diagonalmatrix kongruent wird. Sind $a_l p^{-v_l}$ ($l = 1, \dots, n$) ihre Diagonalelemente in gekürzter Form, so ist

$$\nu(\mathfrak{R}_p) = p^{v_1 + v_2 + \dots + v_n}$$

und

$$G = \prod_{l=1}^n \sum_{k=1}^P e^{2\pi i a_l p^{-v_l} k^2}$$

Bis auf eine vierte Einheitswurzel als Faktor ist nun die einfache Gaußsche Summe gleich $P p^{-\frac{v_l}{2}}$ und demnach

$$(93) \quad G^{2g} = P^{2ng} \nu(\mathfrak{R}_p)^{-g},$$

$$\nu(\mathfrak{R}_p)^{-g} = P^{-2ng} \sum_{\mathfrak{R} \pmod{P}} e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{R}_p[\mathfrak{R}])},$$

wobei $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(n, 2g)}$ ein volles Restsystem modulo P durchläuft. Nach (91) ist also

$$S_p = \lim_{P \rightarrow \infty} P^{-2ng} \sum_{\mathfrak{R} \pmod{P}} e^{\frac{2\pi i}{P} \sigma(\mathfrak{S}(\mathfrak{R} \mathfrak{R}' - \mathfrak{T}))};$$

hierin durchlaufen die Matrix \mathfrak{R} von n Zeilen und $2g$ Spalten sowie die symmetrische Matrix \mathfrak{S} ein volles Restsystem modulo P . Es ist nun aber

$$(94) \quad \sum_{\mathfrak{S} \pmod{P}} e^{\frac{2\pi i}{P} \sigma(\mathfrak{S}(\mathfrak{R} \mathfrak{R}' - \mathfrak{T}))} = P^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

wenn

$$(95) \quad 2 \mathfrak{R} \mathfrak{R}' \equiv 2 \mathfrak{I} \pmod{P}$$

ist; andernfalls hat die Summe in (94) stets den Wert 0. Bezeichnet $A_P(\mathfrak{I})$ die Anzahl der modulo P inkongruenten Lösungen \mathfrak{R} von (95), so ist daher

$$(96) \quad S_p = \lim_{P \rightarrow \infty} P^{\frac{n(n+1)}{2} - 2ng} A_P(\mathfrak{I}),$$

wo P die Folge der Potenzen von p durchläuft. Man kann nun leicht zeigen, daß der Ausdruck unter dem Limeszeichen für alle genügend hohen Potenzen P von p denselben Wert hat. Also ist S_p eine rationale Zahl. Für den Grenzwert ergibt sich ein einfaches Resultat, wenn p nicht in der Determinante

$$|2\mathfrak{I}| = T$$

aufgeht, nämlich

$$S_p = (1 + \chi(p)p^{\frac{n}{2}-g})(1 - p^{-g}) \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (1 - p^{2i-2g}) \quad (n \text{ gerade}),$$

$$S_p = (1 - p^{-g}) \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (1 - p^{2i-2g}) \quad (n \text{ ungerade});$$

dabei bedeutet $\chi(p)$ das Legendresche Symbol

$$\chi(p) = \left(\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} T}{p} \right).$$

Bei Multiplikation über alle Primzahlen ist

$$\prod_p (1 - p^{-l}) = \frac{1}{\zeta(l)} \quad (l > 1)$$

und folglich nach Euler die Zahl

$$\pi^l \prod_{(p, 2T)=1} (1 - p^{-l})$$

rational für jedes gerade natürliche l . Außerdem ist noch

$$\pi^{g-\frac{n}{2}} T^{\frac{1}{2}} \prod_{(p, 2T)=1} (1 + \chi(p)p^{\frac{n}{2}-g})$$

rational für gerades n . Demnach ist die Zahl $\pi^{ng-\frac{n^2}{4}} |\mathfrak{I}|^{\frac{1}{2}} \frac{S}{S_2}$ rational,

wenn n gerade ist; und für ungerades n ist die Zahl $\pi^{ng-\frac{n^2-1}{4}} \frac{S}{S_2}$ rational. Hieraus ergibt sich die Behauptung über $a(\mathfrak{I})$, wenn wir noch nachweisen können, daß S_2 einen rationalen Wert besitzt.

Um auch für $p = 2$ eine Formel in Analogie zu (93) abzuleiten, müssen wir die Definitionsgleichung (92) etwas abändern. Es sei P eine Potenz von $p = 2$, die durch $\nu(\mathfrak{R}_2)$ teilbar ist, und

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix der binären quadratischen Form $x^2 + xy + y^2$. Wir setzen jetzt

$$G = \sum_{\mathfrak{R}_2 \pmod{P}} e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{F} \mathfrak{R}_2)},$$

wobei $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2^{(n, 2)}$ alle modulo P inkongruenten ganzen Matrizen mit n Zeilen und zwei Spalten durchläuft. Zur Berechnung von G kann man voraussetzen, daß die quadratische Form mit der Matrix \mathfrak{R}_2 die Gestalt

$$\sum_{i=1}^q a_i 2^{-\mu_i} x_i^2 + \sum_{l=1}^r 2^{-\nu_l} \Phi_l$$

besitzt, mit $q + 2r = n$; hierin bedeutet Φ_l eine binäre quadratische Form mit einer Matrix

$$\mathfrak{F}_l = \begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ \beta_l & \gamma_l \end{pmatrix} \quad (l = 1, \dots, r),$$

die Zahlen a_i, β_l sind sämtlich ungerade, die Zahlen α_l, γ_l sämtlich gerade und es ist

$$\nu(\mathfrak{R}_2) = 2^{\mu_1 + \dots + \mu_q + 2(\nu_1 + \dots + \nu_r)}.$$

Es wird nun

$$G = \prod_{i=1}^q \sum_{\mathfrak{f} \pmod{P}} e^{2\pi i a_i 2^{-\mu_i} \mathfrak{f}(\mathfrak{f})} \prod_{l=1}^r \sum_{\mathfrak{R} \pmod{P}} e^{2\pi i 2^{-\nu_l} \sigma(\mathfrak{F}_l \mathfrak{R})},$$

wobei \mathfrak{f} die Spalten aus zwei Elementen und \mathfrak{R} die Matrizen aus zwei Zeilen und zwei Spalten modulo P durchlaufen. Aus den Formeln

$$\sum_{\mathfrak{f} \pmod{P}} e^{2\pi i a_i 2^{-\mu_i} \mathfrak{f}(\mathfrak{f})} = (-2)^{-\mu_i} P^2,$$

$$\sum_{\mathfrak{R} \pmod{P}} e^{2\pi i 2^{-\nu_l} \sigma(\mathfrak{F}_l \mathfrak{R})} = 2^{-2\nu_l} P^2$$

folgt

$$G = \pm P^{2n} \nu(\mathfrak{R}_2)^{-1}.$$

Bedeutet \mathfrak{E}^* die Matrix der quadratischen Form $\sum_{i=1}^g (x_i^2 + x_i y_i + y_i^2)$ von $2g$ Variablen, so wird

$$\nu(\mathfrak{R}_2)^{-g} = P^{-2ng} \sum_{\mathfrak{E} \pmod{P}} e^{2\pi i \sigma(\mathfrak{R}_2 \mathfrak{E}^*(\mathfrak{E}))}$$

mit $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(g, n)}$. Die weitere Rechnung verläuft genau wie bei $p \neq 2$. Versteht man jetzt unter $A_p(\mathfrak{I})$ die Anzahl der modulo P inkongruenten \mathfrak{C} , für welche die Matrix $P^{-1}(\mathfrak{C}^*[\mathfrak{C}] - \mathfrak{I})$ halbganz ist, so gilt wieder (96), und der Ausdruck unter dem Limeszeichen ist dabei konstant für alle genügend hohen Potenzen P von $p = 2$. Folglich ist S_2 rational.

Aus dem hiermit bewiesenen Satz über die Entwicklungskoeffizienten der Eisensteinschen Reihen ψ , ergibt sich, daß die zwischen den ψ , bestehenden algebraischen Gleichungen *rationale* Koeffizienten haben. Zugleich ist eine *Methode* gewonnen, um diese algebraischen Gleichungen wirklich aufzustellen.

(Eingegangen am 22. 2. 1939.)

Über die Randableitung einer beschränkten analytischen Funktion nebst einer Anwendung auf den Picardschen Satz.

Von

Vilhelm Jørgensen in Kopenhagen (Dänemark).

Die Randableitung. Ist $w = f(z)$ regulär und $|f(z)| < 1$ für $|z| < 1$, dann existiert bekanntlich der Grenzwert

$$\alpha = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z}$$

für $z \rightarrow 1$ (auf beliebiger Bahn) im Winkelraum zwischen zwei beliebigen vom Punkte $z = 1$ ausgehenden Sehnen des Einheitskreises, und sein Wert ist entweder unendlich oder reell-positiv. Diesen wichtigen Satz wollen wir folgendermaßen supplieren:

1. Wie nahe an 1 die Zahl θ ($0 < \theta < 1$) auch gewählt ist, existiert α für $z \rightarrow 1$ in einem zum Einheitskreis gehörigen Gebiet G_θ , welches die folgende Eigenschaft hat: Für jedes r ($0 < r < 2$) enthält der Teil von G_θ , der sich im Kreisring $\theta r < |z - 1| < r$ befindet, ein Gebiet, das sowohl auf der oberen wie auf der unteren Hälfte der Peripherie des Einheitskreises Randpunkte hat.

2. Es bezeichne $\{e^{i\varphi}\}$ die Menge der Werte, an die $f(z)$ in jeder Umgebung des Punktes $z = e^{i\varphi}$ beliebig nahe kommt, und \Re die Vereinigungsmenge aller $\{e^{i\varphi}\}$ mit $0 < \varphi < 2\pi$. „Orizykel“ nennen wir der Kürze halber einen Kreis, der im Einheitskreis liegt und diesen im Einheitspunkt tangiert. Gibt es nun in der w -Ebene einen Orizykel γ , der in seinem Innern keinen Punkt der Menge \Re enthält, dann existiert α für $z \rightarrow 1$ — nicht allein in jedem Winkelraum zwischen zwei von $z = 1$ ausgehenden Sehnen — sondern sogar in jedem Orizykel. Ist in diesem Falle $\alpha = \infty$, liegt kein Wert von $f(z)$ im Innern des Orizykels γ ¹⁾. Ist α endlich, ist $f(z)$ in einem gewissen, angebbaren Orizykel schlicht.

Bei den Beweisen der genannten Tatsachen wollen wir mit Halbebenen statt des Einheitskreises arbeiten. Wir sagen von einer reellen Funktion $u(z) = u(x + iy)$, die für $x > 0$ definiert ist, daß sie auf der y -Achse kleiner gleich M ist, wenn für jedes endliche rein imaginäre a gilt: $\overline{\lim}_{z \rightarrow a} u(z) \leq M$.

¹⁾ Für schlichte Funktionen wurde dies letztere von C. Carathéodory bewiesen. Vgl. auch A. van Haselen: Sur la représentation conforme. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35 (1932), S. 867—869.

Satz I (Hauptsatz von der Randableitung)²⁾. Ist für $x > 0$ die Funktion $f(z) = f(x + iy)$ regulär und $\Re f(z) > 0$, dann gibt es eine Konstante $c \geq 0$, so daß $\Re f(z) \geq cx$ für $x > 0$ ist, und so daß für jedes positive Q

$$\frac{f(z)}{z} \rightarrow c$$

für $z \rightarrow \infty$ im Winkelraum $|y| < Qx$.

Lemma I. Es sei $x_0 > 0$, $k > 1$ und γ eine im halben Kreisring

$$K: 0 < x, \quad \frac{1}{k} x_0 \leq |z| \leq k x_0$$

stetige Kurve, die die beiden Halbkreise verbindet. Dann gibt es eine nur von k (also weder von x_0 noch der Kurve γ) abhängende positive Konstante $p = p(k)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Ist $u(z)$ harmonisch und positiv in K und $u(z) > m$ (> 0) auf γ , dann ist $u(x_0) > pm$.

2. Ist $f(z)$ regulär und $|f(z)| > 1$ in K und gilt $|f(z)| > m$ (> 1) auf γ , dann ist $|f(x_0)| > m^p$.

Beweis. Der zu γ komplementäre Teil des Innern von K besteht aus Gebieten, von denen keines gleichzeitig auf der positiven und der negativen y -Achse Randpunkte hat. Liegt der Punkt x_0 nicht auf γ , was wir annehmen können, mag er z. B. in einem solchen Gebiet G liegen, das keine positiv-imaginären Randpunkte besitzt. Es sei dann $u_1(z)$ die in K beschränkte harmonische Funktion, die auf der Strecke zwischen $i \frac{1}{k} x_0$ und $ik x_0$ den Wert m annimmt, aber sonst auf dem Rande von K verschwindet. Im Innern von K ist $u_1(z)$ kleiner als m , und auf dem Rande des Gebietes G gilt somit $u(z) \geq u_1(z)$; also ist auch $u(x_0) \geq u_1(x_0)$, woraus das in 1. behauptete folgt, denn $u_1(x_0)$ ist positiv, mit m proportional und von x_0 unabhängig.

Um 2. zu beweisen, wendet man 1. auf die Funktion $\log |f(z)|$ an.

Lemma II. Es habe k , x_0 , K , γ und p dieselben Bedeutungen wie im Lemma I. Ist $f(z)$ regulär und $\Re f(z) > 0$ in K , dann gilt, wenn man

$$\frac{1}{(2^{\frac{1}{p}} - 1)^2} = q = q(k) \text{ setzt,}$$

$$\min_{\gamma} \left| \frac{f(z)}{z} \right| < q \left| \frac{f(x_0)}{x_0} \right|.$$

²⁾ C. Carathéodory, Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen, Berliner Sitzungsberichte 1929, S. 39–54. Eine besonders bequeme Beweisaneinanderordnung findet man in der davon unabhängigen Note von E. Landau und G. Valiron, A deduction from Schwarz's lemma, Journal of the London math. Soc. 4 (1929), S. 162–163.

Beweis. Wir setzen $\min_{\gamma} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = m$. Bei passender Normierung hat die Funktion $\sqrt{\frac{f(z)}{z}}$ positiven Realteil; also ist $\sqrt{\frac{f(z)}{mz}} + 1$ dem Betrage nach größer als 1 in K und größer als $\sqrt{2}$ auf γ . Wir haben dann nach Lemma I

$$\left| \sqrt{\frac{f(x_0)}{m x_0}} + 1 \right| > 2^{\frac{1}{p}},$$

woraus die Behauptung folgt.

Da die Kurve γ beliebig ist, muß es in K eine zusammenhängende, in K geschlossene Punktmenge geben, die die beiden Halbkreise trennt und auf welcher die Ungleichung

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq q \left| \frac{f(x_0)}{x_0} \right|$$

erfüllt ist. In Verbindung mit Satz I ergibt sich hieraus bei Anwendung auf die Funktion $f(z) - cz$ die Existenz des in der Einleitung besprochenen Gebietes G_0 .

Satz II. Ist $u(z) = u(x + iy)$ harmonisch und positiv für $x > 0$, $u(z) \leq M$ auf der y -Achse und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x} = 0$, dann ist $u(z) \leq M$ für $x > 0$.

Beweis. Für positive ε_1 und ε_2 gibt es ein $M_1 = M_1(\varepsilon_1) \geq M$, so daß die Ungleichung

$$u(z) - \varepsilon_1 x - \varepsilon_2 |y| \leq M_1$$

auf der y -Achse und der positiven x -Achse gilt. Wir behaupten, daß dieselbe Ungleichung in der ganzen Halbebene gilt. Denn wäre dem nicht so, hätte man nach dem Maximumprinzip in einem unendlichen Gebiet die Ungleichung

$$u(z) - \varepsilon_1 x - \varepsilon_2 |y| > M_1$$

und dann in demselben Gebiet a fortiori

$$u(z) > \varepsilon |z|$$

mit $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Durch Anwendung von Lemma I mit einem beliebigen festen $k (> 1)$ ergäbe sich dann für jedes hinreichend große x die Ungleichung

$$u(x) > p \frac{1}{k} \varepsilon x,$$

die mit einer Voraussetzung in Widerspruch steht. Es ist also für $x > 0$

$$u(z) - \varepsilon_1 x - \varepsilon_2 |y| \leq M_1,$$

und dann auch, da M_1 von ε_2 unabhängig ist,

$$u(z) - \varepsilon_1 x \leq M_1.$$

Jetzt ist unsere Funktion aber für $x > 0$ harmonisch, und nach Phragmén-Lindelöf ist dann

$$u(z) - \varepsilon_1 x \leq M,$$

wonach

$$u(z) \leq M.$$

Satz III. Ist $F(z) = F(x + iy)$ regulär und $\Re F(z) > 0$ für $x > 0$ und gilt die Ungleichung $\Re F(z) \leq M$ auf der y -Achse, dann ist $F(z)$ von der Form

$$F(z) = cz + f(z),$$

wo $c \geq 0$, $M \geq \Re f(z) \geq 0$ für $x > 0$ ist und $\frac{f(z)}{z} \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$ in einer beliebigen inneren Halbebene $x > \alpha > 0$ ³⁾.

Beweis. Abgesehen davon, daß die Relation $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 0$ nur für $z \rightarrow \infty$ in einem beliebigen Winkelraum $|y| < Qx$ bekannt ist, ergibt sich alles aus Satz I und Satz II. Für beliebige feste $\alpha > 0$ und $\varepsilon > 0$ soll also ein r angegeben werden, so daß die Ungleichung $\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \varepsilon$ im Gebiet $x > \alpha$, $|z| > r$ erfüllt ist.

Für $x > \alpha$ ist nach Cauchy

$$\left| \frac{d}{dz} e^{f(z)} \right| = |f'(z) e^{f(z)}| < \frac{e^M}{x},$$

also, wenn wir $\frac{e^M}{x} = m$ setzen, auch

$$|f'(z)| < m.$$

Wir wählen $k (> 1)$ so klein, daß

$$m(k^3 - 1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, und dann r so groß, daß wir für $x > r$ die Ungleichung

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{q k^2}$$

haben mit $q = q(k)$ nach Lemma II. Für einen beliebigen Punkt z_0 im Gebiet $x > \alpha$, $|z| > r$ ziehen wir die Strecke l , die z_0 mit $k^2 z_0$ verbindet. Auf l gibt es dann nach Lemma II einen Punkt z_1 , so daß

$$\left| \frac{f(z_1)}{z_1} \right| < q \frac{|f(k|z_0|)|}{k|z_0|}$$

ist. Dies gibt

$$|f(z_1)| < q \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{q k^2} k^2 |z_0| = \frac{\varepsilon}{2} |z_0|,$$

und dazu kommt

$$|f(z_0) - f(z_1)| = \left| \int_{z_1}^{z_0} f'(z) dz \right| < m(k^3 - 1)|z_0| < \frac{\varepsilon}{2} |z_0|,$$

³⁾ Dagegen braucht $\lim_{z \rightarrow \infty} F'(z)$ für $z \rightarrow \infty$ in einer Halbebene nicht zu existieren, wie schon das Beispiel $F(z) = e^{-z} + 1$ zeigt.

so daß

$$|f(z_0)| \leq |f(z_1)| + |f(z_0) - f(z_1)| < \varepsilon |z_0|.$$

Ist $\varepsilon > 0$, folgt es leicht aus dem Argumentprinzip, daß $F(z)$ in der Halbebene $x > \frac{M}{\varepsilon}$ schlicht ist.

Der Satz, daß eine für $x > 0$ positive und auf der y -Achse beschränkte harmonische Funktion die Form $cx + u(z)$ mit nichtnegativem c und beschränkter $u(z)$ hat, läßt sich als eine Verallgemeinerung des bekannten Weierstraßschen Satzes über isolierte wesentliche Singularitäten auffassen.

Picardscher Satz. Diesen berühmten Satz beweisen wir hier in der folgenden allgemeinen Fassung:

Satz IV. Ist $f(s) = f(\sigma + it)$ für $\sigma > 0$ regulär, $\neq 0$, $\neq 1$ und gilt auf der t -Achse die Ungleichung

$$|f(s)| \leq M,$$

während $f(s)$ nicht im Innern der Halbebene beschränkt ist, dann ist $f(s)$ von der Form

$$f(s) = e^{cs} g(s)$$

mit $c > 0$ und

$$M \geq |g(s)| \geq L(c\sigma) \quad \text{für } \sigma > 0,$$

wobei $L(\sigma)$ eine positive, monoton wachsende, von $f(s)$ unabhängige Funktion bezeichnet⁴⁾.

Beweis. Bekanntlich gibt es eine Funktion (Modulfunktion)

$$w = v(z) = v(x + iy)$$

mit den folgenden Eigenschaften: Die Funktion $v(z)$ ist regulär, $\neq 0$ und $\neq 1$ für $x > 0$ und hat die y -Achse als natürliche Grenze. Sie ist außerdem periodisch mit der Periode $2\pi i$ und von der Form

$$v(z) = e^z \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen, von 0 verschiedenen Grenzwert strebt. Die Funktion $L(\sigma)$ wird als $\text{Min } |\psi(z)|$ definiert. Von der zu $w = v(z)$ inversen Funktion

$$v \leq z$$

$$z = \mu(w)$$

⁴⁾ In einer früheren Arbeit [Über den Gültigkeitsbereich des Picardschen Satzes, Math. Annalen 115 (1938), S. 710–719] habe ich u. a. den schwächeren Satz bewiesen, wo $f(s)$ für ein $\alpha > 0$ (oder für jedes, was auf dasselbe herauskommt (Schottky'scher Satz!)) im ganzen Streifen $0 < \sigma < \alpha$ beschränkt vorausgesetzt ist. Die da entwickelte Methode, die (von einem Lemma von H. Bohr ausgehend) auf einem genaueren Studium der Eigenschaften der Modulfunktion fußt, hat jedoch noch für den Fall Bedeutung, wo $f(s)$ auf keiner Geraden $\sigma = \sigma_0$ beschränkt ist (vgl. V. Jørgensen: Sur une nouvelle propriété d'extrémum de la fonction modulaire, 9. Congr. Math. scand. Helsingfors 1938).

gilt, daß jeder seiner Zweige sich längs eines beliebigen, die Punkte $w = 0, 1, \infty$ auslassenden Weges analytisch fortsetzen läßt.

Wir bilden nun eine Funktion von der Form

$$z = \mu(f(s)).$$

Von solchen gibt es unendlich viele, die jedoch alle für $\sigma > 0$ regulär und von positivem Realteil sind; außerdem gibt es eine Konstante K , so daß die Ungleichung

$$\Re \mu(f(s)) < K$$

auf der t -Achse gilt, welche der unendlich vielen Bestimmungen der zusammengesetzten Funktion man auch gewählt hat. Wir nehmen nun ein s_0 mit so großem $f(s_0)$, daß bei passender Normierung

$$\Re h(s_0) = \Re \mu(f(s_0)) > K$$

wird. Dann kann $\Re h(s)$ nach Phragmén-Lindelöf nicht in der Halbebene $\sigma > 0$ beschränkt sein. Setzen wir also nach Satz III

$$h(s) = cs + h_1(s)$$

mit beschränktem $\Re h_1(s)$, so muß c positiv sein. Nun ist $f(s) = \nu(h(s))$ und also

$$|g(s)| = |f(s)e^{-cs}| = |e^{h_1(s)} \psi(cs + h_1(s))| \geq L(c\sigma)$$

für $\sigma > 0$, weil $\Re h_1(s) \geq 0$ ist, und es ist außerdem $g(s)$ in jeder inneren Halbebene $\sigma > \alpha > 0$ beschränkt. Es erübrigt sich also zu zeigen, daß $g(s)$ z. B. im Streifen $0 < \sigma < 1$ beschränkt ist. Wie wir gesehen haben, strebt $f(\sigma)$ gegen ∞ für $\sigma \rightarrow \infty$. Mit Hilfe einer konformen Abbildung ergibt sich dann auch, daß, wenn eine Funktion im Innern eines Halbstreifens regulär, $\neq 0$, $\neq 1$ ist und auf dem Rande, aber nicht im Innern beschränkt ist, dann die Funktion auch nicht auf der Mittellinie des Halbstreifens beschränkt ist. Nun ist $f(s)$ auf den Geraden $\sigma = 0, \frac{1}{2}$ und 1 beschränkt, also auch im Streifen $0 < \sigma < 1$. Die Funktion $g(s)$ ist somit in der ganzen Halbebene beschränkt, und es ist also

$$|g(s)| \leq M \quad \text{für } \sigma > 0,$$

womit der Beweis unseres Satzes zu Ende geführt ist.

Wir bemerken noch, daß nach Satz III

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\arg g(s)}{s} = 0$$

in jeder Halbebene $\sigma > \alpha > 0$ gilt und daß $\log f(s)$ in einer nur von M und c abhängenden Halbebene schlicht ist. Den Fall, wo $f(s)$ eine endliche Anzahl von Null- und Einsstellen hat, führt man mit Hilfe einer einfachen konformen Abbildung auf den obigen zurück.

(Eingegangen am 31. 1. 1939.)

Über die konforme Abbildung komplementärer Gebiete.

Von

Ernst Richard Neumann in Marburg.

Oft ist man imstande, die Abbildungsfunktion für das von einer geschlossenen Kurve σ begrenzte Innengebiet anzugeben, d. h. die konforme Abbildung dieses Gebietes auf den Einheitskreis, während man die Abbildung des komplementären Gebietes, des Gebietes außerhalb derselben Kurve σ , nicht kennt. Ein einfaches Beispiel dieser Art liefert die Funktion

$$z = 2w - lw^2 \quad (l \text{ reell} < 1),$$

welche die konforme Abbildung zwischen dem Einheitskreise der w -Ebene und dem Innern einer in der z -Ebene gelegenen Epizykloide vermittelt, wie sie von einem inneren Punkt (Zentralabstand l) eines auf dem Einheitskreise abrollenden Kreises von ebenfalls dem Radius 1 beschrieben wird. Für das Außengebiet dieser (bei kleinem l sich nur wenig vom Kreise unterscheidenden) Kurve ist die Abbildungsfunktion nicht bekannt, ja man hat sogar bewiesen, daß die Abbildung dieses Außengebietes nicht einmal durch eine meromorphe Funktion geleistet werden kann¹⁾. — In anderen Fällen kennt man umgekehrt die Abbildungsfunktion des Außengebietes, nicht aber die für das Innengebiet.

Dieser Sachverhalt legt nun die Frage nahe, ob man nicht aus der Kenntnis der Abbildungsfunktion für eines von zwei komplementären Gebieten Nutzen ziehen kann zur Bestimmung auch der für das andere — oder allgemeiner die Frage nach einem Zusammenhang zwischen den Abbildungsfunktionen beider Gebiete.

Ein solcher Zusammenhang besteht nun tatsächlich: Es hängen nämlich die Abbildungsfunktionen bekanntlich eng zusammen mit den Greenschen Funktionen der betreffenden Gebiete, und daß zwischen diesen Funktionen für solche komplementäre Gebiete ein Zusammenhang besteht, habe ich bereits in der vorhergehenden Arbeit gezeigt. — Diese so sich ergebende Beziehung zwischen den Abbildungsfunktionen soll nun in dieser Arbeit näher entwickelt werden. — Es handelt sich demnach jetzt im Gegensatz zu der vorhergehenden Arbeit (die immer mit I zitiert wird) von vornherein nur

¹⁾ Vgl. die seinerzeit von Koebe in Jena angeregte, dann aber in Marburg vorgelegte Dissertation von Joh. Philipps, „Über die konforme Abbildung durch Rollkurven begrenzter Gebiete“, Marburg 1919, S. 62ff.

um Betrachtungen in der Ebene. Demgemäß hat die frühere Grundlösung $T_{(o)p}$ jetzt stets die Bedeutung

$$T_{(o)p} = \log \frac{1}{E_{op}} \quad \text{und ferner ist immer} \quad h = 1 \quad \text{zu setzen.}$$

§ 1.

Konforme Abbildung und Greensche Funktion.

Es sei in der Ebene der komplexen Zahlen $z = x + iy$ ein schlichtes, ganz im Endlichen gelegenes, einfach zusammenhängendes Gebiet \mathfrak{J} gegeben. Seine Randkurve σ (Jordan-Kurve) genüge den immer von uns gemachten

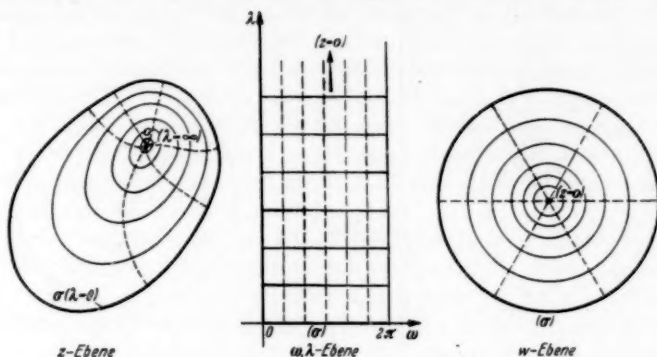


Fig. 1.

sehr allgemeinen Voraussetzungen (kurz: stetiger Biegung und endlicher Krümmung).

Eine Abbildungsfunktion dieses Gebietes, d. h. eine Funktion, die es konform auf den Einheitskreis einer neuen Zahlenebene abbildet, kann man bekanntlich, falls die Greensche Funktion

$$(1) \quad \mathfrak{G}_{(o)p} = \lambda(xy) \quad (\text{Wert im Punkte } p(x, y))$$

dieses Gebietes \mathfrak{J} für einen beliebigen inneren Pol o bekannt ist, folgendermaßen herstellen: Man ergänze die (außer bei o) harmonische Funktion $i\lambda(xy)$ durch Hinzufügung eines Realteiles $\omega(xy)$ ²⁾ zu einer Funktion des komplexen Argumentes $z = x + iy$

$$(2) \quad \omega + i\lambda = \omega(xy) + i\lambda(xy).$$

²⁾ Diese Funktion $\omega(xy)$ ist bis an die Randkurve σ heran stetig. Denn, wie schon in I, S. 542 bemerkt wurde, besitzt die Greensche Funktion $\lambda(xy)$ sicher bis an σ heran stetige erste partielle Ableitungen, und das gilt dann nach Cauchy-Riemann auch von $\omega(xy)$. Daraus folgt dann natürlich auch die Stetigkeit von $\omega(xy)$ selber. — Zugleich ist aber $\omega(xy)$ mehrdeutig, die verschiedenen Werte an derselben Stelle unterscheiden sich immer um Vielfache von 2π [vgl. die nächste Anmerkung].

Diese komplexe Funktion bildet das Gebiet \mathfrak{J} konform auf einen Halbstreifen der ω, λ -Ebene von der Breite $2\pi^3$) ab, der von der ω -Achse beginnend durch positive λ -Werte verläuft, und demgemäß bildet die Funktion

$$(3) \quad w = e^{(\omega + i\lambda)} \quad \text{oder ausführlicher} \quad w(z) = e^{-\lambda(x+y) + i\omega(x-y)}$$

das Gebiet \mathfrak{J} der z -Ebene konform auf den Einheitskreis der w -Ebene ab, und zwar so, daß der Pol o (das ist die Stelle $\lambda = +\infty$) in den Anfangspunkt $w = 0$ geworfen wird. — Als gleichwertig mit (3) sei auch noch die folgende Form der Abbildungsgleichung erwähnt:

$$(3') \quad |w| = e^{-\mathfrak{G}_{(o)} p},$$

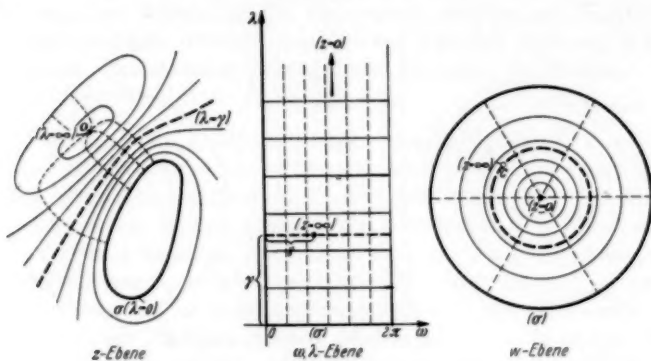


Fig. 2.

Als „Abbildungsfunktion“ des Gebietes \mathfrak{J} werden wir allerdings meist die zu $w(z)$ inverse Funktion bezeichnen:

$$(4) \quad z = \varphi(w),$$

durch die also strenggenommen der Einheitskreis der w -Ebene konform auf das Gebiet \mathfrak{J} abgebildet wird.

Diese hier zusammengestellten Tatsachen über die Abbildung eines Innengebietes sind in der Literatur vielfach behandelt, ihre Richtigkeit leuchtet auch fast unmittelbar ein: man braucht nur die Grenzen, zwischen denen λ und ω variieren, zu beachten.

Weit seltener ist dagegen die Abbildung des Außengebietes \mathfrak{A} einer Kurve σ behandelt. Das Resultat bezüglich dieser kann man nun sehr einfach

³⁾ Weil nämlich längs jeder den Pol o einfach umschließenden Kurve s mit der Normalen v_s

$$\int d\omega = \int \frac{\partial \omega}{\partial s} ds = \pm \int \frac{\partial \lambda}{\partial v_s} ds = \pm \int \frac{\partial \mathfrak{G}_{(o)}}{\partial v_s} ds = \pm \int \frac{\partial \log \frac{1}{E_{os}}}{\partial v_s} ds = \pm 2\pi$$

ist (wegen $\mathfrak{G}_{(o)} = \log \frac{1}{E_o} - G_{(o)}$ und $\int \frac{\partial G_{(o)}}{\partial v_s} ds = 0$).

dahin aussprechen, daß man sagt: *Es gelten für die Abbildung eines Außengebietes \mathfrak{A} genau die oben für ein Innengebiet gemachten Angaben, sobald man unter der „Greenschen Funktion $\mathfrak{G}_{(o)}$ “ beim Außengebiet die neue in der vorhergehenden Arbeit eingeführte Funktion versteht⁴⁾.*

Das folgt wieder leicht, wenn man den Variabilitätsbereich der Größe $\lambda = \mathfrak{G}_{(o)}$ im Gebiete \mathfrak{A} beachtet, von $\lambda = 0$ auf σ bis $\lambda = +\infty$ im Pole o . — Wesentlich ist hier der schon in I, S. 542 berührte Umstand, daß diese unsere Funktion $\mathfrak{G}_{(o)p} = \lambda(xy)$ unter allen bis auf die bekannte logarithmische Unstetigkeit bei o harmonischen Funktionen von \mathfrak{A} , die auf σ verschwinden, als einzige im Unendlichen endlich bleibt, denn das ist natürlich eine notwendige Vorbedingung, wenn auch die Stelle $z = \infty$ des Gebietes \mathfrak{A} (auf der Riemannschen Kugel gedacht) in einen Punkt innerhalb des Einheitskreises der w -Ebene (aber nicht etwa gleichzeitig mit o in den Mittelpunkt) übergeht — oder kurz, wenn $z = \infty$ ein endliches $w \neq 0$ entsprechen soll.

Am anschaulichsten dürfte die Abbildung werden, wenn man sich noch den Verlauf der Niveaulinien $\lambda(x, y) \equiv \mathfrak{G}_{(o)p} = \text{const}$ klarmacht und diese bei den Einzelabbildungen verfolgt. Deshalb sind solche Niveaukurven und ihre Bilder in den Figuren mit eingezeichnet.

Das Charakteristische an den Niveaulinien beim Außengebiet ist nun das Auftreten einer singulären solchen Kurve, die durchs Unendliche geht, während alle übrigen entweder σ oder aber den Pol o umschließen. Der Parameterwert λ dieser singulären Kurve ist $\gamma = \Gamma - \Pi_o$, eben der Wert von $\mathfrak{G}_{(o)}$ im Unendlichen [vgl. I (16), S. 542]. Setzen wir noch den ω -Wert der Stelle ∞ gleich δ ⁵⁾, so sind also

$$(5) \quad \delta + i\gamma \quad \text{und} \quad c = e^{-\gamma + i\delta} \quad (\gamma = \Gamma - \Pi_o)$$

die Bilder der Stelle $z = 0$ in der ω , λ -Ebene bzw. in der w -Ebene⁶⁾.

⁴⁾ Natürlich kommen die früheren Behandlungen des Problems auf genau dasselbe heraus. Ich erwähne die Notiz von C. Neumann von 1877 in den Math. Annalen, Bd. 13, S. 573 und die Darstellung von A. Harnack in seinen „Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials“ (Leipzig bei Teubner 1887), § 48 (S. 153). — Die von A. Korn in seinem „Lehrbuch der Potentialtheorie“, Teil II (Berlin bei F. Dümmler 1901) S. 283 angegebene Abbildungsfunktion ist allerdings nur scheinbar noch von der Wahl eines Punktes c (wie unsere vom Pole o der Greenschen Funktion) abhängig; bei näherem Zusehen stellt sich heraus, daß sie sich (in unseren Bezeichnungen und bezogen auf das Innere des Einheitskreises) auf die spezielle Abbildungsgleichung

$$|w| = e^{-(\Gamma - \Pi(xy))} \quad (\text{entsprechend (3*)})$$

reduziert, d. h. auf die noch zu erwähnende „natürliche Abbildung“ des Außengebietes, bei der $z = \infty$ (als Pol o , vgl. I (16), S. 542) in $w = 0$ übergeht.

⁵⁾ Man könnte, da ω nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, dieses $\delta = 0$ annehmen — doch dürfte sich eine solche Festlegung nicht empfehlen.

⁶⁾ Natürlich muß $|c| < 1$ sein, was bestens zu der Tatsache $\gamma > 0$ oder $\Gamma - \Pi_o > 0$ paßt, denn bekanntlich ist Γ der größte Wert von Π im Außengebiet.

Dieser Punkt $w = c$ innerhalb des Einheitskreises wird also bei umgekehrter Abbildung der w -Ebene auf die z -Ebene ins Unendliche geworfen, die diese letztere Abbildung vermittelnde Funktion $z = \varphi(w)$ muß hier also *unstetig* sein, und zwar muß sie bekanntlich (aus Gründen der Eindeutigkeit) daselbst einen *Pol erster Ordnung* besitzen. Wir setzen daher beim Außengebiet:

$$(4_A) \quad z = \varphi(w) = \frac{\psi(w)}{w - c},$$

wo jetzt erst $\psi(w)$ auf dem Einheitskreise stetig ist, während beim Innengebiet schon $\varphi(w)$ selbst stetig war. — So bestehen also trotz der oben festgestellten formalen Übereinstimmung der Abbildungsregeln sachlich doch nicht unerhebliche Unterschiede beim Innen- und Außengebiet.

Ein weiterer solcher Unterschied ist der, daß beim Innengebiet alle Lagen des Poles gleichberechtigt sind, während es beim Außengebiet eine ausgezeichnete Pol-Lage gibt, nämlich im Unendlichen ($z = \infty$). Für sie geht nach I. (16), S. 542 $\mathfrak{G}_{(c)p}$ über in $\Gamma - \Pi_p$, und die zugehörige Abbildung ist gekennzeichnet durch

$$(3^*) \quad |w| = e^{-(r - \pi_p)},$$

es entsprechen also den Niveaulinien des Potentials der natürlichen Belegung in der z -Ebene die konzentrischen Kreise um den Nullpunkt in der w -Ebene. — Diese ausgezeichnete Abbildung des Außengebietes wollen wir seine „*natürliche Abbildung*“ nennen [vgl. die Anm. 8, S. 669].

§ 2.

Greensche Koordinaten.

Wir werden im folgenden immer die Abbildung des einen der beiden Gebiete \mathfrak{I} und \mathfrak{II} als bekannt voraussetzen. Dieses ausgezeichnete Gebiet wollen wir als Stück der z -Ebene oder besser der z -Kugel (mit Einschluß von $z = \infty$) mit \mathfrak{I} bezeichnen. Ob dieses das Innen- oder Außengebiet von σ ist, spielt in diesem Paragraphen gar keine Rolle — durch unsere Definitionen ist eben eine völlig einheitliche Behandlung dieser beiden Gebiete ermöglicht.

Wir nehmen also eine Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ „des Gebietes \mathfrak{I} “ als bekannt an, oder, was nach § 1 dasselbe, die Greensche Funktion $\mathfrak{G}_{(o)}$ mit dem z -Bildpunkte o von $w = 0$ als Pol. — Da liegt es denn nahe, die Niveaulinien von $\mathfrak{G}_{(o)}$ („Greensche Niveaulinien“, Bilder der Kreise $|w| = \text{const}$, vgl. (3')) und ihre Orthogonaltrajektorien („Greensche Radiallinien“, Bilder der Radien $\arg w = \text{const}$) als Koordinatenlinien einzuführen, oder die Punkte von \mathfrak{I} durch die ihnen entsprechenden Werte λ und ω zu

bestimmen. Wir nennen diese krummlinigen Koordinaten in der z -Ebene die „Greenschen Koordinaten“.

Aus der Abbildungsgleichung $w = e^{-\lambda + i\omega}$ ergibt sich, daß zwischen den Greenschen Koordinaten λ, ω eines Punktes und den Polarkoordinaten r, θ seines Bildpunktes in der w -Ebene die einfachen Beziehungen bestehen:

$$(6) \quad r \equiv |w| = e^{-\lambda} \quad \text{und} \quad \theta \equiv \arg w = \omega.$$

Daraus folgt wieder eine sehr einfache Deutung der Koordinate ω : sie stellt nämlich den Winkel dar, den die Greensche Radiallinie durch den gerade betrachteten Punkt z im Pol o mit einer (beliebigen) fest gewählten solchen Radiallinie ($\omega = 0$) bildet, ganz analog wie im gewöhnlichen Polarkoordinatensystem mit geradlinigen Radiallinien — infolge der Winkeltreue überträgt sich das von diesem auf die krummlinigen Systeme.

Durch die Einführung der Greenschen Koordinaten sind insbesondere auch den Randpunkten s von σ (mit $\lambda = 0$) bestimmte Parameterwerte ω zugeordnet, die auf σ um 2π variieren, und zwar durchläuft bei einer Umlaufung von σ das ω z. B. das Intervall von 0 bis 2π monoton, da

$$(7) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = \pm \frac{\partial \lambda}{\partial \nu} \quad \text{auf } \sigma \text{ nirgends verschwindet}^7).$$

Doch ist immer im Auge zu behalten, daß ein solches Greensches Koordinatensystem immer noch von der Wahl eines Pols abhängt und daß bei verschiedener Wahl desselben (z. B. einmal in \mathfrak{J} und dann in \mathfrak{A}) auch diese Zuordnung der ω -Werte zu den einzelnen Punkten von σ eine verschiedene ist*.

Wir denken uns nun im folgenden den Pol o innerhalb \mathfrak{J} zwar beliebig, aber ein für allemal fest gewählt („Koordinatenpol“) und beziehen alles auf dieses damit festgelegte Greensche Koordinatensystem⁸⁾.

Dann ist die Greensche Funktion für diesen Pol o

$$(8_1) \quad \mathfrak{G}_{(o)p} = \lambda \quad \left(p \text{ ebenso wie } o \text{ dem Gebiete } \mathfrak{J} \text{ angehörend} \right),$$

eben nach Definition (1) gleich der einen der Greenschen Koordinaten.

Wir fragen nun aber weiter: Wie groß ist die Greensche Funktion für einen beliebigen anderen Pol o' (λ', ω') innerhalb \mathfrak{J} , also die Funktion $\mathfrak{G}_{(o')p}$? — Sie bewirkt nach den Prinzipien von § 1 die konforme Abbildung von \mathfrak{J}

⁷⁾ Vgl. z. B. Lichtenstein, Math. Annalen, Bd. 67 (1909). — Wegen weiterer Literatur auch Encyclopädie d. math. Wiss., Bd. II, Teil 3, S. 247.

⁸⁾ Für das Außengebiet (d. h. falls $\mathfrak{J} \equiv \mathfrak{A}$) gibt es wieder eine ausgezeichnete Pol-Lage (bei $z = \infty$). Man könnte bei dieser etwa von den „natürlichen Greenschen Koordinaten“ sprechen, bei denen die einen Koordinatenlinien die Niveaukurven des Potentials der natürlichen Belegung sind.

auf den Einheitskreis einer w^* -Ebene, bei der o' in den Punkt $w^* = 0$ übergeführt wird⁹⁾. So haben wir also zwei konforme Abbildungen unseres Gebietes 3 auf einen Einheitskreis, einmal in der w -Ebene (§ 1), und dann in der w^* -Ebene. Damit ist aber auch eine konforme Abbildung der beiden Einheitskreise aufeinander hergestellt, bei der der Anfangspunkt der w^* -Ebene in den dem Punkte o' bei der ersten Abbildung entsprechenden Punkt $w' = e^{-\lambda' + i\omega'}$ der w -Ebene übergeht. Diese Abbildung muß aber ihren Ausdruck finden in einer bilinearen Beziehung zwischen w und w^* , und zwar genauer in

$$w^* = \frac{w - w'}{1 - \bar{w}' w} {}^{10)}$$

Benutzen wir nun die Beziehung (3'), S. 666, so folgt

$$(e^{-\mathfrak{G}_{(o')p}})^2 = |w^*|^2 = w^* \bar{w}^* = \frac{e^{\lambda - \lambda'} + e^{-(\lambda + \lambda')} - 2 \cos(\omega - \omega')}{e^{\lambda + \lambda'} + e^{-(\lambda - \lambda')} - 2 \cos(\omega + \omega')},$$

und daraus ergibt sich weiter:

$$(8_2) \quad \mathfrak{G}_{(o')p} = \frac{1}{2} \log \frac{e^{\lambda + \lambda'} + e^{-(\lambda + \lambda')} - 2 \cos(\omega - \omega')}{e^{\lambda - \lambda'} + e^{-(\lambda - \lambda')} - 2 \cos(\omega + \omega')}.$$

Kennt man also die Greensche Funktion $\lambda = \mathfrak{G}_{(o)p}$ für irgendeinen Pol o und damit ein Greensches Koordinatensystem λ, ω , so ist die Greensche Funktion für irgendeinen anderen Pol o' (λ', ω') desselben Gebietes nach dieser Formel (8₂) sofort angebar¹¹⁾.

Neben der Greenschen Funktion wollen wir nun auch noch die Greensche Belegung unter Benutzung Greenscher Koordinaten betrachten: Ihre Dichtigkeit ist allgemein

$$\eta_{(o)s} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \mathfrak{G}_{(o)}}{\partial \varphi_s} \quad [\text{vgl. z. B. I (14), S. 541}],$$

⁹⁾ Bis auf eine beliebige Drehung des Einheitskreises, die in der schon erwähnten Unbestimmtheit von ω ihren Grund hat, ist die Abbildung bekanntlich durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

¹⁰⁾ Vgl. z. B. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 1, 4. Aufl. (1934 bei Teubner) S. 62.

¹¹⁾ Diese Formel bestätigt die Symmetrie der Greenschen Funktion in den beiden Punkten $o'(\lambda', \omega')$ und $p(\lambda, \omega)$ und das Verschwinden auch von $\mathfrak{G}_{(o')p}$ am Rande (d. h. für $\lambda = 0$). — Zu dieser gleichen Formel gelangt man auch, wenn man das in meinen Beiträgen, S. 150—151 angegebene Spiegelungsverfahren in der ω, λ -Ebene zur Konstruktion der Greenschen Funktion anwendet. Damals benutzte ich als Koordinaten das Potential II der natürlichen Belegung und den Parameter (P) seiner Orthogonaltrajektorien, also nach unseren obigen Bemerkungen spezielle Greensche Koordinaten (entsprechend der „natürlichen Abbildung“ des Außengebietes) — jetzt sehen wir, daß dieses Verfahren bei Benutzung ganz beliebiger Greenscher Koordinaten und auch gleichmäßig im Innern — wie im Außengebiet anwendbar ist.

wenn ν die in das Gebiet 3 hineingerichtete Normale bedeutet (bei \mathfrak{N} also das frühere N).

Ist nun der Pol der Greenschen Belegung zugleich Koordinatenpol, so ist also nach (8₁)

$$(9_1) \quad \eta_{(o)s} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial \nu_s} \quad (> 0 \text{ für alle Lagen von } s \text{ auf } \sigma, \text{ vgl. (7)}),$$

ist es dagegen ein anderer Punkt $o' (\lambda', \omega')$, so liefert Formel (8₂):

$$\eta_{(o')s} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{e^{\lambda + \lambda'} - e^{-(\lambda + \lambda')}}{e^{\lambda + \lambda'} + e^{-(\lambda + \lambda')} - 2 \cos(\omega - \omega')} - \frac{e^{\lambda - \lambda'} - e^{-(\lambda - \lambda')}}{e^{\lambda - \lambda'} + e^{-(\lambda - \lambda')} - 2 \cos(\omega - \omega')} \right]_{\lambda=0} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \nu_s},$$

das ist unter Berücksichtigung von (9₁):

$$(9_2) \quad \eta_{(o')s} = \frac{e^{\lambda'} - e^{-\lambda'}}{e^{\lambda'} + e^{-\lambda'} - 2 \cos(\omega - \omega')} \eta_{(o)s}.$$

Also auch die Dichtigkeit der Greenschen Belegung an einer Stelle s (ω) von σ für einen beliebigen Pol $o' (\lambda', \omega')$ läßt sich bei Verwendung Greenscher Koordinaten leicht angeben, falls man sie speziell für den Koordinatenpol o kennt¹²⁾.

Hervorgehoben sei noch ein wichtiger Spezialfall dieses unseres Resultates (9₂) im Falle seiner Anwendung auf ein Außengebiet: Im Gegensatz zu C. Neumann, der (in unserer Ausdrucksweise) den Koordinatenpol o ins Unendliche annahm [vgl. die letzte Anmerkung], wollen wir den Pol o' ins Unendliche verlegen; es gehe also $\lambda' \rightarrow \gamma$ und $\omega' \rightarrow 8$. Alsdann wird $\mathfrak{G}_{(o)P} \rightarrow \Gamma - \Pi_P$ gehen [vgl. I (16), S. 542] und es ergibt sich die Formel

$$(10) \quad \varrho_s = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Pi}{\partial N_s} = \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{e^\gamma + e^{-\gamma} - 2 \cos(\omega - 8)} \cdot \eta_{(o)s},$$

nach der bei Kenntnis der Greenschen Belegung für einen beliebigen äußeren Punkt o als Pol (und $\gamma = \Gamma - \Pi_o$) sofort auch die Dichtigkeit ϱ_s der natürlichen Belegung bekannt ist.

Beiläufiges. Beachten wir noch, daß

$$(11) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \nu_s} d\sigma = \left| \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} \right| d\sigma = d\omega \quad (> 0)$$

¹²⁾ Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung eines, wenigstens für Innengebiete schon 1861 von C. Neumann angegebenen Resultats dar [vgl. Crelles Journal, Bd. 59, S. 361–366]. — 1910 hat dann C. Neumann auch für Außengebiete den Satz behandelt, allerdings nur im Spezialfalle natürlicher Greenscher Koordinaten. Unser $\eta_{(o)s}$ stellt bei ihm also die Dichtigkeit ϱ_s der natürlichen Belegung dar [vgl. Leipziger Berichte, Bd. 62, S. 288 (42)].

ist, so können wir bei Anwendung Greenscher Koordinaten die *Fundamentalfunktion* F von 3 mit den beliebigen stetigen Randwerten $f_s = f(\omega)$ nach Formel I (10'), S. 542 (mit $k = 0$) folgendermaßen darstellen:

$$(12) \quad F_{\sigma'} = F(\lambda', \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\lambda'} - e^{-\lambda'}}{e^{\lambda'} + e^{-\lambda'} - 2 \cos(\omega - \omega')} f(\omega) d\omega,$$

wie das für Innengebiete auch bereits C. Neumann im Jahre 1861 getan hat.

In dieser Formel (12) tritt so recht deutlich zutage, daß es sich bei der Lösung der Rdw.-Aufgabe mittels der Greenschen Funktion nur um eine Verallgemeinerung der bekannten Poissonschen Integralformel handelt — ja man kann den Inhalt dieser Formel (12) geradezu so darstellen: Man verpflanze die Rdw. $f(\omega)$ vorerst auf die Peripherie des Einheitskreises ($f(\theta)$ nach (6)) und löse nun zunächst die Rdw.-Aufgabe für diesen Kreis und für die Rdw. $f(\theta)$ durch das Poissonsche Integral

$$F(r', \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r'^2}{1 + r'^2 - 2r' \cos(\theta - \theta')} f(\theta) d\theta$$

und übertrage dann die Werte dieser so gewonnenen Fundamentalfunktion mittels der Formeln (6) wieder rückwärts in die z -Ebene.

§ 3.

Die Entwicklung der Grundlösung in Greenschen Koordinaten.

Es seien zwei Punkte des Gebietes 3 gegeben, $z_1(\lambda_1, \omega_1)$ und $z_2(\lambda_2, \omega_2)$; wir nehmen immer $z_2 \neq z_1$ an. Dann handle es sich darum, die Funktion (Grundlösung)

$$(13) \quad T_{12} = \log \frac{1}{E_{12}} = -\log |z_1 - z_2| = -\Re \log(\varphi(w_1) - \varphi(w_2)),$$

oder, wie wir sie zweckmäßig umformen werden:

$$(13') \quad T_{12} = -\Re \log \frac{\varphi(w_1) - \varphi(w_2)}{w_1 - w_2} - \Re \log(w_1 - w_2)$$

in eine trigonometrische Reihe der Winkelfargumente ω_1 und ω_2 zu entwickeln. — Im Gegensatz zu den Betrachtungen des vorigen Paragraphen, die wir für Innen- und Außengebiet gemeinsam durchführen konnten, sind wir jetzt allerdings genötigt, diese Aufgabe für jedes dieser Gebiete einzeln zu behandeln. Wir beginnen mit den einfacheren Betrachtungen für das Innengebiet 3:

Den in (13') auftretenden Differenzenquotienten $\frac{\varphi(w_1) - \varphi(w_2)}{w_1 - w_2}$ fassen wir auf als Funktion der beiden Veränderlichen w_1 und w_2 . Sie ist innerhalb des von den Einheitskreisen der w_1 - und w_2 -Ebene gebildeten Bereiches *regulär und nicht verschwindend* — ersteres folgt unmittelbar aus dem Verhalten der Funktion $\varphi(w)$, das letztere aus der Eineindeutigkeit der

durch sie vermittelten Abbildung —, es kann niemals verschiedenen Werten von w derselbe Wert $z = \varphi(w)$ entsprechen. — Daher ist auch der Logarithmus dieses Differenzenquotienten eine innerhalb jenes Bereiches *reguläre Funktion von w_1 und w_2* und läßt sich daher in eine Doppelpotenzreihe entwickeln. Wir trennen in den Koeffizienten sogleich Reelles und Imaginäres — so folgt denn:

$$(14) \quad \log \frac{\varphi(w_1) - \varphi(w_2)}{w_1 - w_2} = \sum_{\nu} \sum_{\kappa} (C_{\nu, \kappa} + i D_{\nu, \kappa}) w_1^{\nu} w_2^{\kappa}, \quad (|w_1| < 1, |w_2| < 1),$$

wobei es auf die Reihenfolge der beiden Summationen nicht ankommt.

Diese Gleichung kann man geradezu als die *Definition der beiden Systeme reeller Größen $C_{\nu, \kappa}$ und $D_{\nu, \kappa}$* ansehen, sind doch die Koeffizienten $C_{\nu, \kappa} + i D_{\nu, \kappa}$ in bekannter Weise als Differentialquotienten darstellbar. — Wegen der Symmetrie der dargestellten Funktion in den Argumenten w_1 und w_2 sind die Koeffizienten *symmetrisch in den Indizes*:

$$C_{\nu, \kappa} = C_{\kappa, \nu} \quad \text{und} \quad D_{\nu, \kappa} = D_{\kappa, \nu}.$$

Jetzt drücken wir w_1 und w_2 nach (3) durch die Greenschen Koordinaten von z_1 und z_2 aus, um so zu erhalten:

$$\log \frac{\varphi(w_1) - \varphi(w_2)}{w_1 - w_2} = \sum_{\nu} \sum_{\kappa} (C_{\nu, \kappa} + i D_{\nu, \kappa}) e^{-\nu \lambda_1 - \kappa \lambda_2} (\cos(\nu \omega_1 + \kappa \omega_2) + i \sin(\nu \omega_1 + \kappa \omega_2)),$$

und danach ist der uns allein interessierende Realteil gleich

$$(14') \quad \sum_{\nu} \sum_{\kappa} (C_{\nu, \kappa} \cos(\nu \omega_1 + \kappa \omega_2) - D_{\nu, \kappa} \sin(\nu \omega_1 + \kappa \omega_2)) e^{-\nu \lambda_1 - \kappa \lambda_2}.$$

Diesen Ausdruck vereinfachen wir rein formal durch Einführung einiger neuer Bezeichnungen: An Stelle der zwei Folgen von cos- und sin-Funktionen führen wir eine einzige Folge von Funktionen p_n („Kreisfunktionen“) ein, indem wir allgemein setzen:

$$(15) \quad \cos 0 = 1 = p_0, \\ \cos n x = \sqrt{\frac{n}{2}} p_{2n}(x), \quad \sin n x = \sqrt{\frac{n}{2}} p_{2n-1}(x)^{13)} \quad (n > 0).$$

¹³⁾ Die hinzugefügten Zahlenfaktoren sind an sich ziemlich unwesentlich — sie werden sich aber in dieser Weise später als zweckmäßig erweisen. — Übrigens ist, wie ich nachträglich bemerke, schon C. Neumann im Jahre 1878 einmal ganz ähnlich vorgegangen in seinem Aufsatz „Entwicklung nach Elementarpotentialen“ in den Leipziger Berichten, Bd. 30 [vgl. vor allem S. 56]. Auch sonst enthält dieser Aufsatz manches mit meinen Untersuchungen verwandtes, doch besteht ein großer Unterschied darin, daß C. Neumann nicht mit Greenschen Koordinaten arbeitet (was fast Wunder nehmen muß, da er sie bereits in der oben, Anm. 12, zitierten Arbeit von 1861 — wenn auch nicht unter diesem Namen — tatsächlich benutzt). In seiner obigen Arbeit von 1878 ist der Parameter ω der Randpunkte im wesentlichen willkürlich, und demgemäß tragen auch die Resultate weit unbestimmteren Charakter.

Wir führen nun noch das Symbol (ν) ein, das im folgenden eine sehr große Rolle spielen wird: es soll die Zahl $\frac{\nu+1}{2}$ darstellen, falls diese ganz ist (ν ungerade), sonst aber (wenn ν gerade) die nächstkleinere ganze Zahl. Es ist also (ν) eine kurze Schreibweise für das bekannte Symbol $\left[\frac{\nu+1}{2}\right]$,

$$(16) \quad (\nu) = \left[\frac{\nu+1}{2}\right] \quad \text{und daher} \quad (2n-1) = (2n) = n.$$

Dann können wir die Folge der Funktionen $p_\nu(x)$ auch folgendermaßen erklären:

$$(15') \quad p_0(x) = 1 \quad p_\nu(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{(\nu)}} \cos(\nu)x & \text{falls } \nu \text{ gerade } (> 0), \\ \sqrt{\frac{2}{(\nu)}} \sin(\nu)x & \text{,, } \nu \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Sie haben die Integraleigenschaften:

$$(15'') \quad \int_0^{2\pi} p_0^2(x) dx = 2\pi \quad \int_0^{2\pi} p_\nu(x) p_\kappa(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } \kappa \neq \nu, \\ 2\pi & \text{,, } \kappa = \nu > 0. \end{cases}$$

Sodann führen wir an Stelle der beiden Systeme von Konstanten $C_{\nu\kappa}$ und $D_{\nu\kappa}$ ein einziges neues System, das der Größen $J_{\nu\kappa}$, ein, die wir folgendermaßen definieren:

$$(17) \quad J_{00} = 2C_{00} \quad \begin{cases} J_{2\nu-1,0} = J_{0,2\nu-1} = -\sqrt{2\nu} D_{\nu,0} \\ J_{2\nu,0} = J_{0,2\nu} = \sqrt{2\nu} C_{\nu,0} \end{cases} \quad (\nu > 0)$$

$$\begin{cases} J_{2\nu-1,2\kappa} = J_{2\nu,2\kappa-1} = -\sqrt{\nu \cdot \kappa} D_{\nu,\kappa} \\ J_{2\nu,2\kappa} = -J_{2\nu-1,2\kappa-1} = \sqrt{\nu \cdot \kappa} C_{\nu,\kappa} \end{cases} \quad (\nu, \kappa > 0).$$

Auch dieses System der Größen $J_{\nu\kappa}$ ist *symmetrisch* in den beiden Indizes, wie es die Systeme der $C_{\nu\kappa}$ und $D_{\nu\kappa}$ waren.

Unter Benutzung all dieser Bezeichnungen können wir dann den Realteil (14') des Logarithmus (14) folgendermaßen darstellen:

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^n \sum_{\kappa=0}^n J_{\nu\kappa} e^{-(\nu)\lambda_1 - (\kappa)\lambda_2} p_\nu(\omega_1) p_\kappa(\omega_2).$$

Es kommt also bei der Grundlösung T die Eigenart des betrachteten Gebietes \mathfrak{G} oder seiner Abbildungsfunktion $\varphi(w)$ lediglich in diesem einen System (Matrix) der Größen $J_{\nu\kappa}$ zum Ausdruck.

Nun gilt es, in Formel (13') auch noch das zweite Glied rechter Hand in eine Reihe zu entwickeln: es ist

$$(18_1) \quad 2\Re \log(w_1 - w_2) = \log|w_1 - w_2|^2 = \log(w_1 - w_2)(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) \\ = \log(e^{-2\lambda_1} + e^{-2\lambda_2} - 2e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \cos(\omega_1 - \omega_2)) \\ = -(\lambda_1 + \lambda_2) + \log(e^{\lambda_1 - \lambda_2} + e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)} - 2\cos(\omega_1 - \omega_2)).$$

Für diesen letzteren Logarithmus gilt aber die bekannte Entwicklung¹⁴⁾:

$$(18_2) \quad \log(\) = |\lambda_1 - \lambda_2| - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n|\lambda_1 - \lambda_2|} \cos n(\omega_1 - \omega_2).$$

Hier führen wir wieder unsere Kreisfunktionen p_n ein und ergänzen noch das Glied für $n = 0$ — dann können wir zusammenfassend schreiben:

$$(19) \quad 2 T_{12} = (\lambda_1 + \lambda_2) - |\lambda_1 - \lambda_2| - 1 - \sum_{\nu} \sum_{\kappa} J_{\nu\kappa} e^{-(\nu)\lambda_1 - (\kappa)\lambda_2} p_{\nu}(\omega_1) p_{\kappa}(\omega_2) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n|\lambda_1 - \lambda_2|} p_n(\omega_1) p_n(\omega_2),$$

oder, wenn wir noch die Elemente $e_{\nu\kappa}$ der Einheitsmatrix E einführen:

$$(20) \quad e_{\nu\kappa} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \kappa \\ 1 & \text{,, } \nu = \kappa, \end{cases}$$

auch folgendermaßen:

$$(19') \quad 2 T_{12} = (\lambda_1 + \lambda_2) - |\lambda_1 - \lambda_2| - 1 \\ - \sum_{\nu} \sum_{\kappa} (J_{\nu\kappa} e^{-(\nu)\lambda_1 - (\kappa)\lambda_2} - e_{\nu\kappa} e^{-(\nu)|\lambda_1 - \lambda_2|}) p_{\nu}(\omega_1) p_{\kappa}(\omega_2).$$

Damit ist unser erstes Ziel erreicht, für das Innengebiet \mathfrak{Z} die Funktion T_{12} (Grundlösung) unter Benutzung Greenscher Koordinaten in eine Doppelreihe nach den Kreisfunktionen p_n für die Argumente ω_1 und ω_2 entwickelt.

Nach ihrer Herleitung aus einer Doppelpotenzreihe [vgl. (14)] scheint diese Entwicklung zunächst an die Einschränkungen $|w_1| < 1$ und $|w_2| < 1$, oder, was dasselbe ist, $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$, gebunden zu sein, d. h. geometrisch gesprochen, daran, daß beide Punkte z_1 und z_2 wirklich innerhalb \mathfrak{Z} liegen. — Ich will jetzt zeigen, daß sie aber (höchstens mit einer unwesentlichen Einschränkung) auch noch gültig bleibt, wenn der eine dieser Punkte auf die Randkurve σ rückt.

Den einen Punkt nehmen wir nach wie vor im Innern von \mathfrak{Z} an und denken ihn uns fest gegeben. Wir bezeichnen ihn jetzt mit i ; dann ist also T eine Funktion der Lage des zweiten Punktes $z(\lambda, \omega)$, die wir $T_{(i)}(\lambda, \omega)$ nennen. — Es sollen dann also die Werte $T_{(i)}(0, \omega)$ dieser Funktion auf der Kurve $\sigma(\lambda = 0)$ untersucht und der Nachweis erbracht werden, daß auch für sie noch die aus (19') entspringende Entwicklungsformel gilt: Da es eine sogar *holder-stetige*^{14a)} Funktion auch von ω ist (da $\frac{\partial \sigma}{\partial \omega} = \pm \frac{1}{\frac{\partial \lambda}{\partial \nu}}$ nach (7)

¹⁴⁾ Vgl. z. B. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie II, S. 95. — Der Akzent am Summenzeichen soll hier, wie auch später immer, noch ausdrücklich darauf aufmerksam machen, daß die Summation erst mit $n = 1$ beginnt.

^{14a)} Vgl. unten die Anm. 19.

existiert), so steht die Existenz einer Entwicklung nach unseren Kreisfunktionen $p_n(\omega)$ von vornherein fest:

$$(21_0) \quad \begin{cases} 2 T_{(i)}(0, \omega) = L_0^{(i)}(0) + \sum_1^{\infty} (\kappa) L_{\kappa}^{(i)}(0) p_{\kappa}(\omega)^{15)} \\ \text{mit } L_n^{(i)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 T_{(i)}(0, \omega)) p_n(\omega) d\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Das Argument 0 bei den Koeffizienten $L^{(i)}$ soll hier nochmals ausdrücklich auf σ , auf die Kurve $\lambda = 0$, hinweisen; denn wir wollen jetzt auch noch eine σ von innen benachbarte Greensche Niveaukurve $\lambda = \varepsilon > 0$ betrachten. Für sie gilt entsprechend:

$$(21_1) \quad \begin{cases} 2 T_{(i)}(\varepsilon, \omega) = L_0^{(i)}(\varepsilon) + \sum_1^{\infty} (\kappa) L_{\kappa}^{(i)}(\varepsilon) p_{\kappa}(\omega) \\ \text{mit } L_n^{(i)}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 T_{(i)}(\varepsilon, \omega)) p_n(\omega) d\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \end{cases}$$

und hier sind, da ja jetzt beide Argumentpunkte $(i(\lambda, \omega_i)$ und (ε, ω) innerhalb σ liegen, die Koeffizienten $L_{(i)}^{(i)}$ nach (19) bekannt, nämlich (falls $\varepsilon < \lambda_i$):

$$L_0^{(i)}(\varepsilon) = 2\varepsilon - \sum_0^{\infty} J_{\nu, 0} e^{-(\nu)\lambda_i} p_{\nu}(\omega_i),$$

$$(\kappa) L_{\kappa}^{(i)}(\varepsilon) = -e^{-(\kappa)\varepsilon} \sum_0^{\infty} J_{\nu, \kappa} e^{-(\nu)\lambda_i} p_{\nu}(\omega_i) + e^{(\kappa)\varepsilon} \cdot e^{-(\kappa)\lambda_i} p_{\kappa}(\omega_i) \quad (\kappa > 0).$$

Da aber $T_{(i)}(\varepsilon, \omega)$ mit zur 0 abnehmendem ε gleichmäßig im ganzen Intervall $0 \leq \omega \leq 2\pi$ gegen $T_{(i)}(0, \omega)$ konvergiert¹⁶⁾, folgt aus den Integraldarstellungen in (21₀) und (21₁), daß $L_{\kappa}^{(i)}(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\kappa}^{(i)}(\varepsilon)$, also:

$$(22) \quad \begin{cases} L_0^{(i)}(0) = - \sum_0^{\infty} J_{\nu, 0} e^{-(\nu)\lambda_i} p_{\nu}(\omega_i), \\ (\kappa) L_{\kappa}^{(i)}(0) = - \sum_0^{\infty} J_{\nu, \kappa} e^{-(\nu)\lambda_i} p_{\nu}(\omega_i) + e^{-(\kappa)\lambda_i} p_{\kappa}(\omega_i) \quad (\kappa > 0) \end{cases}$$

¹⁵⁾ Wegen dieser Form des Ansatzes vgl. unten die Anm. 17.

¹⁶⁾ Um jeden etwaigen Zweifel hieran zu beseitigen, folge hier kurz der Beweis: Nach dem Mittelwertsatz ergibt sich, daß

$$|T_{(i)}(\varepsilon, \omega) - T_{(i)}(0, \omega)| = \varepsilon |T'_{(i)}(\vartheta, \omega)| = \varepsilon \left| \frac{\partial T_{(i)}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\vartheta, \omega} = \varepsilon \left| \frac{\cos(E_{ij}, \nu_j)}{E_{ij}} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \nu_j} \right|_{j(\vartheta, \omega)}$$

(ϑ positiv, < 1 und abhängig von ω).

ist, und das liefert dann:

$$(23) \quad 2 T_{(0)}(0, \omega) = -1 - \sum_0^{\infty} \left[\sum_0^{\infty} (J_{v, x} - e_{v, x}) e^{-(v)\lambda_i} p_v(\omega_i) \right] p_x(\omega),$$

und das ist tatsächlich unsere Formel (19') angewandt auf den Fall $\lambda_1 = \lambda_i$ und $\lambda_2 = 0$, d. h. auf den Fall, daß der eine Argumentpunkt von T_{12} auf den Rand σ von \mathfrak{I} gerückt ist. — Diese Anwendung ist also statthaft — höchstens ist es nach dem Bisherigen fraglich, ob wir auch jetzt in (23) noch die Reihenfolge der beiden Summationen vertauschen dürfen —, darum jetzt die Schreibweise mit den Klammern.

Nunmehr wenden wir uns entsprechenden Betrachtungen für das Außengebiet \mathfrak{A} zu. Wir denken uns nach unseren früheren Prinzipien (vgl. § 2) in \mathfrak{A} Greensche Koordinaten λ, ω eingeführt und stellen uns wieder die Aufgabe, T_{12} als Funktion der Winkelargumente ω_1 und ω_2 in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln. — Es bedarf da formal doch einiger Modifikationen gegenüber den Betrachtungen beim Innengebiet: Infolge der Gestalt (4_A) der Abbildungsfunktion $\varphi(w)$ wird jetzt nach (13')

$$T_{12} = -\Re \log \frac{\frac{\varphi(w_1)}{w_1 - c} - \frac{\varphi(w_2)}{w_2 - c}}{w_1 - w_2} - \Re \log(w_1 - w_2)$$

oder

$$T_{12} = -\Re \log \frac{(w_2 - c) \varphi(w_1) - (w_1 - c) \varphi(w_2)}{w_1 - w_2} - \Re \log(w_1 - w_2) + \Re \log(w_1 - c) + \Re \log(w_2 - c).$$

Die drei letzten Glieder können wir nun leicht, wenn wir noch $c = e^{-\gamma + i\delta}$ beachten [vgl. (5)], nach den Formeln (18) in Reihen der gewünschten Form entwickeln — und im ersten Gliede kann das Argument des Logarithmus ebensowenig wie $\frac{\varphi(w_1) - \varphi(w_2)}{w_1 - w_2}$, aus dem es ja durch bloße Abtrennung von Faktoren hervorgegangen ist, im Bereiche $|w_1| < 1$, $|w_2| < 1$ verschwinden [vgl. oben S. 672]. — Das Argument ist also wieder *regulär und nicht ver-*

Hier bedeutet v_j immer die innere Normale auf der jeweils durch j hindurchgehenden Greenschen Niveaukurve σ_j ($\lambda = \lambda_j = \theta \varepsilon$). Wir können also $\frac{\partial \lambda}{\partial v_j}$ stets deuten als „normale Ableitung“ einer Greenschen Funktion (nämlich der Greenschen Funktion $\lambda - \lambda_j$ des von σ_j begrenzten Gebietes). Danach ist $\frac{\partial \lambda}{\partial v_j}$ eine für alle Lagen von j in dem abgeschlossenen Gebiete zwischen σ ($\lambda = 0$) und einer festen Kurve $\lambda = \varepsilon_0$ stetige und [nach (7)] nichtverschwindende Funktion und besitzt in ihm demgemäß auch ein von 0 verschiedenes (absolutes) Minimum μ . Mit diesem Werte folgt dann:

$$|T_{(i)}(\varepsilon, \omega) - T_{(i)}(0, \omega)| \leq \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{E_{ij}} \leq \frac{\varepsilon}{\mu r_i(\varepsilon_0)} \quad \text{für alle } \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

($r_i(\varepsilon_0)$ kleinster Abstand zwischen i und der Kurve $\lambda = \varepsilon_0 < \lambda_i$). Daraus ergibt sich ohne weiteres die behauptete gleichmäßige Konvergenz.

schwindend, daher können wir auch den Logarithmus wieder in eine Doppelpotenzreihe entwickeln:

$$(14_A) \log \frac{(w_2 - c) \varphi(w_1) - (w_1 - c) \varphi(w_2)}{w_1 - w_2} = \sum_{\gamma} \sum_{\alpha} (C_{\gamma\alpha} + i D_{\gamma\alpha}) w_1^{\gamma} w_2^{\alpha} \left(\begin{array}{l} |w_1| < 1 \\ |w_2| < 1 \end{array} \right),$$

und daraus folgt unter Benutzung unserer Kreisfunktionen p_n genau entsprechend wie beim Innengebiet:

$$(19_A) 2 T_{12} = \begin{cases} 1 - 2\gamma - |\lambda_1 - \lambda_2| + |\lambda_1 - \gamma| + |\lambda_2 - \gamma| \\ - \sum_{\gamma} \sum_{\alpha} (A_{\gamma\alpha} e^{-(\gamma)\lambda_1 - (\alpha)\lambda_2} - e_{\gamma\alpha} e^{-(\gamma)|\lambda_1 - \lambda_2|}) p_{\gamma}(\omega_1) p_{\alpha}(\omega_2) \\ - \sum_{\alpha} e^{-(\alpha)|\lambda_1 - \gamma|} p_{\alpha}(\delta) p_{\alpha}(\omega_1) - \sum_{\alpha} e^{-(\alpha)|\lambda_2 - \gamma|} p_{\alpha}(\delta) p_{\alpha}(\omega_2). \end{cases}$$

Dabei entsteht das System der Koeffizienten $A_{\gamma\alpha}$ aus den beiden Systemen der $C_{\gamma\alpha}$ und $D_{\gamma\alpha}$ genau ebenso, wie oben nach (17) die Größen J aus den Systemen der $C_{\gamma\alpha}$ und $D_{\gamma\alpha}$ hervorgingen. — In diesem System der A steckt wieder die ganze Eigenart des Gebietes \mathfrak{A} oder der Kurve σ , d. h. die Koeffizienten $A_{\gamma\alpha}$ sind in dieser Entwicklung das einzige, was sich ändert, wenn man \mathfrak{A} durch das Außengebiet einer anderen Kurve ersetzt.

Auch jetzt läßt sich wieder genau wie beim Innengebiet nachweisen, daß diese Entwicklung noch richtig bleibt, wenn man den einen der beiden Argumentpunkte z_1 und z_2 von T_{12} auf die Randkurve σ von \mathfrak{A} rücken läßt. Es ergibt sich so:

$$(23_A) 2 T_{(a)}(0, \omega) = \begin{cases} 1 - (\lambda_a + \gamma) + |\lambda_a - \gamma| \\ - \sum_{\gamma} \left[\sum_{\alpha} (A_{\gamma\alpha} - e_{\gamma\alpha}) e^{-(\gamma)\lambda_a} p_{\gamma}(\omega_a) \right] p_{\gamma}(\omega) \\ - \sum_{\alpha} e^{-(\alpha)|\lambda_a - \gamma|} p_{\alpha}(\delta) p_{\alpha}(\omega_a) - \sum_{\alpha} e^{-(\alpha)\gamma} p_{\alpha}(\delta) p_{\alpha}(\omega), \end{cases}$$

wo die Schreibweise mit den eckigen Klammern wieder vor einer Vertauschung der Summationen warnen soll.

§ 4.

Die Robinschen Derivierten

unter Zugrundelegung Greenscher Koordinaten des Innengebietes.

Wir denken uns zunächst im Innengebiet \mathfrak{I} nach den früheren Prinzipien Greensche Koordinaten λ, ω eingeführt. Ferner sei auf der Randkurve σ eine stetige Funktion $g_{\sigma} = g(\omega)$ vorgeschrieben. — Wir wollen dann ihre Robinschen Derivierten g', g'', \dots und die zugehörigen Potentiale V, V', V'', \dots berechnen [vgl. I (17_R) und (18_R), S. 544].

Wir beginnen mit der Berechnung des Potentials V , natürlich für einen inneren Punkt i :

$$(24) \quad V_i = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma} g_{\sigma} T_{\sigma i} d\sigma.$$

Hier ist, wenn wir noch den Parameterwert des Elementes $d\sigma$ schlechtweg mit ω bezeichnen, $T_{\sigma i}$ unser früheres $T_{(i)}(0, \omega)$ [vgl. (21₀)], wofür wir jetzt kürzer $T_{(i)}(\omega)$ schreiben wollen, so daß also

$$((21_0)) \quad 2 T_{\sigma i} = 2 T_{(i)}(\omega) = L_0(\lambda_i, \omega_i) + \sum_0^{\infty} (\kappa) L_{\kappa}(\lambda_i, \omega_i) p_{\kappa}(\omega)$$

ist, wo die $L_n(\lambda_i, \omega_i)$ (die früheren $L_n^{(i)}(0)$) in den Bedeutungen stehen:

$$((22)) \quad \begin{cases} L_0(\lambda_i, \omega_i) = - \sum_0^{\infty} J_{r_0} e^{-(r) \lambda_i} p_r(\omega_i) \quad \text{und} \\ (\kappa) L_{\kappa}(\lambda_i, \omega_i) = - \sum_0^{\infty} (J_{r_{\kappa}} - e_{r_{\kappa}}) e^{-(r) \lambda_i} p_r(\omega_i) \quad (\kappa > 0). \end{cases}$$

Da ferner nach (11) $d\sigma = \frac{d\omega}{\partial \lambda / \partial v_0}$ mit $d\omega > 0$ ist, so läge es nahe, noch den Quotienten

$$(25) \quad \frac{2 \frac{g_{\sigma}}{\partial \lambda}}{\partial v_0} = \frac{g(\omega)}{\pi \eta_{(i)}(\omega)} \quad [\text{vgl. (9)}],$$

der sicher eine *stetige Funktion* von ω darstellt, in eine Reihe nach Kreisfunktionen zu entwickeln. Da das aber nicht bei jeder stetigen Funktion möglich ist (Dirichletsche Bedingungen), so führe ich wenigstens die „Fourier-Koeffizienten (F.-K.)“¹⁷ der Funktion (25)¹⁸ ein

$$(25') \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\omega)}{\pi \eta_{(i)}(\omega)} p_n(\omega) d\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\sum (n) b^2 \text{ konvergent}).$$

¹⁷) Wegen der von der üblichen abweichenden Normierung unserer Kreisfunktionen $p_n(x)$ [vgl. (15'')] bedarf es auch neuer Festsetzungen über die Bezeichnungen: Als F.-K. einer Funktion $\varphi(x)$ bezeichnen wir im folgenden stets die Größen

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) p_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

und bringen das in der Hurwitzschen Symbolik zum Ausdruck durch die „Äquivalenz“

$$\varphi(x) \sim \alpha_0 + \sum_1^{\infty} (v) \alpha_v p_v(x).$$

Nach der bekannten Besselschen Ungleichung folgt dann:

$$\sum (v) \alpha_v^2 \text{ konvergent (bei stetigem } \varphi(x)).$$

Diese Größen wollen wir im folgenden kurz als die „Robin-Koeffizienten (R.-K.) der Funktion $g(\omega)$ “ bezeichnen, weil sich ihre Einführung gerade bei der Robinschen Methode zweckmäßig erweist. Mit ihnen gilt dann in der Hurwitzschen Symbolik:

$$(25'') \quad g(\omega) \sim \pi \eta(\omega) \left(b_0 + \sum_1^{\infty} (\nu) b, p, (\omega) \right) \quad \left(m \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g, d\sigma = b_0 \right).$$

Dann ergibt sich aus (24) nach dem „Fundamentalsatz der Fourierschen Konstanten“¹⁸⁾, gleichgültig ob diese letztere Reihe konvergiert oder nicht:

$$(26) \quad 2 V_i = 2 V(\lambda_i, \omega_i) = b_0 L_0(\lambda_i, \omega_i) + \sum_1^{\infty} (\kappa) b, \kappa, L_{\kappa}(\lambda_i, \omega_i)$$

Damit ist V_i als Funktion von ω_i (auf einer Niveaukurve $\lambda_i = \text{const}$) als *Summe von Fourier-Reihen* dargestellt [vgl. ((22))]. — Wir wollen jetzt untersuchen, ob es sich auch als eine einzige Fourier-Reihe darstellen läßt, indem man die beiden Summationen in (26) und (22) vertauscht — oder ob man wenigstens (da uns die Konvergenzfrage weniger interessiert) die F.-K. von V_i durch Zusammenfassung entsprechender Koeffizienten der Einzelreihen erhalten kann:

Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Entwicklung (21₀), die ihrerseits eine Folge der Stetigkeit der dargestellten Funktion ist, ergibt sich mit Rücksicht auf (15''):

$$(27) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (T_{(\omega)}(\omega))^2 d\omega = L_0^2(\lambda_i, \omega_i) + \sum_1^{\infty} (\kappa) L_{\kappa}^2(\lambda_i, \omega_i).$$

Da das Integral linker Hand als Funktion von ω_i aber stetig ist und Gleiches auch von allen Gliedern $L_{\kappa}(\lambda_i, \omega_i)$ der Reihe rechts gilt [vgl. (21₀), S. 676], so konvergiert diese Reihe nach einem bekannten Satze von Dini gleichmäßig für $0 \leq \omega_i \leq 2\pi$, und das überträgt sich mittels der Schwarzschen Ungleichung dann auch auf die Reihe (26), wie man leicht sieht, wenn man sie in die Form $\sum (\sqrt{(\kappa)} b, \kappa) (\sqrt{(\kappa)} L_{\kappa}(\lambda_i, \omega_i))$ versetzt. — Dies festgestellt, können wir jetzt die F.-K. $v_n(\lambda_i)$ von V_i durch gliedweise Integration der Reihe (26) (von Fourier-Reihen) erhalten, oder aber tatsächlich

¹⁸⁾ Vgl. Hurwitz, Math. Annalen, Bd. 57, S. 429 (und wegen des Historischen auch Bd. 59, S. 553). — Das Wesentliche ist, daß aus „Äquivalenzen“ eine „Gleichung“ folgt. Aber auch wo wir bei Äquivalenzen stehen bleiben werden, also eigentlich nur die F.-K. angeben, dürfen wir die betreffenden Funktionen damit als bestimmt ansehen: denn eine stetige Funktion (und nur um solche handelt es sich immer) kann man sich, auch wenn ihre Fourier-Reihe nicht konvergiert, aus ihren F.-K., z. B. nach dem Fejérschen Verfahren der Mittelbildung, bestimmt denken.

durch Zusammenfassung entsprechender Koeffizienten ihrer einzelnen Glieder. — Das liefert aber nach (22) für $n = 0$ bzw. $n = \nu > 0$:

$$(28) \quad 2v_0(\lambda_i) = - \sum_0^\infty b_n J_{n0}, \text{ bzw. } 2v_\nu(\lambda_i) = - \frac{e^{-(\nu)\lambda_i}}{(\nu)} \sum_0^\infty b_n (J_{\nu,n} - e_{\nu,n}).$$

Von diesen F.-K. von V_i gehen wir nun zu denen von $\frac{\partial V_i}{\partial \lambda_i}$ über. Wir nennen sie $u_n(\lambda_i)$, so daß also

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial V_i}{\partial \lambda_i} \sim u_0(\lambda_i) + \sum_1^\infty (\nu) u_\nu(\lambda_i) p_\nu(\omega_i) \\ \text{mit } u_n(\lambda_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial V_i}{\partial \lambda_i} p_n(\omega_i) d\omega_i \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \end{cases}$$

und aus dieser Integraldarstellung ersehen wir, daß die $u_n(\lambda_i)$ aus den $v_n(\lambda_i)$ einfach durch Differentiation nach λ_i hervorgehen; demnach folgt:

$$(29') \quad u_0(\lambda_i) \equiv 0, \quad 2u_\nu(\lambda_i) = 2v'_\nu(\lambda_i) = e^{-(\nu)\lambda_i} \sum_0^\infty b_n (J_{\nu,n} - e_{\nu,n}) \quad (\nu > 0).$$

Dies zuvor festgestellt, lassen wir nun den Punkt i gegen einen Punkt s (ω) von σ , d. h. λ_i gegen 0 gehen. Dann wird bekanntlich:

$$(30) \quad \lim_{\lambda_i \rightarrow 0} 2 \frac{\partial V_i}{\partial \lambda_i} = 2 \frac{\frac{\partial V}{\partial \lambda_s}}{\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_s}} = \frac{g'_s - g_s}{\pi \eta_{(\omega)s}} \quad [\text{vgl. (9)}_1 \text{ und I (19)}_R, \text{ S. 545}],$$

wenn g' eben die erste Robinsche Derivierte von g bedeutet — und diese Annäherung erfolgt gleichmäßig für alle Punkte s von σ oder für das ganze Intervall $0 \leq \omega \leq 2\pi$ [vgl. Stud., S. 29]. Daher gehen (wegen ihrer Integraldarstellungen) auch die F.-K. von $2 \frac{\partial V_i}{\partial \lambda_i}$ (also die Größen $2u_n(\lambda_i)$) über in

die F.-K. der Differenz der beiden Funktionen $\frac{g'_s}{\pi \eta_{(\omega)s}}$ und $\frac{g_s}{\pi \eta_{(\omega)s}}$. — Die F.-K. dieser letzteren Funktion nannten wir aber oben die R.-K. der Funktion g_s ; es sind dies unsere Größen b_n . Führen wir also entsprechend die R.-K. von g'_s ein und nennen sie b'_n , so daß also

$$(31) \quad g'_s = g'(\omega) = \pi \eta_0 (b'_0 + \sum_1^\infty (\nu) b'_\nu p_\nu(\omega))^{19)}$$

¹⁹⁾ Daß wir hier eine Gleichung statt einer bloßen „Äquivalenz“ schreiben dürfen, also g' durch eine konvergente Reihe darstellen können, ergibt sich folgendermaßen: Es folgt nach allgemeinen Resultaten [vgl. z. B. Stud., S. 60], daß, falls g

ist, so folgt allgemein:

$$(30') \quad \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} 2 u_n(\lambda_1) = b'_n - b_n,$$

und das ist nach (29') für $n = 0$: $b'_0 - b_0 = 0$, dagegen

$$b'_v - b_v = \sum_0^\infty b (J_{v,x} - e_{v,x}) = -b_v + \sum_0^\infty b_x J_{v,x} \quad \text{für } v > 0,$$

oder schließlich:

$$(32) \quad b'_0 = b_0 \quad \text{und} \quad b'_v = \sum_0^\infty J_{v,x} b_x \quad \text{für } v > 0.$$

Damit können wir die erste Derivierte g' der Funktion g als bestimmt ansehen: wir haben ihre R.-K. berechnet aus den R.-K. der gegebenen Funktion g , und zwar liefern unsere Formeln (32) ein sehr einfaches Verfahren für diese Berechnung^{19a)}. Die Brauchbarkeit dieses Verfahrens und damit vor allem die Konvergenz der auftretenden Reihen ist bewiesen unter der alleinigen Voraussetzung, daß die Funktion g stetig ist.

§ 5.

Folgerungen.

Wir wollen von unserem letzten Resultat (32) noch einige Anwendungen auf Spezialfälle machen, die uns zu wichtigen Erkenntnissen führen werden.

Anwendung I.

Wir unterwerfen die Ausgangsfunktion g , der Einschränkung $\int g_\sigma d\sigma = 0$, d. h. wir nehmen an, daß die erste Robinsche Belegung (Dichtigkeit $\frac{1}{\pi} g_\sigma$) und damit auch alle weiteren die Masse $m = 0$ haben [vgl. Stud., S. 58], oder daß von ihren R.-K. der erste verschwindet:

$$\text{I.} \quad b_0 = 0 \quad [\text{vgl. (25'')}]$$

nur stetig vorausgesetzt wird, g' sogar (in meiner damaligen Bezeichnung) „regulär stetig“ ist, und daraus folgt unter den über σ gemachten einschränkenden Voraussetzungen unschwer, daß $\frac{g'_\sigma}{\pi \eta(\sigma)}$ (in der heute üblich gewordenen Ausdrucksweise) „Hölder-stetig“ ist, und das genügt, die Konvergenz der Fourier-Reihe dieser Funktion zu verbürgen [vgl. z. B. Knopp, Unendliche Reihen, 3. Aufl. (1931 bei Springer), S. 380].

^{19a)} Die erste Gleichung (32) stellt nach (25'') nur die bekannte Tatsache der Massengleichheit aufeinanderfolgender Robinscher Belegungen dar [vgl. Stud., S. 58].

Dann konvergieren bekanntlich die Robinschen Derivierten g', g'', g''' usw. gleichmäßig auf σ gegen 0 [vgl. z. B. Math. Annalen, Bd. 102, S. 469 (9₀)] und das Gleiche gilt daher auch für ihre sämtlichen R.-K.:

$$(33_1) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} b_n^{(\mu)} \equiv \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int \frac{g^{(\mu)}}{\pi \eta_{(0)}} p_n(\omega) d\omega \right) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Wir nehmen nun zunächst überdies noch an,

A. daß auch von den weiteren R.-K. alle übrigen verschwinden bis auf einen einzigen b_n , der gleich 1 gesetzt werde,

so daß also die Ausgangsfunktion unter den gemachten Voraussetzungen

$$(I A) \quad g_z = A_z \equiv \pi \eta_{(0)z}(\alpha) p_\alpha(\omega)^{20)} \quad (\alpha \text{ eine beliebige der Zahlen } 1, 2, 3, \dots)$$

ist. — Ihre R.-K. sind $\alpha_n = e_{n\alpha}$ und die R.-K. ihrer ersten Derivierten A'_z nach (32)

$$(34 A') \quad \alpha'_0 = 0, \quad \text{und} \quad \alpha'_v = \alpha_\alpha J_{\alpha v} = J_{\alpha v}, \quad \text{für } v > 0.$$

Es stellen danach also die „nullfreien“ Größen J , d. h. diejenigen, die keinen Index 0 haben, (bei festem Index α) selbst die R.-K. einer überall stetigen Funktion dar, woraus z. B. folgt

$$(35) \quad \sum_r (v) J_{r\alpha}^2 \text{ konvergent für } \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Gehen wir nun zur zweiten Robinschen Derivierten A'' unserer speziellen Funktion (I A) über, so sind deren R.-K.:

$$(34 A'') \quad \alpha''_0 = 0, \quad \text{bzw.} \quad \alpha''_v = \sum_x J_{\alpha x} J_{xv}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots),$$

wobei nach unseren obigen Ausführungen über die Konvergenz dieser Summen kein Zweifel bestehen kann.

Diese hier auftretenden Produktsummen nennen wir nun $J'_{\alpha v}$. — Sie bilden augenscheinlich, wenn man sie nicht für ein individuelles α , sondern für alle möglichen $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ bildet, die Elemente der Quadratmatrix $(J')^2$, wenn (J) die Matrix der nullfreien Koeffizienten J darstellt:

$$(36) \quad (J) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & \dots \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Dann ist also

$$(36') \quad (J') = (J)^2.$$

²⁰⁾ Der Buchstabe A soll (zur Vermeidung weiterer Indizes) die Auszeichnung der Zahl α andeuten.

Entsprechend sind die R.-K. der dritten Derivierten \mathbf{A}''' unserer speziellen Funktion \mathbf{A}_s

$$(34''') \quad \alpha_0''' = 0, \text{ bzw. } \alpha_r''' = \sum_1^{\infty} J_{\alpha\alpha} J_{\alpha r} \equiv J_{\alpha r}'' \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots)$$

und diese Größen J'' sind die Elemente der Matrix $(J)''$

$$(36'') \quad (J'') = (J)''$$

usw.

Für alle diese Größen J', J'', J''' usw. gilt zunächst entsprechend (35):

$$(35') \quad \Sigma (v) J_{\alpha\alpha}'' \text{ konv., } (35'') \quad \Sigma (v) J_{\alpha\alpha}''' \text{ konv. usw. für } \alpha = 1, 2, 3, \dots,$$

dann aber können wir jetzt auch die Tatsache (33₁) in die Form kleiden:

$$(37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (J)^n = (0), \text{ d. h. gleich der Nullmatrix,}$$

oder in Worten: Mit wachsendem Exponenten konvergieren sämtliche Glieder der Potenzmatrizen $(J)^n$ gegen 0 — dabei bedeutet (J) die Matrix der nullfreien Koeffizienten J .

Nunmehr lassen wir die Spezialisierung \mathbf{A} fallen, halten aber an der Einschränkung I fest, so daß nach wie vor $\int g_\sigma d\sigma = 0$ und daher $b_0 = 0$ ist.

Da wegen der Stetigkeit von g_s die Robin-Entwicklung von g_s

$$((25'')) \quad \pi_{\eta(\omega)s} \sum_1^{\infty} (\alpha) b_\alpha p_\alpha(\omega) \equiv \sum_1^{\infty} b_\alpha \mathbf{A}_s,$$

wenn überhaupt, so auch sicher gleichmäßig auf σ konvergiert, so können wir die zur Bildung der Robinschen Derivierten g_s', g_s'', \dots und ihrer R.-K. erforderlichen Integrationen gliedweise ausführen und erhalten so:

$$(32'_1) \quad b'_0 = 0, \text{ und } b'_r = \sum_1^{\infty} b_\alpha \alpha'_r = \sum_1^{\infty} b_\alpha J_{\alpha r}, \quad \text{für } r > 0$$

in vollster Übereinstimmung mit (32), und weiter für die R.-K. von g_s'', g_s''', \dots 21):

$$(32''_1) \quad b''_0 = 0, \text{ und } b''_r = \sum_1^{\infty} b_\alpha \alpha''_r = \sum_1^{\infty} b_\alpha J'_{\alpha r} \quad \text{für } r > 0,$$

$$(32'''_1) \quad b'''_0 = 0, \text{ und } b'''_r = \sum_1^{\infty} b_\alpha \alpha'''_r = \sum_1^{\infty} b_\alpha J''_{\alpha r} \quad \text{für } r > 0 \text{ usw.}$$

²¹⁾ Auch wenn die Entwicklung (25'') für g_s nicht konvergiert, kann an der Richtigkeit der Formeln (32'_1) (eben wegen (32)) kein Zweifel bestehen, aber diese letzte einfache Schlußweise liefert uns dann nicht die weiteren Formeln des Textes, sondern nur die folgenden:

$$(32^*_1) \quad b'_r = \sum_1^{\infty} b'_\alpha J_{\alpha r}, \quad b''_r = \sum_1^{\infty} b''_\alpha J'_{\alpha r} \quad \text{usw. } (r = 1, 2, 3, \dots),$$

Im Falle $b_0 = 0$ erhöhen sich also in den Ausdrücken für die R.-K. bei jeder weiteren Robinschen Derivation die oberen Indizes der Multiplikatoren der b um 1, d. h. diese Multiplikatoren sind der Matrix der nächsthöheren Potenz von (J) zu entnehmen.

Unter Berücksichtigung unserer obigen Feststellung (37) steht diese Regel in bestem Einklang mit dem Resultat (33₁), daß alle $\lim_{\mu \rightarrow \infty} b_n^{(\mu)} = 0$ sind (für $n = 0, 1, 2, \dots$).

Anwendung II.

Im Gegensatz zu der Annahme I setzen wir jetzt voraus, daß

II. von den R.-K. der Funktion g , der erste (b_0) nicht verschwindet;

wir setzen ihn gleich 1, so daß die Masse aller sukzessiven Robinschen Belegungen

$$m = b_0 = 1 \quad [\text{vgl. (25'')}]$$

ist. — Dann nähern sich die Robinschen Derivierten g', g'', \dots gleichmäßig der Funktion

$$\pi \cdot m \cdot \varrho_s = \pi \varrho_s \quad (\varrho_s \text{ Dichtigkeit der natürlichen Belegung})$$

weil eben die Entwicklung (31) für g'_s sicher konvergiert [vgl. Anm. 19]. — Gleichwohl bleiben die Formeln (32₁'), (32_{II}'''), ... des Textes richtig, doch bedarf es dann zu ihrer Herleitung, d. h. zum Beweise für die Vertauschbarkeit der Summationsfolgen eines Umweges. Ich sehe vorläufig nur den folgenden an die Formel I (23), S. 545 anknüpfenden Weg: Es sei f_s eine auf σ stetige Funktion, und

$$f_s = f(\omega) \sim a_0 + \sum_1^{\infty} a_v p_v(\omega)$$

— ich nenne dann die a_n ihre „Neumann-Koeffizienten“ [N.-K., sie unterscheiden sich nur durch den Faktor (v) von den F.-K.] — so kann man genau nach denselben Prinzipien, wie wir sie bei der Robinschen Methode anwandten, die erste Neumannsche Derivierte f'_s bilden [vgl. I (17 N), S. 543]. Für deren N.-K. gelten dann die Formeln

$$(32N) \quad a'_0 = a_0 + \sum_1^{\infty} a_x J_{0x} \quad \text{und} \quad a'_v = \sum_1^{\infty} a_x J_{vx} \quad \text{für } v > 0,$$

und hiermit liefert jene Formel I (23), S. 545 im Falle $\kappa, \lambda = 0, 1$ ($\int_0 g'_s d\sigma = \int_0 g_s d\sigma$) das Resultat:

$$(33) \quad \sum_1^{\infty} a_v \left(\sum_1^{\infty} b_x J_{vx} \right) = \sum_1^{\infty} b_x \left(\sum_1^{\infty} a_v J_{vx} \right)$$

und diese Vertauschungsformel gilt unter der einzigen Voraussetzung, daß die a_n und b_n die N.-K. bzw. R.-K. von je einer auf σ stetigen Funktion sind. Die Anwendung auf $a_v = J_{av}$ führt dann z. B. von der ersten Formel (32₁') zu (32₁'').

[vgl. z. B. Beitr., S. 187 oder auch (freilich beim Newtonschen Potential) Math. Annalen, Bd. 102, S. 470 (9)] und daher auch ihre R.-K., den R.-K. dieser Funktion $\pi \varrho_s$, die wir mit r_0, r_1, r_2, \dots bezeichnen wollen, so daß also

$$(38) \quad \pi \varrho_s = \pi \eta_{(s)s} \left(r_0 + \sum_1^{\infty} (v) r, p, (\omega) \right)^{23}$$

ist. — Wir dürfen dann also vermerken:

$$(33_{II}) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} b_n^{(\mu)} = r_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Die übrigen R.-K. der Ausgangsfunktion g_s außer b_0 können wir dabei von vornherein gleich 0 annehmen, da sie nach (33_I) zu diesem Grenzwert ja sowieso keinen Beitrag liefern; also ist jetzt

$$(II^*) \quad g_s = \pi \eta_{(s)s} \cdot 1.$$

Nun liefern für die R.-K. der einzelnen Robinschen Derivierten die Formeln (32) die Resultate:

$$\text{für } g': \quad b'_0 = b_0 = 1, \quad \text{und} \quad b'_v = 1 \cdot J_{0v} \quad \text{für } v > 0,$$

$$\text{für } g'': \quad b''_0 = b'_0 = 1, \quad b''_v = b'_0 J_{0v} + \sum_1^{\infty} b'_x J_{vx} = J_{0v} + \sum_1^{\infty} J_{0x} J_{xv},$$

und diese letztere Summe wollen wir (ähnlich wie bei den nullfreien Größen) gleich J'_{0v} setzen, so daß wir kürzer schreiben:

$$\text{für } g'': \quad b''_0 = 1, \quad \text{bzw.} \quad b''_v = J_{0v} + J'_{0v},$$

und daraus folgt weiter nach (32):

$$\text{für } g''': \quad b'''_0 = 1, \quad b'''_v = 1 \cdot J_{0v} + \sum_1^{\infty} (J_{0v} + J'_{0v}) J_{xv} = J_{0v} + J'_{0v} + J''_{0v},$$

$$\text{usw., also:} \quad b^{IV}_0 = 1, \quad \text{und} \quad b^{IV}_v = J_{0v} + J'_{0v} + J''_{0v} + J'''_{0v} \quad \text{für } v > 0,$$

allgemein:

$$(34_{II}) \quad b^{(u)}_0 = 1, \quad \text{bzw.} \quad b^{(u)}_v = J_{0v} + J'_{0v} + \dots + J^{(u-1)}_{0v} = \sum_0^{u-1} J^{(h)}_{0v},$$

²³ Da die Funktion ϱ_s ihre eigene Robinsche Derivierte ist [vgl. z. B. Beitr., S. 34], also die Derivierte einer stetigen Funktion, so konvergiert ihre Robinsche Entwicklung [vgl. oben Anm. 19]. — Daher sind wir berechtigt, eine Gleichung anstatt einer bloßen Äquivalenz zu schreiben.

und so liefert denn (33_{II}) das Resultat:

$$(39) \quad r_0 = 1, \quad \text{und} \quad r_\nu = \sum_0^\infty J_{0\nu}^{(\lambda)} \quad \text{für } \nu > 0,$$

und damit zugleich den Beweis für die Konvergenz dieser Reihen.

Es gilt nur noch das Bildungsgesetz der hier eingeführten Summen $J'_{0\nu}, J''_{0\nu}$, möglichst einfach darzustellen. Augenscheinlich können wir sie wieder deuten als Element von Produktmatrizen: Wir führen neben der Matrix (J) der nullfreien Größen J [vgl. (36), S. 683] noch die weitere Matrix

$$(40) \quad (J) = \begin{pmatrix} J_{01} & J_{02} & J_{03} & \dots \\ J_{11} & J_{12} & J_{13} & \dots \\ J_{21} & J_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

ein, also eine durch Hinzufügung einer ersten Zeile zur symmetrischen Matrix (J) *unsymmetrisch* gewordene Matrix. Dann sind augenscheinlich die Größen J'_{01}, J'_{02}, \dots die Elemente der ersten Zeile in der Produktmatrix (\dot{J}) (J), während die übrigen Zeilen dieser Matrix gerade die schon früher betrachteten nullfreien $J'_{\nu\mu}$ enthalten. So können wir also sagen: Alle Größen J' , mag einer der Indizes 0 sein oder nicht, sind die Elemente dieser Produktmatrix, oder in einer Formel:

$$(\dot{J}') \equiv \begin{pmatrix} J'_{01} & J'_{02} & J'_{03} & \dots \\ J'_{11} & J'_{12} & \dots & \dots \\ J'_{21} & J'_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (\dot{J})(J),$$

und jetzt sieht man leicht, daß entsprechend alle eingeführten Größen J'' die Elemente der Matrix (\dot{J}) (J)² bilden, usf., allgemein:

$$(41) \quad (\dot{J}^{(\mu)}) = (\dot{J})(J)^\mu.$$

Damit ist das Bildungsgesetz auch aller $J_{0\nu}^{(\mu)}$ in übersichtlicher Form angegeben, und die Formeln (39) liefern uns daher die Mittel, die R.-K. von $\pi \cdot \varrho$, und damit nach (38) auch die Dichtigkeit ϱ , der natürlichen Belegung von σ aus dem Koeffizientensystem der Größen J und damit also letzten Endes aus der Abbildungsfunktion $\varphi(w)$ des Innengebietes zu berechnen [vgl. oben S. 674].

§ 6.

**Die Berechnung der Dichtigkeit der Grundrestbelegung
vom Innengebiete her.**

Wir behalten im folgenden die Vorstellungen der beiden letzten Paragraphen bei und stellen uns die Aufgabe, die Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(s)s}$ der Grundrestbelegung von σ zu bestimmen, natürlich als Funktion des Parameters $\omega = \omega_s$ auf σ , wie ihn uns das zugrunde gelegte Greensche Koordinatensystem des Innengebietes liefert.

Unsere Aufgabe reduziert sich darauf, die R.-K. der Funktion $\mathfrak{E}_{(s)s}$, oder, was rechnerisch zweckmäßiger, von $\pi^2 \mathfrak{E}_{(s)s}$, zu ermitteln. Wir setzen daher:

$$(42) \quad \pi^2 \mathfrak{E}_{(s)s} \sim \pi \eta_{(s)s} \sum_1^{\infty} (x) b_x(s) p_x(\omega_s)^{23})$$

und sehen dann also die noch von dem Parameterpunkt s abhängigen Koeffizienten $b_x(s)$ als die eigentlichen Unbekannten an.

Zur Berechnung dieser Größen nehmen wir die eine der beiden am Schluß der vorhergehenden Arbeit angegebenen Integralgleichungen zweiter Art für $\mathfrak{E}_{(s)s}$ zum Ausgangspunkte, und zwar die mit dem iterierten Robinschen Kern:

$$(43) \quad \mathfrak{E}_{(s)s} - \mathfrak{E}_{(s)s}'' = -\frac{1}{\pi^2} \delta_{(s)s}'' \equiv -\frac{1}{\pi^2} \frac{\partial \gamma_{(s)s}''}{\partial v_s} \quad [\text{vgl. I (33), S. 552}],$$

und beginnen damit, die rechte Seite zu bestimmen, d. h. wieder eine Robin-Entwicklung für sie anzugeben:

Nun ist nach Definition [vgl. I (24), S. 545]

$$\gamma_{(s)s} = \frac{\partial T_{(s)}}{\partial v_s} = \left(\frac{\partial T_{(s)}}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial v_s} = 2\pi \eta_{(s)s} \left(\frac{\partial T_{(s)}}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} \quad [\text{vgl. (9), S. 671}],$$

wo, sobald $0 < \lambda < \lambda_1$ nach (19'), S. 675

$$2 \frac{\partial T_{(s)}}{\partial \lambda} = 2 + \sum_1^{\infty} (x) \left[\sum_0^{\infty} (J_{xx} e^{-(x)\lambda} + e_{xx} e^{(x)\lambda}) e^{-(x)\lambda_1} p_x(\omega_1) \right] p_x(\omega).$$

Da aber diese Funktion $\frac{\partial T_{(s)}}{\partial \lambda}$ [ebenso wie $T_{(s)}$ selber, vgl. Anm. 16] mit abnehmendem λ gleichmäßig für das Intervall $0 \leq \omega \leq 2\pi$ in ihre Werte für $\lambda = 0$ übergeht, so folgt (wegen ihrer bekannten Integraldarstellungen)

²³⁾ Da $\int \mathfrak{E}_{(s)s} d\sigma = 0$ ist [vgl. I (31), S. 550], so können wir die Robin-Entwicklung von \mathfrak{E} sofort ohne ein konstantes Glied $b_0(s)$ ansetzen [vgl. (25''), S. 680], wir befinden uns also immer im Falle I von § 5.

Gleiches auch für die F.-K. dieser Funktion, und das findet dann nach Hurwitz seinen Ausdruck in der Äquivalenz

$$(44) \quad \gamma_{(0)s} \sim \pi \eta_{(0)s} \left\{ 2 + \sum_1^{\infty} (x) \left[\sum_0^{\infty} (J_{rs} + e_{rs}) e^{-(r)\lambda_i} p_r(\omega_i) \right] p_s(\omega) \right\},$$

wo uns die Frage, ob diese Reihe konvergiert, gar nicht interessiert.

Von dieser Funktion $\gamma_{(0)s}$ brauchen wir nun nach (43) zunächst die zweite Robinsche Derivierte $\gamma'_{(0)s}$. Für sie folgt nach (32'), S. 684

$$\begin{aligned} \kappa\text{-ter R.-K. von } \gamma'_{(0)s}: & \sum_1^{\infty} \left[\sum_1^{\infty} (J_{rs} + e_{rs}) e^{-(r)\lambda_i} p_r(\omega_i) \right] J'_{as} \\ & + \text{von } \lambda_i, \omega_i \text{ unabhängigen Gliedern}^{24}), \end{aligned}$$

und hier dürfen wir nun noch die Summationsfolge vertauschen²⁵⁾ und daher kürzer schreiben:

$$(44'') \quad \sum_1^{\infty} (J'_{rs} + J''_{rs}) e^{-(r)\lambda_i} p_r(\omega_i) + \text{von } \lambda_i, \omega_i \text{ unabhängigen Gliedern.}$$

Nun fordert Formel (43) weiter, daß wir von der durch diese ihre R.-K. bestimmten Funktion $\gamma'_{(0)s}$ diese aufgefaßt in ihrer Abhängigkeit von dem Pol $i(\lambda_i, \omega_i)$, die normale Ableitung bilden:

$$(45) \quad \delta''_{(0)s} \equiv \frac{\partial \gamma'_{(0)s}}{\partial v_{is}} = \left(\frac{\partial \gamma'_{(0)s}}{\partial \lambda_i} \right)_{\lambda_i \rightarrow 0} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial v_{is}}.$$

Solange aber $\lambda_i > 0$ ist, sind augenscheinlich die R.-K. von $\frac{\partial \gamma'_{(0)s}}{\partial \lambda_i}$ einfach die durch gliedweise Differentiation zu gewinnenden Ableitungen der soeben bestimmten R.-K. von $\gamma'_{(0)s}$, also

$$\kappa\text{-ter R.-K. von } \frac{\partial \gamma'_{(0)s}}{\partial \lambda_i}: \quad - \sum_1^{\infty} (v) (J'_{rs} + J''_{rs}) e^{-(r)\lambda_i} p_r(\omega_i) \quad (\lambda_i > 0).$$

Da wir aber wissen, daß die nullfreien J' und J'' die R.-K. stetiger Funktionen sind [vgl. (34'') und (34''')], ja sogar von Robinschen Derivierten stetiger Funktionen, so konvergiert diese letztere Reihe sicher auch für $\lambda_i = 0$ ²⁶⁾ und stellt dem Abelschen Grenzwertsatz zufolge den Grenzwert dar, dem sich der κ -te R.-K. von $\frac{\partial \gamma'_{(0)s}}{\partial \lambda_i}$ gleichmäßig in ω (wegen der Stetigkeit) nähert, und dieser Grenzwert des R.-K. ist nach einem schon mehrfach angewandten

²⁴⁾ Diese von λ_i, ω_i unabhängigen Glieder interessieren uns nicht weiter.

²⁵⁾ Das folgt z. B. wieder aus der Formel (2) in Anm. 21, S. 685.

²⁶⁾ Vgl. die Anmerkungen 17 und 19.

Schluß identisch mit dem κ -ten R.-K. des Grenzwertes $\left(\frac{\partial \gamma''_{(s)}}{\partial \lambda_i}\right)_{\lambda_i \rightarrow 0}$. — So ergibt sich dann schließlich aus (45) unter Berücksichtigung von (9₁):

$$\kappa\text{-ter R.-K. von } \delta_{(s)}^{\text{IV}}: \quad -2\pi\eta_{(s)} \sum_1^{\infty} (\nu) (J'_{\nu s} + J''_{\nu s}) p_s(\omega_s).$$

Damit ist unsere erste Aufgabe gelöst: Die rechte Seite von (43) können wir als bestimmt ansehen.

Aus der letzten Formel folgern wir sogleich noch (als Vorbereitung für das weitere) mittels (32₁'':

$$\begin{aligned} \kappa\text{-ter R.-K. von } \delta_{(s)}^{\text{IV}}: & \quad -2\pi\eta_{(s)} \sum_1^{\infty} \left[\sum_1^{\infty} (\nu) (J'_{\nu s} + J''_{\nu s}) p_s(\omega_s) \right] J'_{\nu s} \\ & \quad = -2\pi\eta_{(s)} \sum_1^{\infty} (\nu) (J'''_{\nu s} + J^{\text{IV}}_{\nu s}) p_s(\omega_s), \end{aligned}$$

da ja wieder Vertauschung der Summationen gestattet ist — und analog weiter:

$$\kappa\text{-ter R.-K. von } \delta_{(s)}^{\text{VI}}: \quad -2\pi\eta_{(s)} \sum_1^{\infty} (\nu) (J'_{\nu s} + J^{\text{VI}}_{\nu s}) p_s(\omega_s) \text{ usw.}$$

Nunmehr wenden wir uns der eigentlich zu lösenden Integralgleichung (43) zu. Durch ihre fortgesetzte zweimalige Robinsche Derivation erhalten wir:

$$(43') \quad \pi^2 (\mathfrak{E}_{(s)}^{\text{IV}} - \mathfrak{E}_{(s)}^{\text{VI}}) = -\delta_{(s)}^{\text{IV}}, \quad \pi^2 (\mathfrak{E}_{(s)}^{\text{VI}} - \mathfrak{E}_{(s)}^{\text{VIII}}) = -\delta_{(s)}^{\text{VI}}, \text{ usw.}$$

und durch Addition der h ersten dieser Gleichungen (43) und (43'):

$$\pi^2 (\mathfrak{E}_{(s)} - \mathfrak{E}_{(s)}^{(2h)}) = -(\delta_{(s)}' + \delta_{(s)}^{\text{VI}} + \dots + \delta_{(s)}^{(2h)}),$$

oder, als Gleichung für die R.-K. geschrieben, nach (42) und den letzten Resultaten:

$$b_s(s) - b_s^{(2h)}(s) = 2\pi\eta_{(s)} \sum_1^{\infty} (\nu) (J'_{\nu s} + J''_{\nu s} + J'''_{\nu s} + J^{\text{IV}}_{\nu s} + \dots + J^{(2h)}_{\nu s}) p_s(\omega_s).$$

Sehen wir nun $b_s(s)$ als Funktion der Lage von s auf σ (des bisherigen Poles) an, so besagt diese Gleichung, daß

$$2(J'_{\nu s} + J''_{\nu s} + \dots + J^{(2h)}_{\nu s}) = \nu\text{-tem R.-K. von } b_s(s) - b_s^{(2h)}(s).$$

Da aber mit wachsendem h die sämtlichen $b_s^{(2h)}(s)$ nach (33₁) gegen 0 gehen, und sogar gleichmäßig für alle Lagen von s auf σ ²⁷⁾, so gehen auch wieder die sämtlichen R.-K. dieser Funktionen von $s(\omega_s)$ gegen 0, und es folgt:

$$\nu\text{-ter R.-K. von } b_s(s): \quad 2 \lim_{h \rightarrow \infty} (J'_{\nu s} + J''_{\nu s} + \dots + J^{(2h)}_{\nu s}).$$

²⁷⁾ Auch diese letztere Tatsache ergibt sich leicht aus der in Formel (9₃) auf S. 469 in Bd. 102 der Math. Annalen angegebenen Abschätzung.

Mit diesen Koeffizienten ergibt sich eine Robin-Entwicklung der Größen $b_x(s)$, also der R.-K. von $\pi^2 \mathfrak{E}_{(s)}$ [vgl. (42)] und damit für diese Funktion selbst — man könnte etwa sagen — eine „Doppel-Robin-Entwicklung“:

$$(46) \quad \pi^2 \mathfrak{E}_{(s)} \sim 2(\pi \eta_{(0)s}) (\pi \eta_{(0)s}) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\nu)(\kappa) \beta_{\nu\kappa} p_{\nu}(\omega_s) p_{\kappa}(\omega_s)^{29}),$$

wo die $\beta_{\nu\kappa}$ in den Bedeutungen stehen:

$$(46') \quad \beta_{\nu\kappa} = J'_{\nu\kappa} + J''_{\nu\kappa} + J'''_{\nu\kappa} + \dots, \quad (\nu, \kappa = 1, 2, 3 \dots)$$

und das können wir nach den Formeln (36) auch so ausdrücken: Die Koeffizienten $\beta_{\nu\kappa}$ sind die Werte, denen sich die Elemente der Matrix

$$(J)^2 + (J)^3 + (J)^4 + \dots + (J)^{2h}$$

mit wachsendem h nähern. Wir schreiben dafür kurz:

$$(46'') \quad (\beta) = (J)^2 + (J)^3 + (J)^4 + \dots \quad [\text{vgl. (37)}].$$

Damit ist das *Bildungsgesetz der Koeffizienten β in der Entwicklung (46) in einer äußerst einfachen Weise angegeben*. — Wir schreiben noch anstatt (46''): $(\beta + J) = (J) + (J)^2 + (J)^3 + \dots$ — Dann können wir das Resultat in dieser Form mit dem Schlußergebnis des letzten Paragraphen zusammenfassen und gelangen so zu dem

Hauptresultat.

In den Matrizen

$$(J^{\mu}) \{1 + (J) + (J)^2 + (J)^3 + \dots + (J)^{\mu}\} \quad [\text{vgl. (36) und (40)}]$$

nähern sich mit wachsendem μ die Elemente der ersten Zeile den Koeffizienten r_n der Entwicklung (38) für die Dichtigkeit ϱ der natürlichen Belegung

$$((38)) \quad \varrho_s = \eta_{(0)s} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu) r_{\nu} p_{\nu}(\omega_s) \right)$$

und die übrigen (nullfreien) Elemente den Gliedern der Matrix der Größen $J_{\nu\kappa} + \beta_{\nu\kappa}$, wenn die β die Koeffizienten der folgenden Doppelreihenentwicklung der Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(s)}$ der Grundrestbelegung darstellen:

$$((46)) \quad \mathfrak{E}_{(s)} = 2 \eta_{(0)s} \eta_{(0)s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\nu)(\kappa) \beta_{\nu\kappa} p_{\nu}(\omega_s) p_{\kappa}(\omega_s)^{29}).$$

²⁸⁾ Auf die Reihenfolge der Summationen kommt es hier nicht an — das folgt schon aus der Symmetrie der Funktion $\mathfrak{E}_{(s)}$ in den beiden Punkten, von deren Lage sie abhängt [vgl. I (32), S. 550].

²⁹⁾ Daß wir hier eine Gleichung statt einer bloßen Äquivalenz schreiben dürfen, beweist man leicht mittels der Integralgleichung (43) — es ist nämlich $\delta'_{(s)}$ selbst bereits die Robinische Derivierte einer auf σ stetigen Funktion $\delta'_{(s)}$.

Damit haben wir ein übersichtliches Verfahren kennengelernt, das uns mit einem Schlage die Dichtigkeiten der nach unseren allgemeinen Ausführungen [vgl. I, § 4] so überaus wichtigen beiden Belegungen der Kurve σ liefert — vorausgesetzt, daß die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Innengebietes und damit das ganze System der Größen J bekannt ist [vgl. oben S. 674].

§ 7.

Entsprechende Untersuchungen bei Bevorzugung des Außengebietes.

Wir wollen jetzt die Abbildung des Außengebietes \mathfrak{A} als bekannt ansehen und damit in \mathfrak{A} ein Greensches Koordinatensystem gegeben denken. Sein Pol werde wieder o genannt. Dieses System möge dann stets den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt werden.

Von den beiden Aufgaben, die Dichtigkeit der natürlichen und der Grundrest-Belegung zu ermitteln, kann man jetzt die erste von vornherein als gelöst betrachten: Wir konnten nach § 2 von einer beliebigen Abbildungsfunktion des Außengebietes oder von der Greenschen Funktion und Belegung für einen beliebigen äußeren Pol o übergehen zu dem Falle, daß der Pol gerade im Unendlichen liegt und damit zur natürlichen Belegung und ihrem Potential. — So erhielten wir schon früher:

$$\pi \varrho_s = \pi \eta_{(o)s} \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{e^{\gamma} + e^{-\gamma} - 2 \cos(\omega - 8)} \quad [\text{vgl. (10), S. 671}]$$

und hier brauchen wir nur noch den letzten Faktor nach Fourier zu entwickeln, um sofort auch die R.-K. der Funktion $\pi \varrho_s$ zu erhalten: Es ist unter Beibehaltung unserer früheren Bezeichnungen

$$(38_A) \quad \pi \varrho_s = \pi \eta_{(o)s} \left(r_0 + \sum_1^{\infty} (v) r_v p_v(\omega) \right),$$

und hier haben jetzt die R.-K. die Werte

$$(39_A) \quad r_0 = 1, \quad \text{und} \quad r_v = e^{-(v)\gamma} p_v(8), \quad \text{für } v > 0,$$

wobei nochmals darauf hingewiesen sei, daß jetzt das ω einen anderen Parameter auf σ darstellt, so daß diese R.-K. nicht etwa zu identifizieren sind mit den früheren r_v , für die wir in (39) das Bildungsgesetz angaben — denn auch der Parameter auf σ hängt ja noch immer von der Wahl des Greenschen Koordinatensystems, d. h. von der Wahl seines Poles ab [vgl. S. 669].

Was nun die Bestimmung der Grundrestbelegung anlangt, und (als Vorbereitung) zunächst überhaupt der Robinschen Derivierten einer beliebigen stetigen Funktion

$$(25_A) \quad g_s = \pi \eta_{(o)s} \left(b_0 + \sum_1^{\infty} (v) b_v p_v(\omega) \right), \quad \left(\pi \eta_{(o)s} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{N}_s} \right),$$

so wird jetzt naturgemäß die Entwicklung (23_A) der Grundlösung im Außengebiet den Ausgangspunkt bilden. Unter Benutzung jener Größen r [vgl. (39_A)] als Abkürzungen können wir sie, falls $\lambda_a < \gamma$, d. h. der Punkt a , wie später stets, nahe bei σ ($\lambda = 0$) liegt, folgendermaßen schreiben:

$$(23^*_A) \quad 2 T_{\sigma a} = \begin{cases} -2\lambda_a - \sum_x \left[\sum_0^\infty (A_{rx} - e_{rx}) e^{-(v)\lambda_a} p_r(\omega_a) \right] p_x(\omega) \\ - \sum_1^\infty r_v e^{(v)\lambda_a} p_v(\omega_a) - \sum_0^\infty r_x p_x(\omega). \end{cases}$$

Von dieser Entwicklung führen dann genau dieselben Überlegungen, wie wir sie früher an (23) knüpften, zu dem Resultat, daß die R.-K. der ersten Robinschen Derivierten g'_s von g_s die Werte haben:

$$(32_A) \quad b'_0 = b_0 \quad \text{und} \quad b'_v = b_0 r_v - \sum_0^\infty A_{vx} b_x \quad \text{für } v > 0.$$

Besonders wichtig ist wieder der Fall (entsprechend I, S. 682), daß in der Robinschen Entwicklung (25_A) von g_s der erste Koeffizient $b_0 = 0$ ist. Dann nehmen die letzten Formeln die einfachere Gestalt an:

$$(32'_{A1}) \quad b'_0 = 0, \quad \text{und} \quad b'_v = - \sum_1^\infty b_a A_{av}, \quad \text{für } v > 0,$$

und daher ergibt sich für die R.-K. der zweiten Derivierten g''_s :

$$(32''_{A1}) \quad \left\{ \begin{array}{l} b''_0 = 0, \quad \text{bzw.} \quad b''_v = - \sum_1^\infty \left(- \sum_1^\infty b_a A_{ax} \right) A_{xv} = + \sum_1^\infty b_a A'_{av} \\ \text{mit } A'_{av} = \sum_1^\infty A_{ax} A_{xv} \quad (= \text{Element aus } (A)^2) \end{array} \right.$$

und analog weiter für die R.-K. von g'''_s :

$$(32'''_{A1}) \quad b'''_0 = 0, \quad b'''_v = - \sum_1^\infty b_a A''_{av}, \quad \text{mit } A''_{av} = \sum_1^\infty A'_{ax} A_{xv} (= \text{Element aus } (A)^3)$$

usw., allgemein:

$$(32_{A1}) \quad b^{(u)}_0 = 0, \quad b^{(u)}_v = (-1)^u \sum_1^\infty b_a A^{(u-1)}_{av}, \quad \text{wo } A^{(u-1)}_{av} = \text{Element aus } (A)^u,$$

und dann folgt weiter in voller Analogie zu (37), S. 684:

$$(37_A) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} (A)^\mu = (0).$$

Immer bedeutet hier (A) die Matrix der nullfreien Größen A (entsprechend der früheren Matrix (J)).

Im Besitz dieser Regeln können wir jetzt, nach denselben Prinzipien wie früher vom Innengebiet her, wieder die Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(s)}$ der Grundrestbelegung berechnen: Ich führe nur als hauptsächlichstes Zwischenresultat an, daß sich jetzt als

$$\kappa\text{-ter R.-K. von } \delta_{(s)}'' = -\frac{\partial \gamma_{(s)}''}{\partial \mathbf{N}_{ss}}: 2\pi \eta_{(s)} \sum_1^{\infty} (\nu) (A'_{\nu s} + A''_{\nu s}) p_{\nu}(\omega_s)$$

ergibt. Daraus folgt dann schließlich das *Resultat*:

$$(46_A) \quad \mathfrak{E}_{(s)} = 2 \eta_{(s)} \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} (\nu) (\kappa) \beta_{\nu s} p_{\nu}(\omega_s) p_{\kappa}(\omega_s),$$

wo jetzt

$$(46'_A) \quad \beta_{\nu s} = A'_{\nu s} + A''_{\nu s} + A'''_{\nu s} + \dots,$$

und dafür können wir auch sagen: *In den Matrizen*

$$(A) + (A)^2 + (A)^3 + \dots + (A)^{\mu}$$

nähern sich mit wachsendem μ die Elemente den Gliedern der Matrix der Größen $\beta_{\nu s} + A_{\nu s}$, wenn die β die Koeffizienten der Doppelreihenentwicklung (46_A) der Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(s)}$ der Grundrestbelegung darstellen.

Damit ist der Weg angegeben, wie man auch von einer Abbildungsfunktion des Außengebietes zur Grundrestlegung gelangen kann, denn das System der Größen $A_{\nu s}$ hängt ja aufs engste mit dieser Abbildungsfunktion zusammen [vgl. oben S. 678].

§ 8.

Ein anderer Weg zur natürlichen und zur Grundrest-Belegung.

Um zu den von uns immer mit r_n bezeichneten R.-K. der Dichtigkeit ϱ , der natürlichen Belegung zu gelangen, kann man auch von der Bemerkung ausgehen, daß ϱ die Lösung der homogenen Integralgleichung mit dem Robinschen Kern ist,

$$\varrho_s = \frac{1}{\pi} \int \varrho_{\sigma} [d\sigma]_s, \quad [\text{vgl. Beitr., S. 34 (10)}],$$

diese Funktion reproduziert sich also bei einer Robinschen Derivation selbst, und gleiches gilt daher auch von ihren R.-K., es ist allgemein $r'_n = r_n$.

Falls wir, wie wir es zunächst tun wollen, Greensche Koordinaten des Innengebietes \mathfrak{J} benutzen, liefert uns also (32) für die r_n die Gleichungen:

$$r_0 = 1 (= m), \quad \text{und} \quad r_{\nu} = \sum_0^{\infty} J_{\nu, \kappa} r_{\kappa}^{(0)}, \quad \text{für } \nu > 0,$$

²⁹⁾ Auch die Bemerkung, daß das Potential der natürlichen Belegung in \mathfrak{J} konstant ist ($V_i = \text{const}$), hätte man zum Ausgangspunkt wählen können: Danach müssen sämtliche F.-K. von V_i außer dem ersten (v_0) verschwinden, was nach (28) auf diese selben Gleichungen führt.

oder wir erhalten das Resultat: Die Größen r_1, r_2, r_3, \dots sind die Lösungen der unendlich vielen linearen inhomogenen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten:

$$(47) \quad \sum_1^{\infty} (J_{v,x} - e_{v,x}) r_x = -J_{0,v}, \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

Ferner kann man zur Bestimmung der Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(s)}$ der Grundrestbelegung durch ihre Entwicklungskoeffizienten $\beta_{v,x}$ an die in I (30) oder auch (30*), S. 549 angegebene Integralgleichung erster Art anknüpfen: Es ist nach (9₂), S. 671:

$$\begin{aligned} \pi \eta_{(j)s} &= \pi \eta_{(s)s} \frac{e^{i_j} - e^{-i_j}}{e^{i_j} + e^{-i_j} - 2 \cos(\omega_s - \omega_j)} \\ &= \pi \eta_{(s)s} \left(1 + \sum_1^{\infty} (v) e^{-(v) i_j} p_r(\omega_j) p_r(\omega_s) \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{gleichmäßig konverg.} \\ \text{für } 0 \leq \omega \leq 2\pi \end{array} \right), \end{aligned}$$

und es nimmt daher die erste jener Gleichungen I (30*), S. 550:

$$\eta_{(j)s} = \varrho_s + \int \mathfrak{E}_{(s)} \sigma T_{sj} d\sigma$$

in den oben angewandten Bezeichnungen die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \pi \eta_{(s)s} &\left\{ \left(1 + \sum_1^{\infty} (v) (J_{0,v} + J'_{0,v}) p_r(\omega_s) \right) + \sum_1^{\infty} \left(\sum_1^{\infty} (v) J'_{v,n} p_r(\omega_s) \right) e^{-(n) i_j} p_n(\omega_j) \right\} \\ &= \pi \eta_{(s)s} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} (v) r_v p_r(\omega_s) \right\} - \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} b_x(s) J_{0,x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \left(\sum_1^{\infty} b_x(s) (J_{n,x} - e_{n,x}) \right) e^{-(n) i_j} p_n(\omega_j)^{31}). \end{aligned}$$

Vergleichung entsprechender Koeffizienten der Größen $e^{-(n) i_j} p_n(\omega_j)$ liefert dann im Falle $n = 0$:

$$(48_0) \quad \pi \eta_{(s)s} \sum_1^{\infty} (v) (J_{0,v} + J'_{0,v}) p_r(\omega_s) = \pi \eta_{(s)s} \sum_1^{\infty} (v) r_v p_r(\omega_s) - \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} b_x(s) J_{0,x},$$

eine Gleichung, die eine Beziehung zwischen den R.-K. von ϱ und \mathfrak{E} (den r_v und $b_x(s)$) darstellt, und im Falle $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$(48_n) \quad \pi \eta_{(s)s} \sum_1^{\infty} (v) J'_{v,n} p_r(\omega_s) = -\frac{1}{2} \sum_1^{\infty} b_x(s) (J_{n,x} - e_{n,x}),$$

³¹⁾ Benutzt sind hier: links im ersten Gliede das Resultat über g'' S. 686 ($g \sim \pi \cdot \eta_{(s)s} \cdot 1$), links im zweiten Gliede die Überlegungen von S. 684, vor allem (32'') ($b_n \sim e^{-(n) i_j} p_n(\omega_j)$), rechts außer (38) noch die Darstellungen (28) für die F.-K. des Potentials V_i (24) mit $b_0 = 0$.

Gleichungen, die allein die R.-K. von \mathfrak{E} enthalten. — Machen wir für diese jetzt den Ansatz

$$b_x(s) \sim \pi \eta_{(s)} \sum_1^{\infty} \sum_{\nu}' (\nu) (2 \beta_{x\nu}) p_{\nu}(\omega_s),$$

so folgt durch abermalige Koeffizientenvergleichung aus (48₀) und (48_n)

$$(49_0) \quad r_{\nu} - \sum_1^{\infty} \beta_{\nu x} J_{0x} = J_{0\nu} + J'_{0\nu}, \quad (\nu = 1, 2, 3 \dots)$$

und

$$(49_n) \quad \sum_1^{\infty} \beta_{\nu x} (J_{xn} - e_{xn}) = -J'_{\nu n} \quad (n, \nu = 1, 2, 3, \dots).$$

In diesen letzten Gleichungen haben wir auch für die Koeffizienten $\beta_{\nu x}$ der Doppelreihenentwicklung (38) für die Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(s)}$ der Grundrestbelegung Systeme (nämlich für jedes feste ν eines) von unendlich vielen linearen inhomogenen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.

Dieses Resultat läßt nun noch eine besonders einfache Formulierung zu, wenn man sich der Symbolik des Matrizenkalküls bedient: Eine einfache Umrechnung der Formeln (49_n) liefert:

$$(49_n^*) \quad - \sum_1^{\infty} (J_{nx} - e_{nx}) (\beta_{\nu x} + J_{\nu x} + e_{\nu x}) = e_{\nu n}$$

oder eben in jener Symbolik:

$$(50) \quad -(J - e)(\beta + J + e) = E \quad (E \equiv (e) = \text{Einheitsmatrix})$$

und damit das Resultat: Die Matrix $-(\beta + J + e) = -(\beta) - (J) - E$ ist die Reziproke der Matrix $(J - e) = (J) - E$.

Die Ermittlung der Koeffizienten $\beta_{\nu x}$ oder ihrer Matrix (β) ist damit zurückgeführt auf die Bestimmung der Reziproken zu einer bekannten Matrix.

Sind die $\beta_{\nu x}$ bestimmt, so liefern die Gleichungen (49₀) oder, wie wir dafür auch schreiben können:

$$(49_0^*) \quad r_{\nu} = \sum_1^{\infty} J_{0x} (\beta_{\nu x} + J_{\nu x} + e_{\nu x}) \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

auch die R.-K. von ϱ — falls man sie nicht durch Auflösung der Gleichungen (47) bestimmen will. — Daß beides zum gleichen Ziele führt, erkennt man auch leicht: Die Matrix $(J - e)$ ist die Koeffizientenmatrix jener Gleichungen (47). Wenn man deren Reziproke kennt, und das ist eben nach (50) die Matrix $-(\beta + J + e)$, so liefern bekannte Regeln für die Lösungen von (47) gerade die Darstellung (49₀^{*}) — w. z. b. w.

Legen wir ein Greensches Koordinatensystem für das Außengebiet \mathfrak{A} zugrunde, so erübrigt sich nach den Ausführungen zu Anfang von § 7 die Bestimmung der Größe r_n , der R.-K. der Funktion $\pi \varrho$, — wir können sie explizit angeben:

$$(39_A) \quad r_0 = 1, \quad \text{und} \quad r_v = e^{-(v)} p_v(8) \quad \text{für } v > 0.$$

Die Bemerkung, daß sich ϱ und damit auch alle Größen r_n bei einer Robinschen Derivation reproduzieren ($r'_n = r_n$ oder nach (32_A): $\sum_0^\infty A_{v,x} r_x = 0$ für $v > 0$) liefert nur die folgenden *interessanten Beziehungen zwischen den Koeffizienten $A_{v,x}$ und den Greenschen Koordinaten γ und δ der Stelle $z = \infty$:*

$$(47_A) \quad \sum_1^\infty A_{v,x} r_x \equiv \sum_1^\infty A_{v,x} e^{-(x)\gamma} p_x(8) = -A_{0,v}{}^{23}, \quad (v = 1, 2, 3, \dots).$$

Zu bestimmen bleiben jetzt nur noch die Koeffizienten $\beta_{v,x}$ der Entwicklung von $\mathfrak{E}_{(s)}$. — Dazu stellen wir ganz entsprechende Überlegungen an wie oben vom Innengebiet ausgehend. Sie führen unter Berücksichtigung der Relationen (47_A) zu den Gleichungen

$$(49_{A_0}) \quad \sum_1^\infty \beta_{v,x} (r_x + A_{0,x}) = -A'_{0,v}, \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

und

$$(49_{A_n}) \quad \sum_1^\infty \beta_{v,x} (A_{n,x} - e_{n,x}) = -A'_{n,v} \quad (n, v = 1, 2, 3, \dots).$$

Diese letzteren Gleichungen sind dann die *Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten $\beta_{v,x}$* . — Wir können sie auf die Form bringen:

$$(49_{A_n}^*) \quad - \sum_1^\infty (A_{n,x} - e_{n,x}) (\beta_{x,v} + A_{x,v} + e_{x,v}) = e_{n,v},$$

²³) Ihren tieferen Grund haben diese Relationen in dem Umstande, daß die Funktion $\log \frac{\varphi(w_1)(w_2 - c) - \varphi(w_2)(w_1 - c)}{w_1 - w_2}$, durch deren Entwicklung wir zu dem Koeffizientensystem der A kamen [vgl. (14_A) S. 678], die Eigenschaft hat, für den speziellen Wert $w_2 = c$ des einen Argumentes auch von dem anderen (w_1) unabhängig zu werden. Daher müssen für $w_2 = c$ die Koeffizienten aller Potenzen w_1^v für $v = 1, 2, 3, \dots$ verschwinden. So folgen die Gleichungen:

$$\sum_0^\infty (C'_{v,x} + i D'_{v,x}) c^x = 0, \quad \text{für } v = 1, 2, 3, \dots,$$

aus denen sich die Relationen (47_A) leicht ableiten lassen.

oder in der Symbolik des Matrizenkalküls:

$$(50_A) \quad -(A - e)(\beta + A + e) = E,$$

sie liefern also ein dem früheren völlig analoges Resultat: Die Matrix $-(\beta + A + e) = -(\beta) - (A) - E$ ist die Reziproke der Matrix $(A - e) = (A) - E$. —

Nicht benutzt sind bisher die Gleichungen (49_A), welche wieder Beziehungen zwischen den r_n und den $\beta_{v,n}$ darstellen. Aus ihnen könnte man nach Ermittlung der $\beta_{v,n}$ nun wieder die r_n bestimmen. — Daß man so wieder zu denselben Werten (39_A) für die r_n gelangen würde, kurz daß (39_A) und (49_A) in Einklang miteinander stehen, läßt sich leicht folgendermaßen einsehen: Wir nehmen (50_A), oder, was dasselbe, (49_{A_n}) als erfüllt an. Daneben gelten noch die Relationen (47_A), die wir auch so schreiben können:

$$\sum_1^{\infty} (A_{v,n} - e_{v,n}) r_n = -(r_v + A_{0,v}) \quad (v = 1, 2, 3, \dots).$$

In dieser Gestalt sehen wir sie an als lineare Gleichungen für die auf der linken Seite stehenden r_n ; dann folgt aus der Reziprokeigenschaft [vgl. (50_A)] der Matrix $-(\beta + A + e)$ in bekannter Weise:

$$r_v = + \sum_1^{\infty} (r_n + A_{0,n}) (\beta_{v,n} + A_{n,v} + e_{n,v}),$$

also wegen (47_A)

$$r_v = \sum_1^{\infty} \beta_{v,n} (r_n + A_{0,n}) - A_{0,v} + A'_{0,v} + (r_v + A_{0,v}),$$

und das sind gerade die Gleichungen (49_{A_v}), die sich also als Folge der Gleichungen (49_{A_n}) herausgestellt haben.

So haben wir in diesem § 8 die R.-K. der Dichtigkeiten sowohl der natürlichen wie der Grundrestbelegung durch Auflösung unendlich vieler Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten zu bestimmen gelehrt (soweit wir sie nicht, wie die r_n im Falle des Außengebietes, direkt angeben können). —

Bemerkt sei noch, daß die in den § 5 bis 7 gegebenen expliziten Darstellungen dieser R.-K. nichts anderes sind als die Lösungen dieser Gleichungen speziell in der von Hilb, freilich nur für den Fall beschränkter Matrizen²³⁾, angegebenen Form.

²³⁾ Diese Beschränktheit der Matrizen (J) und (A) habe ich bisher nicht bewiesen, wenn ich sie auch für äußerst wahrscheinlich halte. Dieser Nachweis der Beschränktheit würde vielleicht manche Vereinfachungen in unseren Ausführungen gestatten.

§ 9.

Zusammenfassung.

Wir haben in den vorhergehenden §§ 5–8 Verfahren kennengelernt, die Dichtigkeit ϱ , der natürlichen Belegung und ebenso die Dichtigkeit $\mathfrak{E}_{(\sigma)}$, der Grundrestbelegung unserer Kurve σ zu bestimmen — vorausgesetzt, daß wir nur die Abbildungsfunktion für eines der beiden durch σ getrennten Gebiete \mathfrak{I} und \mathfrak{A} kennen — gleichgültig für welches. — Sind aber ϱ , und $\mathfrak{E}_{(\sigma)}$, bekannt, so kann man nach den allgemeinen Prinzipien der vorangegangenen Arbeit (I) und von § 1 der gegenwärtigen auch die Abbildung des anderen Gebietes auf den Einheitskreis angeben:

Wir wollen das Gebiet der z -Ebene, dessen Abbildungsfunktion wir als bekannt ansehen, \mathfrak{I} nennen, das andere \mathfrak{A} (Komplementärgebiet). Dann ist nach I (30), S. 549 die Dichtigkeit der Greenschen Belegung von σ für einen beliebigen Pol k aus \mathfrak{A} :

$$\eta_{(k)\sigma} = \varrho_{\sigma} - \frac{1}{\pi} (\varepsilon_k \gamma'_{(k)\sigma} + \gamma'_{(k)\sigma}) + \int_{\sigma} \mathfrak{E}_{(\sigma)\sigma} T_{k\sigma} d\sigma, \text{ wenn } \begin{cases} \varepsilon_{\sigma} = +1, \\ \varepsilon_{\sigma} = -1, \end{cases}$$

wo die Funktionen γ und γ' sich nach I, S. 545 jederzeit leicht angeben lassen — und weiter folgt dann für die Greensche Funktion des Gebietes \mathfrak{A} :

$$\lambda = \mathfrak{G}_{(k)\sigma} = \log \frac{1}{E_{k\sigma}} - \int_{\sigma} \eta_{(k)\sigma} \log \frac{1}{E_{\sigma\sigma}} d\sigma - (\Pi_k - \Gamma),$$

$$\text{wo } \Pi_{\sigma} = \int_{\sigma} \varrho_{\sigma} T_{\sigma\sigma} d\sigma \quad \text{und} \quad \Gamma = \Pi_{\mathfrak{I}} = \Pi_{\mathfrak{A}}$$

[vgl. I (8), S. 539 und (13), S. 541]. — Ergänzen wir dies zu einer Funktion des komplexen Argumentes $z = x + iy$, so ergibt sich (in unserer früheren Bezeichnung)

$$\lambda - i\omega = -\log(z - k) + \int_{\sigma} \eta_{(k)\zeta} \cdot \log(z - \zeta) \cdot |d\zeta| - (\Pi_k - \Gamma) - i\alpha,$$

wo α beliebig reell angenommen werden kann, und daher schließlich

$$w = e^{-\lambda + i\omega} = e^{i\alpha} \cdot e^{\Pi_k - \Gamma} \cdot (z - k) \cdot e^{-\int_{\sigma} \eta_{(k)\zeta} \log(z - \zeta) |d\zeta|}$$

als diejenige Funktion, welche das Gebiet \mathfrak{A} der z -Ebene auf den Einheitskreis der w -Ebene konform so abbildet, daß der Stelle $z = k$ der Mittelpunkt $w = 0$ entspricht. — Damit ist unsere Aufgabe gelöst, aus der Abbildungsfunktion für eines der beiden Gebiete \mathfrak{I} und \mathfrak{A} eine solche für das andere hergeleitet.

In dem Falle, daß man gerade die Abbildungsfunktion des Innengebietes \mathfrak{I} kennt, läßt sich der Übergang zum Außengebiet \mathfrak{A} allerdings noch weit einfacher erreichen, nämlich ganz ohne Zuhilfenahme der Grund-

restbelegung: Hat man nämlich nach dem Verfahren von S. 687 oder S. 691 nur die Dichtigkeit ϱ , der natürlichen Belegung ermittelt, so stellt ja schon deren Potential

$$H_z = \int \varrho_\sigma T_{z,\sigma} d\sigma$$

den Hauptbestandteil einer Greenschen Funktion des Gebietes \mathfrak{A} dar (für die spezielle Lage des Poles bei $z = \infty$), denn nach I (16), S. 542 ist ja $\mathfrak{G}_{(\infty),z} = \Gamma - H_z$, und das führt dann zu

$$w = e^{d\alpha} \cdot e^{-\Gamma} \cdot e^{-\int \varrho \zeta \log(z - \zeta) |d\zeta|}$$

als der Funktion, die das Gebiet \mathfrak{A} auf den Einheitskreis der w -Ebene so abbildet, daß gerade $z = \infty$ und $w = 0$ einander entsprechen.

Wir sagten dafür früher, sie vermitteln die „natürliche Abbildung“ des Gebietes \mathfrak{A} — daß wir und in welcher Weise wir von ihr nachträglich zu jeder anderen Abbildung von \mathfrak{A} auf den Einheitskreis der w -Ebene übergehen können (bei der ein anderer Punkt nach $w = 0$ geworfen wird), ist oben in § 2 eingehend auseinandergesetzt.

(Eingegangen am 12. 9. 1938.)

Über die Erweiterung des Definitionsbereiches differenzierbarer Funktionen.

Von

Karl Seebach in München*).

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	701
§ 1. Die Funktion $f(x)$ wird ein Stück weit linear in die Lückenintervalle, für die sie zunächst nicht definiert ist, fortgesetzt	702
§ 2. Die „Fortsetzbarkeit“ von $f(x)$ hängt von der Möglichkeit ab, den Lückenintervallen gewisse Zahlen λ zuzuordnen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen müssen	709
§ 3. Fälle, in denen eine Fortsetzung möglich ist	713
§ 4. Die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Erweiterung des Definitions- bereiches ist unabhängig von den Werten der Ableitung in den iso- lierten Punkten des Definitionsbereiches	715

Einleitung.

1. Das Problem der Erweiterung des Definitionsbereiches stetiger Funktionen ist bereits in mehreren Arbeiten untersucht worden¹⁾. Es handelt sich dabei um folgendes: Im n -dimensionalen Raum \mathfrak{R}_n sei eine abgeschlossene Punktmenge gegeben und eine reelle Funktion, die auf dieser Menge erklärt und stetig ist. Es läßt sich zeigen, daß man immer eine im ganzen \mathfrak{R}_n definierte und stetige Funktion angeben kann, die auf der gegebenen Menge mit der gegebenen Funktion übereinstimmt.

In der folgenden Arbeit soll nun das analoge Problem für differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen behandelt werden²⁾. Wir gehen aus

*) Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München als Dissertation angenommen (D 19).

¹⁾ H. Tietze, Journ. f. Math. 145 (1915), S. 9; C. Carathéodory (nach H. Bohr), Vorl. üb. reelle Funkt. (1918), S. 617; L. E. J. Brouwer, Math. Annalen 79 (1918), S. 209; F. Hausdorff, Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 296; Rado, Sitzber. math. nat. Abt. Bayer. Akad. Wiss. (1931), S. 81–84.

²⁾ Wie ich von Herrn Prof. Tietze erfahre, von dem ich die Anregung zur vorliegenden Arbeit erhielt, hat er in einem Vortrag im Münchener Mathematischen Kolloquium am 7. 7. 1925 „Über Erweiterung des Definitionsbereiches differenzierbarer Funktionen“ auf dieses Problem der Erweiterung (ein oder mehrmals) differenzierbarer Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen hingewiesen; vgl. Jahresber. D. M. V. 36 (1927), Abt. 2, S. 95.

von einer linearen abgeschlossenen Menge \mathfrak{M} , auf der eine reelle Funktion $f(x)$ gegeben und differenzierbar sei; d. h. in jedem Häufungspunkt x_0 von \mathfrak{M} möge die Limesrelation bestehen

$$(E) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0); \quad x \in \mathfrak{M}.$$

Gefragt wird nach der Existenz einer Funktion $F(x)$, die für den ganzen \mathfrak{R}_1 erklärt, differenzierbar und auf \mathfrak{M} mit $f(x)$ identisch ist.

Diese Frage bleibt in jener allgemeinen Fassung nach wie vor noch ungelöst. Allerdings werden wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit einer solchen Erweiterung des Definitionsbereiches aufstellen. Es wird sich zeigen, daß es dabei einerseits auf die Verteilung der Stetigkeits- bzw. Unstetigkeitspunkte von $f'(x)$, andererseits auf gewisse, damit zusammenhängende Struktureigenschaften der gegebenen Menge ankommt. In manchen Fällen werden wir sehen, daß die genannte Bedingung erfüllt werden kann. Letzteres tritt z. B. immer dann ein, wenn die Ableitung $f'(x)$ auf \mathfrak{M} stetig ist³⁾ oder wenn ihre Unstetigkeitspunkte eine höchstens abzählbare Menge bilden (vgl. § 3). Man hat sogar noch die Möglichkeit, in den isolierten Punkten von \mathfrak{M} , für die ja eine Ableitung zunächst gar nicht definiert ist, den Wert von $f'(x)$ willkürlich vorzuschreiben, ohne daß dies für die Fortsetzbarkeit oder Nichtfortsetzbarkeit von Einfluß wäre (vgl. § 4). Hingegen ist es noch ungeklärt, ob die oben erwähnte Bedingung sich vielleicht immer erfüllen läßt oder nicht.

§ 1.

Die Funktion $f(x)$ wird ein Stück weit linear in die Lückenintervalle, für die sie zunächst nicht definiert ist, fortgesetzt.

2. Für die folgende Untersuchung sei also gegeben eine beliebige lineare, abgeschlossene Menge \mathfrak{M} ; diese möge Definitionsbereich sein für eine reelle Funktion $f(x)$, die im Sinne von (E) auf \mathfrak{M} differenzierbar ist. Wir werden in Zukunft anstatt (E) immer die gleichwertige, aber etwas bequemere Form schreiben:

$$(1; 1) \quad \begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon(x; x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x; x_0) &= 0; \quad x \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

³⁾ In bestimmten Fällen, in denen außer der Stetigkeit von $f'(x)$ auf \mathfrak{M} noch gewisse weitere Voraussetzungen gelten, ist die Erweiterung des Definitionsbereiches von $f(x)$ bereits von H. Whitney, *Transact. of the Am. Math. Soc.* **36** (1934), S. 63 und 369 nachgewiesen worden. Es wird nämlich dabei eine gewisse Gleichmäßigkeitsbedingung als erfüllt angenommen, die dafür sorgt, daß die Ableitung auch nach der Fortsetzung noch stetig ist. H. Whitney behandelt dann a. a. O. auch entsprechende Probleme für Funktionen von mehreren Veränderlichen [vgl. auch H. Whitney, *Transact. of the Am. Math. Soc.* **40** (1936), S. 309].

Zur Vereinfachung wollen wir \mathfrak{M} als beschränkt voraussetzen. Das bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit; denn sonst zerlegen wir die Menge \mathfrak{M} in abzählbar viele abgeschlossene Komponenten mit jeweils gemeinsamen Anfangs- und Endpunkten, und zwar so, daß sich diese Teilmengen im Endlichen nirgends häufen. Gelingt es dann, für jede solche beschränkte Teilmenge eine Funktion $F(x)$ zu konstruieren, die das Verlangte leistet, so erhält man daraus auch ohne weiteres eine Lösung für die Gesamtmenge \mathfrak{M} ; denn die Differenzierbarkeit, die ja nach Annahme für jedes Teilintervall gesichert ist, kann im Gesamtbereich nicht verlorengehen, da sich ja die Teilintervalle nirgends häufen und die Werte von $f'(x)$ in den Anschlußstellen übereinstimmen sollten.

3. Sei nun \mathfrak{I} das kleinste abgeschlossene Intervall, das \mathfrak{M} enthält; die Komplementärmenge $\mathfrak{I} - \mathfrak{M}$ ist dann, falls wir vom trivialen Falle $\mathfrak{I} = \mathfrak{M}$ absehen, offen und läßt sich darstellen als Vereinigungsmenge von höchstens abzählbar vielen offenen, getrennten Intervallen i , — wir werden sie im folgenden häufig *Lückenintervalle*, nennen:

$$(1; 2) \quad \mathfrak{I} - \mathfrak{M} = \sum_i i.$$

Die Funktion $f'(x)$ ist nach (1; 1) zunächst nur in den Häufungspunkten von \mathfrak{M} , deren Gesamtheit wir üblicherweise mit \mathfrak{M}' bezeichnen, gegeben. Der Gleichmäßigkeit halber wollen wir den Definitionsbereich von $f'(x)$ auf die ganze Menge \mathfrak{M} ausdehnen, indem wir die Funktionswerte in den isolierten Punkten ganz willkürlich ergänzen. Die Funktion $f'(x)$ ist also von jetzt ab, genau wie $f(x)$, auf \mathfrak{M} definiert.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir unsere Fragestellung etwas genauer so formulieren: Gibt es eine Funktion $g(x)$ auf der Menge $\mathfrak{I} - \mathfrak{M}$ von der Eigenschaft, daß die durch (1; 3a) und (1; 3b) definierte Funktion $F(x)$

$$(1; 3) \quad \begin{array}{ll} \text{a) } F(x) = f(x); & x \in \mathfrak{M}, \\ \text{b) } F(x) = g(x); & x \in \mathfrak{I} - \mathfrak{M}, \\ \text{c) } F'(x) = f'(x); & x \in \mathfrak{M} \end{array}$$

der Forderung (1; 3c) genügt und auf \mathfrak{I} differenzierbar ist ⁴⁾? $F(x)$ werden wir häufig kurz als „Fortsetzung“ von $f(x)$ bezeichnen; entsprechend werden wir von „Fortsetzbarkeit“ oder „Nichtfortsetzbarkeit“ sprechen, je nachdem sich (1; 3) erfüllen läßt oder nicht.

4. Die oben eingeführte Funktion $g(x)$ muß jedenfalls in jedem Lückenintervall i , differenzierbar sein und stetig mit der vorgeschriebenen Steigung an die Randwerte in den Eckpunkten des Intervalls anschließen. Gleich-

⁴⁾ Diese Forderung (1; 3c) folgt nicht schon aus a), da ja die Werte von $f'(x)$ auf $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$ willkürlich festgesetzt wurden.

zeitig muß man aber, und darin liegt die einzige Schwierigkeit, auf die Häufungspunkte solcher Intervalle Rücksicht nehmen, damit in diesen die Differenzierbarkeit gewahrt bleibt. In dieser letzteren Hinsicht gilt: Füllen wir die einzelnen Zwischenintervalle linear aus, so strebt, wie wir jetzt zeigen werden, der Wert des Differenzenquotienten, wenigstens von der Häufungsseite her, gegen den im Häufungspunkt vorgeschriebenen Differentialquotienten. Allerdings hat man damit im allgemeinen noch keine Lösung des Problems; denn die Funktion $F(x)$ würde bei dieser Konstruktion in den Intervallendpunkten noch Ecken aufweisen, wenn nicht die Steigung des Intervalls gerade zufällig mit der vorgeschriebenen Tangentenrichtung in seinen Endpunkten übereinstimmen sollte. Diese letztere Schwierigkeit wird uns aber erst später (Nr. 5) beschäftigen.

Sei also x_0 irgendein Häufungspunkt von Intervallen i . Die Endpunkte der Lückenintervalle bezeichnen wir im folgenden immer mit \underline{x} , \bar{x} ($\underline{x} < \bar{x}$), wobei wir den Index ν als unwesentlich weglassen. Die oben erwähnte, für jedes i , zu erklärende, lineare Funktion $l(x)$ läßt sich dann, falls wir die Randwerte $f(\underline{x})$, $f(\bar{x})$ der Kürze halber mit l_- und l_+ bezeichnen, so darstellen:

$$(1; 4) \quad l(x) = \frac{\bar{x} - x}{\bar{x} - \underline{x}} \cdot l_- + \frac{x - \underline{x}}{\bar{x} - \underline{x}} \cdot l_+,$$

woraus, wenn

$$\alpha = \frac{(x - x_0)(\bar{x} - x)}{(x - x_0)(\bar{x} - \underline{x})}, \quad \beta = \frac{(\bar{x} - x_0)(x - \underline{x})}{(x - x_0)(\bar{x} - \underline{x})}$$

gesetzt wird,

$$(1; 5) \quad \frac{l(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \cdot \frac{l_- - f(x_0)}{\underline{x} - x_0} + \beta \cdot \frac{l_+ - f(x_0)}{\bar{x} - x_0}$$

folgt. Nun ist wegen $\underline{x} < x < \bar{x}$:

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0; \quad \alpha + \beta = 1,$$

also liegt $\frac{l(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ zwischen $\frac{l_- - f(x_0)}{\underline{x} - x_0}$ und $\frac{l_+ - f(x_0)}{\bar{x} - x_0}$ (bzw. ist bei Gleichheit der letzteren Ausdrücke diesen gleich).

Aus (1; 5) und (E) folgt also:

$$(1; 6) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I - x_0}} \frac{l(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

womit unsere obige Behauptung bewiesen ist.

5. Diese lineare Ausfüllung der Lückenintervalle stellt, wie wir schon in der vorigen Nummer kurz angedeutet haben, im allgemeinen noch keine Lösung unseres Problems dar. In den Intervallendpunkten würden noch Ecken vorhanden sein. Um nun die Differenzierbarkeit auch in den Intervall-

endpunkten zu erzwingen, werden wir zunächst linear mit der durch $f'(x)$ bzw. $f'(\bar{x})$ gegebenen Richtung von beiden Seiten ein Stück weit ins Innere des Intervalls weitergehen und den Rest des Intervalls ebenfalls linear ausfüllen. Die dabei im Inneren des Intervalls auftretenden Ecken lassen sich später (Nr. 8) leicht abrunden. Zu überlegen bleibt nur, *wie weit* man in der angegebenen Weise ins Innere des Intervalls vordringen darf, um nicht durch zu große Abweichung von der oben erwähnten linearen Ausfüllung des Gesamtintervalls die Differenzierbarkeit in den Häufungspunkten der i , wieder zu zerstören.

6. Nach diesen Überlegungen liegt folgender Ansatz sehr nahe: Wir teilen jedes Lückenintervall $(x; \bar{x})$ in drei gleiche Teile ⁵⁾. ξ sei irgendein Punkt im ersten der drei entstehenden offenen Teilintervalle, $\bar{\xi}$ ein Punkt im letzten derselben. Jedem dieser Zwischenpunkte, über deren genauere Wahl wir vorläufig nichts festsetzen, ordnen wir einen Funktionswert zu, und zwar den, der sich bei linearer Fortsetzung mit der in dem nächstgelegenen Intervallendpunkt gegebenen Steigung ergibt; also:

$$(1; 7) \quad \begin{aligned} f(\xi) &= f(x) + (\xi - x) \cdot f'(x), \\ f(\bar{\xi}) &= f(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot f'(\bar{x}). \end{aligned}$$

Alle diese Zwischenpunkte $\xi, \bar{\xi}$, die wir uns in den einzelnen Intervallen irgendwie fest gewählt denken, fassen wir zu einer Gesamtheit zusammen und fügen sie zur gegebenen Menge \mathfrak{M} hinzu. Die Vereinigungsmenge sei \mathfrak{M}^* ; sie ist ebenfalls abgeschlossen und wegen (1; 7) neuer Definitionsbereich für die Funktion $f(x)$. Ist nun diese Funktion $f(x)$ auch auf \mathfrak{M}^* differenzierbar, so können wir auf Grund unserer früheren Überlegungen (Nr. 4) folgendes schließen:

Setzt man $f(x)$ bezüglich der Lückenintervalle von \mathfrak{M}^* linear fort, so ist die so entstehende Funktion $F(x)$ im ganzen Intervall \mathfrak{J} erklärt und nach Konstruktion überall differenzierbar mit der vorgeschriebenen Ableitung, höchstens mit Ausnahme der Zwischenpunkte $\xi, \bar{\xi}$, also der Punkte von $\mathfrak{M}^* - \mathfrak{M}$. Wie schon erwähnt wurde (Nr. 5) und später gezeigt werden soll

⁵⁾ Diese Gleichheit der Teile wurde nur aus Bequemlichkeitsgründen gewählt. Wesentlich ist, daß die, wie aus dem folgenden hervorgeht, in diesen Teilintervallen zu wählenden Zwischenwerte $\xi, \bar{\xi}$ gewisse Bedingungen erfüllen: und zwar genügt bis einschließlich Satz I die Bedingung $\frac{\xi - x}{\bar{x} - \xi} < \frac{\bar{\xi} - \bar{x}}{\xi - \bar{\xi}}$; später müssen wir außerdem noch verlangen, daß die Ausdrücke $\frac{\xi - x}{\bar{x} - \xi}, \frac{\bar{\xi} - \bar{x}}{\xi - \bar{\xi}}$ unter festen positiven Zahlen liegen.

Da diese etwas schwächeren Bedingungen auch keine größere Allgemeinheit der Ergebnisse zeitigen würden, wollen wir uns gleich von Anfang an auf die obige Teilung in drei gleiche Teile festlegen.

(Nr. 8), lassen sich aber die dort auftretenden Ecken leicht abrunden, da an diesen Stellen durch das Problem selbst kein bestimmter Funktionswert vorgeschrieben ist. Damit haben wir bereits eine *hinreichende Bedingung* für die Existenz von $F(x)$ gewonnen:

Satz I. Sei ξ ein Punkt im ersten Drittel, $\bar{\xi}$ ein Punkt im letzten Drittel jedes Lückenintervalls i , (gegeben durch $\underline{x} < x < \bar{x}$) und seien $f(\xi)$ bzw. $f(\bar{\xi})$ definiert durch

$$f(\xi) = f(x) + (\xi - x) \cdot f'(x); \quad f(\bar{\xi}) = f(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot f'(\bar{x}).$$

\mathfrak{M}^* sei die Vereinigungsmenge der Menge \mathfrak{M} (des ursprünglichen Definitionsbereiches von $f(x)$) mit der Menge dieser Zwischenpunkte $\xi, \bar{\xi}$. Für die Existenz einer Funktion $F(x)$, die als „Fortsetzung von $f(x)$ “ im Sinne von (1; 3) angesehen werden kann, ist es dann hinreichend, wenn sich diese Punkte $\xi, \bar{\xi}$ so wählen lassen, daß $f(x)$ auch auf \mathfrak{M}^* differenzierbar ist.

7. Jetzt wollen wir zeigen, daß diese Bedingung auch notwendig ist. Wir setzen also voraus, daß es eine Funktion $F(x)$ gibt, die (1; 3) erfüllt. Sei dann ξ ein Punkt im ersten Drittel, $\bar{\xi}$ ein Punkt im letzten Drittel irgendeines Lückenintervalls, dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned} (1; 8) \quad F(\xi) &= f(x) + (\xi - x) \cdot f'(x) + (\xi - x) \cdot \varepsilon(\xi, x); \quad \lim_{\xi \rightarrow x} \varepsilon(\xi, x) = 0, \\ F(\bar{\xi}) &= f(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot f'(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}); \quad \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \bar{x}} \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit (1; 7) erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned} (1; 9) \quad f(\xi) &= F(\xi) - (\xi - x) \cdot \varepsilon(\xi, x); \quad \lim_{\xi \rightarrow x} \varepsilon(\xi, x) = 0, \\ f(\bar{\xi}) &= F(\bar{\xi}) - (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}); \quad \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \bar{x}} \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Wir treffen jetzt die Wahl der Punkte $\xi, \bar{\xi}$ speziell so, daß für jedes Lückenintervall (x, \bar{x}) die Ungleichungen bestehen:

$$(1; 10) \quad |\varepsilon(\xi, x)| < (\bar{x} - x); \quad |\varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x})| < (\bar{x} - x),$$

was wegen

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \varepsilon(\xi, x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \bar{x}} \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}) = 0$$

stets möglich ist. Sei nun x_0 irgendein Häufungspunkt von Intervallen i , so gilt für diesen wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $F(x)$:

$$\begin{aligned} (1; 11) \quad \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} &= f'(x_0) - \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{\xi - x}{\xi - x_0} \cdot \varepsilon(\xi, x), \\ \lim_{\bar{\xi} \rightarrow x_0} \frac{f(\bar{\xi}) - f(x_0)}{\bar{\xi} - x_0} &= f'(x_0) - \lim_{\bar{\xi} \rightarrow x_0} \frac{\bar{\xi} - \bar{x}}{\bar{\xi} - x_0} \cdot \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{x}). \end{aligned}$$

Aus

$$(1; 12) \quad \left| \frac{\xi - x}{\xi - x_0} \right| < 1; \quad \left| \frac{\bar{\xi} - \bar{x}}{\bar{\xi} - x_0} \right| < 1$$

und (1; 10) folgt aber, daß die in (1; 11) rechts stehenden Grenzwerte beide den Wert Null haben; denn bei Annäherung an einen Häufungspunkt muß die Intervalllänge $(\bar{x} - x)$ gegen Null konvergieren; die Gleichungen (1; 11) lauten daher:

$$(1; 13) \quad \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow x_0} \frac{f(\bar{\xi}) - f(x_0)}{\bar{\xi} - x_0} = f'(x_0).$$

Somit haben wir gezeigt, daß bei obiger Wahl der Zwischenpunkte $\xi, \bar{\xi}$ die Funktion $f(x)$ auch auf \mathfrak{M}^* differenzierbar ist. Unsere Bedingung für die Fortsetzbarkeit, die wir als hinreichend erkannt haben, ist damit also auch als notwendig nachgewiesen. Wir erhalten also den Satz:

Satz II. Die nach Satz I für die „Fortsetzbarkeit von $f(x)$ “ im Sinne von (1; 3) als hinreichend aufgestellte Bedingung ist auch notwendig.

8. Zum Beweis von Satz I haben wir noch einen Nachtrag zu bringen, nämlich die schon erwähnte Abrundung der Ecken, die bei obiger Konstruktion in den Zwischenpunkten $\xi, \bar{\xi}$ im allgemeinen auftreten werden. Sei also die Bedingung von Satz I erfüllt. Denken wir uns dann die Funktionswerte von $f(x)$ in üblicher Weise in einer (x, y) -Ebene dargestellt, so haben die kritischen Punkte die Koordinaten: $(\xi; f(\xi)); (\bar{\xi}; f(\bar{\xi}))$; um jeden dieser Punkte als Mittelpunkt wollen wir einen Kreis beschreiben, der ganz im Inneren des durch das zugehörige Intervall definierten Vertikalstreifens liegt. Außerdem mögen sich von diesen Kreisen keine zwei überdecken. Den Radius wählen wir zu diesem Zweck und aus Gründen einer späteren Konvergenzbetrachtung in jedem Intervall, wie folgt:

$$(1; 14) \quad r = \text{Min} \left[(\xi - x)^2; (\bar{\xi} - \bar{x})^2; \frac{1}{9} \right].$$

Ist nämlich $\xi - x \leq \bar{x} - \bar{\xi}$, so gilt

$$\text{für } \xi - x \leq \frac{1}{3}:$$

$$r = (\xi - x)^2 \leq \frac{\xi - x}{3} \leq \frac{\bar{x} - \bar{\xi}}{3} \leq \frac{\bar{x} - x}{9},$$

$$\text{für } \xi - x > \frac{1}{3}:$$

$$r = \frac{1}{9} < \frac{\xi - x}{3} \leq \frac{\bar{x} - \bar{\xi}}{3} \leq \frac{\bar{x} - x}{9}.$$

Aus analogen Ungleichungen für den Fall $\xi - x > \bar{x} - \bar{\xi}$ ergibt sich zusammenfassend:

$$(1; 15) \quad r \leq \min \left(\frac{\xi - x}{3}, \frac{\bar{x} - \bar{\xi}}{3} \right) \leq \frac{\bar{x} - x}{9}.$$

Man sieht sofort, daß bei dieser Wahl von r die Kreise so ausfallen, wie wir sie haben wollten: Die zu einem festen Intervall gehörigen Kreise greifen nicht über den durch das Intervall definierten Vertikalstreifen hinaus. Außerdem können sich auch die beiden zu ein und demselben Intervall gehörigen Kreise nicht überdecken, da der Abstand der Kreismittelpunkte mindestens ein Drittel der Intervalllänge, der Radius dagegen höchstens den neunten Teil derselben beträgt.

Das Innere eines solchen Kreises können wir darstellen in der Form:

$$(1; 16) \quad \begin{aligned} \mathfrak{R}: \quad x &= \xi + \varrho \cdot \cos \varphi; & 0 \leq \varrho < r, \\ y &= f(\xi) + \varrho \cdot \sin \varphi; & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

Genau das Entsprechende gilt natürlich für $\bar{\xi}$, $f(\bar{\xi})$, möge aber der Kürze halber für die folgende Rechnung unterdrückt werden. Wir wollen jetzt zeigen, daß für alle Punkte $(x; y)$ aus \mathfrak{R} folgende Relation besteht:

$$(1; 17) \quad \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0); \quad (x; y) \in \mathfrak{R}.$$

Das bedeutet: Wir können innerhalb \mathfrak{R} die Funktionswerte in passender Weise abändern, ohne dadurch die vorausgesetzte Differenzierbarkeit in den Punkten von \mathfrak{M} zu gefährden. Da das Funktionsbild vorher aus zwei im Mittelpunkt von \mathfrak{R} zusammenlaufenden Geradenstücken bestand, läßt sich die hier möglicherweise auftretende Ecke leicht durch einen ganz im Inneren des Kreises verlaufenden, differenzierbaren Kurvenbogen überbrücken, womit dann alles gemacht ist.

Zum Beweis von (1; 17) setzen wir x und y aus (1; 16) ein:

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi) - f(x_0) + \varrho \cdot \sin \varphi}{\xi - x_0 + \varrho \cdot \cos \varphi} &= \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} : \left\{ 1 + \frac{\varrho \cdot \cos \varphi}{\xi - x_0} \right\} \\ &\quad + \frac{\varrho \cdot \sin \varphi}{\xi - x_0} : \left\{ 1 + \frac{\varrho \cdot \cos \varphi}{\xi - x_0} \right\}. \end{aligned}$$

Aus (1; 14) entnehmen wir:

$$\left| \frac{\varrho \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}}{\xi - x_0} \right| < \frac{r}{\xi - x} < (\xi - x) < \frac{\bar{x} - x}{3},$$

woraus sofort die Behauptung folgt, da $(\bar{x} - x)$ bei Annäherung an einen Häufungspunkt x_0 gegen Null konvergiert.

§ 2.

Die „Fortsetzbarkeit“ von $f(x)$ hängt von der Möglichkeit ab, den Lückenintervallen gewisse Zahlen λ zuzuordnen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen müssen.

9. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Fortsetzbarkeit, die wir in Satz II aufgestellt haben, ist noch unbefriedigend. Die Entscheidung, ob es in jedem Lückenintervall Zwischenpunkte der verlangten Eigenschaft gibt, dürfte im allgemeinen schwer sein. Wir wollen daher im folgenden diese Bedingung auf eine andere Form bringen, bei der von vornherein gegebene Eigenschaften der Funktion $f(x)$, ihrer Ableitung $f'(x)$ und der Menge \mathfrak{M} herangezogen werden.

Wir denken uns die Zwischenpunkte $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ in den einzelnen Lückenintervallen irgendwie gewählt und bilden für einen beliebigen Häufungspunkt x_0 solcher Intervalle die Ausdrücke:

$$(2; 1) \quad \begin{aligned} D &= \frac{1}{\underline{\xi} - x_0} \cdot \{f(\underline{\xi}) - f(x_0) - (\underline{\xi} - x_0) \cdot f'(x_0)\}, \\ \bar{D} &= \frac{1}{\bar{\xi} - x_0} \cdot \{f(\bar{\xi}) - f(x_0) - (\bar{\xi} - x_0) \cdot f'(x_0)\}. \end{aligned}$$

Die Bedingung von Satz II können wir dann so schreiben:

$$(2; 2) \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow x_0} D = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow x_0} \bar{D} = 0; \quad \text{für jedes } x_0.$$

Die rechte Seite von (2; 1) formen wir nun nach (1; 7) und (1; 1) um:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\underline{\xi} - x_0} \cdot \{f(x) - f(x_0) + (\underline{\xi} - x) \cdot f'(x) - (\underline{\xi} - x_0) \cdot f'(x_0)\} \\ (2; 3) \quad &= \frac{1}{\underline{\xi} - x_0} \cdot \{(x - \underline{\xi}) \cdot f'(x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon(x; x_0) + (\underline{\xi} - x) \cdot f'(x)\}, \\ D &= \frac{\underline{\xi} - x}{\underline{\xi} - x_0} \cdot [f'(x) - f'(x_0)] + \frac{x - x_0}{\underline{\xi} - x_0} \cdot \varepsilon(x; x_0). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$(2; 4) \quad \bar{D} = \frac{\bar{\xi} - \bar{x}}{\bar{\xi} - x_0} \cdot [f'(\bar{x}) - f'(x_0)] + \frac{\bar{x} - x_0}{\bar{\xi} - x_0} \cdot \varepsilon(\bar{x}; x_0).$$

Wegen

$$\left| \frac{x - x_0}{\underline{\xi} - x_0} \right| < \frac{3}{2}; \quad \left| \frac{\bar{x} - x_0}{\bar{\xi} - x_0} \right| < \frac{3}{2}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x; x_0) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x_0} \varepsilon(\bar{x}; x_0) = 0$$

folgt aus (2; 2), (2; 3) und (2; 4):

$$(2; 5) \quad \begin{aligned} & \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\xi - x}{\xi - x_0} \cdot [f'(x) - f'(x_0)] = 0 \\ & \text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{\xi} - x}{\bar{\xi} - x_0} \cdot [f'(\bar{x}) - f'(x_0)] = 0 \end{aligned} \quad \text{für jedes } x_0.$$

Das bedeutet: Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Fortsetzung $F(x)$ im Sinne von (1; 3) ist es, wenn man die Punkte $\xi, \bar{\xi}$ in jedem Lückenintervall so wählen kann, daß die Gleichungen (2; 5) für jeden Häufungspunkt x_0 von Intervallen erfüllt sind.

10. Die Bedingung (2; 5) läßt sich noch weiter vereinfachen. Es wird sich zeigen, daß man die Zwischenpunkte $\xi, \bar{\xi}$ immer so wählen kann, daß bei beliebigem x_0 jede der beiden Bedingungen (2; 5) wenigstens für eine gewisse Teilmenge von Intervallen erfüllt ist — für welche, das hängt noch von x_0 ab. Wir werden nämlich die $\xi, \bar{\xi}$ so bestimmen können, daß für jedes x_0 die Bedingung a) für die Intervalle links von x_0 , die Bedingung b) für diejenigen rechts von x_0 befriedigt wird. Beweisen wollen wir nur den ersten Teil dieser Aussage, der zweite erledigt sich ganz analog, indem man in den Formeln die unterstrichenen Größen sinngemäß mit den überstrichenen vertauscht und gleichzeitig voraussetzt, daß die betrachteten Intervalle nun rechts von x_0 liegen.

Es sei also (x, \bar{x}) ein beliebiges Intervall links von x_0 . Dann gilt:

$$(2; 6) \quad \left| \frac{\xi - x}{\xi - x_0} \right| < \frac{\xi - x}{\bar{x} - \xi} = \frac{1}{\frac{\bar{x} - x}{\xi - x} - 1}.$$

In dieser Abschätzung kommt auf der rechten Seite das x_0 nicht mehr vor. Wir versuchen, in jedem Intervall das ξ so nahe an das x heranzubringen, daß die rechte Seite von (2; 6) bei jeder Annäherung an einen Häufungspunkt x_0 gegen Null geht. Ein von x_0 unabhängiges Kriterium für die Annäherung der Intervalle an einen Häufungspunkt ist das „Gegen Null Gehen“ der Intervalllänge. Diese Überlegungen führen uns dazu, das ξ so zu bestimmen, daß folgende drei Ungleichungen

$$(2; 7) \quad \frac{1}{\frac{x - x}{\xi - x} - 1} < \bar{x} - x; \quad \frac{|f'(x)|}{\frac{x - x}{\xi - x} - 1} < \bar{x} - x; \quad \xi - x < \frac{\bar{x} - x}{3}$$

gleichzeitig gelten ^{a)}; denn dann gilt wegen (2; 6) auch (2; 5a) für alle Intervalle links von x_0 . Setzen wir noch zur Abkürzung

$$(2; 8) \quad \bar{x} - x = l; \quad \xi - x = \Delta l; \quad \bar{x} - \xi = \bar{\Delta} l,$$

^{a)} Die letzte Ungleichung (2; 7) entspricht der Forderung, die wir in (Nr. 6) an die $\xi, \bar{\xi}$ gestellt haben; vgl. Anm. ^{b)}.

so ist (2; 7) sicher erfüllt, wenn wir $\underline{\Delta l}$ der Bedingung unterwerfen

$$(2; 9) \quad 0 < \underline{\Delta l} < \frac{l^2}{l + \max\{1; 2l; |f'(x)|\}}.$$

Machen wir außerdem

$$(2; 10) \quad 0 < \overline{\Delta l} < \frac{l^2}{l + \max\{1; 2l; |f'(\bar{x})|\}},$$

so ist, wie die analoge Rechnung zeigt, die Bedingung (2; 5b) erfüllt, wenn sich die Intervalle von rechts her gegen die Stelle x_0 häufen.

Das Minimum der beiden Schranken (2; 9) und (2; 10) sei R :

$$(2; 11) \quad R = \frac{l^2}{l + \max\{1; 2l; |f'(x)|; |f'(\bar{x})|\}}.$$

Dann können wir jedenfalls folgendes sagen: Wählen wir die Punkte $\xi, \bar{\xi}$ so, daß die Längen der durch sie an beiden Enden jedes Intervalls ausgeschnittenen Teilintervalle $\underline{\Delta l}$ und $\overline{\Delta l}$ kleiner sind als obige Zahl R , so sind die Gleichungen (2; 5) bei jedem festen x_0 für diejenigen Zwischenpunkte erfüllt, die im Intervall auf der dem Häufungspunkt x_0 nicht zugekehrten Seite liegen.

11. Jetzt müssen wir danach trachten, die Teilintervalle $\underline{\Delta l}, \overline{\Delta l}$ unter der Einschränkung

$$(2; 12) \quad \underline{\Delta l} < R; \quad \overline{\Delta l} < R$$

noch so zu verkleinern, daß die Relationen (2; 5), so dies überhaupt möglich sein sollte, für jedes x_0 und alle Zwischenpunkte gelten. Es ist:

$$(2; 13) \quad \frac{\xi - x}{\xi - x_0} = \frac{1}{1 + \frac{x - x_0}{\xi - x}}; \quad \frac{\bar{\xi} - \bar{x}}{\bar{\xi} - x_0} = \frac{1}{1 + \frac{x_0 - \bar{x}}{\bar{\xi} - \bar{x}}}.$$

Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnungen ein:

$$(2; 14) \quad \begin{aligned} & \text{a) } d(x_0) = \text{Abstand des Intervalls von } x_0, \\ & \text{b) } \min(\underline{\Delta l}, \overline{\Delta l}) = \Delta l = \frac{1}{\lambda} \cdot l, \\ & \text{c) } z = z_v(x_0) = \begin{cases} x & \text{falls } x_0 < x, \\ \bar{x} & \text{falls } x_0 > \bar{x}. \end{cases} \end{aligned}$$

Sei nun x_0 fest; dann brauchen wir im Falle $x > x_0$ nur mehr die erste der Gleichungen (2; 5), im Falle $\bar{x} < x_0$ nur die zweite davon zu berücksichtigen; die andere ist nach den obigen Überlegungen (Nr. 10) von selbst erfüllt. Nach

(2; 13) und (2; 14) können wir daher unsere Bedingungen (2; 5) in die gleichwertige Form setzen:

$$(2; 15) \quad \begin{cases} \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{1}{1 + \frac{d(x_0)}{\Delta l}} \cdot [f'(z) - f'(x_0)] = 0; & \Delta l < R, \\ \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{1}{1 + \frac{d(x_0)}{\overline{\Delta l}}} \cdot [f'(z) - f'(x_0)] = 0; & \overline{\Delta l} < R. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich mit der Bezeichnung (2; 14b) noch in die eine, wie man leicht sieht, äquivalente Bedingung zusammenfassen, daß es möglich ist, den Lückenintervallen i , solche Zahlen $\lambda > \frac{l}{R}$ zuzuordnen, daß gilt:

$$(2; 16) \quad \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{1}{1 + \lambda \cdot \frac{d(x_0)}{l}} \cdot [f'(z) - f'(x_0)] = 0$$

für jedes x_0 .

Hat man nun überhaupt λ -Werte gefunden, die (2; 16) erfüllen (aber vielleicht nicht durchwegs $> \frac{l}{R}$ sind), so genügen natürlich irgendwelche vergrößerten λ erst recht der Ungleichung (2; 16). Wir können daher in der Formulierung der Bedingung den Zusatz $\lambda > \frac{l}{R}$ unterdrücken, da dieser Forderung nachträglich durch geeignete Vergrößerung der λ immer genügt werden kann. Wir erhalten also das Resultat:

Satz III. Sei x_0 ein beliebiger Häufungspunkt von Lückenintervallen i , l die Länge eines solchen Intervalls, $d(x_0)$ sein Abstand von x_0 und z der dem Häufungspunkt x_0 zugekehrte Endpunkt des Intervalls i . Für die „Fortsetzbarkeit“ von $f(x)$ im Sinne von (1; 3) ist es dann notwendig und hinreichend, daß man zu jedem Lückenintervall i , eine positive Zahl $\lambda = \lambda(i)$ so bestimmen kann, daß für alle Häufungspunkte x_0 dieser Intervalle folgende Relation gilt:

$$\lim_{z \rightarrow x_0} \frac{1}{1 + \lambda \cdot \frac{d(x_0)}{l}} \cdot [f'(z) - f'(x_0)] = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so haben wir für die Konstruktion einer Fortsetzung folgende Vorschrift:

Der jedem Lückenintervall i , vermöge Satz III zugeordnete λ -Wert ist eventuell noch so zu vergrößern, daß außerdem gilt:

$$\lambda > \frac{l + \text{Max} \{1; 2l; |f'(x)|; |f'(\bar{x})|\}}{l}$$

An den beiden Enden jedes Intervalls i , grenze man dann Teilintervalle von der Länge $\frac{1}{\lambda}$ ab und gebe den so entstehenden Teilpunkten $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ die Funktionswerte:

$$f(\underline{\xi}) = f(\underline{x}) + (\underline{\xi} - \underline{x}) \cdot f'(\underline{x}),$$

$$f(\bar{\xi}) = f(\bar{x}) + (\bar{\xi} - \bar{x}) \cdot f'(\bar{x}).$$

Die Fortsetzung ergibt sich daraus durch lineare Ausfüllung der drei Teilintervalle $(x, \underline{\xi})$, $(\underline{\xi}, \bar{\xi})$, $(\bar{\xi}, \bar{x})$ und geeignete Abrundung der in den $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ auftretenden Ecken (z. B. nach der Methode (Nr. 8)).

§ 3.

Fälle, in denen eine Fortsetzung möglich ist.

12. Satz III bietet uns jetzt die Möglichkeit, mehrere Fälle anzugeben, in denen eine Fortsetzung möglich ist. Der erste Faktor der Limesgleichung (2; 16) hängt nämlich in den gegebenen Größen nur von der Struktur der Menge \mathfrak{M} ab, während der zweite Faktor die auf \mathfrak{M} definierte Funktion $f'(x)$ enthält. Wegen

$$(3; 1) \quad \frac{1}{1 + \lambda \cdot \frac{d(x_0)}{1}} < 1$$

gilt (2; 16) sicher in jedem Punkt x_0 , in dem $f'(x)$ stetig ist; denn für solche x_0 hat der Klammerausdruck den Grenzwert Null. Bezeichnen wir die Menge aller x_0 , also die Menge aller Häufungspunkte von Lückenintervallen mit \mathfrak{M}'_0 , so entnehmen wir aus obigem:

Satz IV. *Hinreichend für die „Fortsetzbarkeit“ von $f(x)$ im Sinne von (1; 3) ist es, wenn die Ableitung $f'(x)$ auf \mathfrak{M}'_0 (Menge aller Häufungspunkte von Lückenintervallen) stetig ist⁷⁾. Die Zahl λ kann man für jedes Intervall beliebig ≥ 3 wählen⁸⁾.*

13. Im folgenden brauchen wir uns also nur mehr um die Punkte aus \mathfrak{M}'_0 zu kümmern, in denen $f'(x)$ unstetig ist. Die Gesamtheit dieser Unstetigkeitspunkte nennen wir \mathfrak{M}'_u . Wir werden zeigen, daß (2; 16) erfüllt werden kann, wenn \mathfrak{M}'_u höchstens abzählbar ist. Es sei also⁹⁾

$$(3; 2) \quad \mathfrak{M}'_u = \{x_0^1; x_0^2; \dots; x_0^p; \dots\},$$

⁷⁾ Vgl. Anm. ²⁾. In diesem Satz soll auch der triviale Fall enthalten sein, daß \mathfrak{M}'_0 die Nullmenge ist.

⁸⁾ Folgt am einfachsten direkt aus (2; 5); die $\underline{\xi}$, $\bar{\xi}$ unterliegen nur der schon am Anfang gemachten Voraussetzung, im ersten bzw. letzten Drittel des Intervalls zu sein; vgl. Anm. ⁵⁾.

⁹⁾ Den Stellenindex der Punkte x_0 schreiben wir hier oben, da eine Verwechslung mit Exponenten im folgenden nicht zu befürchten ist.

wobei wir es dahingestellt sein lassen, ob \mathfrak{M}'_u endlich oder abzählbar unendlich ist. Jedem Lückenintervall i , versuchen wir nun eine positive Zahl $\lambda(i)$, so zuzuordnen, daß für alle $x_0^p \in \mathfrak{M}'_u$ die Gleichungen gelten:

$$(3; 3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^p} \frac{f'(x)}{1 + \lambda(i) \cdot \frac{d(x_0^p)}{l}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^p} \frac{1}{1 + \lambda(i) \cdot \frac{d(x_0^p)}{l}} = 0$$

für jedes $x_0^p \in \mathfrak{M}'_u$.

Diesen beiden Relationen und damit auch (2; 16) wird jedenfalls genügt, wenn wir die Intervallfunktion $\lambda(i)$ so bestimmen können, daß die eine Gleichung besteht:

$$(3; 4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^p} \frac{1}{\lambda(i)} \cdot \frac{l \cdot (|f'(x)| + 1)}{d(x_0^p)} = 0$$

für jedes $x_0^p \in \mathfrak{M}'_u$.

14. Dazu greifen wir ein beliebiges $x_0^p \in \mathfrak{M}'_u$ heraus, das für die weitere Rechnung festgehalten werde. Zu diesem x_0^p wollen wir eine Funktion $\varphi_p(t)$ definieren, die für das Verhalten des zweiten Faktors in (3; 4) charakteristisch ist, wenn sich das Intervall i , der Stelle x_0^p nähert. Da es nämlich jeweils nur endlich viele Intervalle i , gibt, deren Länge l größer ist als eine feste positive Zahl¹⁰⁾, andererseits beliebig kleine i , vorhanden sein müssen, hat folgende Definition immer einen Sinn¹¹⁾:

$$(3; 5) \quad \varphi_p(t) \begin{cases} = \varphi_p\left(\frac{1}{n}\right), & \text{falls kein } i, \text{ existiert mit } l \geq 1, \\ & \text{andernfalls} \\ = \text{Max}_{i, l \geq 1} \frac{l \cdot (|f'(z)| + 1)}{d(x_0^p)} \end{cases} \quad \text{für } t \geq 1,$$

$$\varphi_p(t) \begin{cases} = \varphi_p\left(\frac{1}{n+1}\right), & \text{falls kein } i, \text{ existiert mit } l \geq \frac{1}{n}, \\ & \text{andernfalls} \\ = \text{Max}_{i, l \geq \frac{1}{n}} \frac{l \cdot (|f'(z)| + 1)}{d(x_0^p)} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{für } \frac{1}{n} \leq t < \frac{1}{n-1}, \\ n \geq 2. \end{matrix}$$

Nach dieser Festsetzung ist $\varphi_p(t)$ im Bereich $t > 0$ erklärt und stets positiv. Außerdem gelten, wie man aus (3; 5) sofort entnimmt, die Monotoniebeziehungen:

$$(3; 6) \quad \varphi_p(t_1) \geq \varphi_p(t_2), \quad \text{falls } t_1 < t_2.$$

Dies berechtigt uns, von einem Wachstum der Funktionen $\varphi_p(t)$ für gegen Null abnehmendes t zu sprechen. Da jedem $x_0^p \in \mathfrak{M}'_u$ ein solches $\varphi_p(t)$ zuge-

¹⁰⁾ Die gegebene Menge wurde ja als beschränkt vorausgesetzt (Nr. 2).

¹¹⁾ Hierin soll $\text{Max}_{i, l \geq a} \frac{l \cdot (|f'(z)| + 1)}{d(x_0^p)}$ bedeuten: Maximum dieses Ausdrucks für alle i , deren Länge $l \geq a$ ist.

ordnet ist, definiert (3; 5) eine ganze Klasse von höchstens abzählbar vielen Funktionen, die mit gegen Null abnehmendem t monoton nicht abnehmen. Nach bekannten Sätzen gibt es nun immer eine Funktion $\Phi(t)$, die für gegen Null abnehmendes t stärker wächst als jede Funktion obiger Klasse, seien es endlich oder abzählbar unendlich viele¹²⁾. Für dieses $\Phi(t)$ gilt also:

$$(3; 7) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_p(t)}{\Phi(t)} = 0; \quad p = 1; 2; 3; \dots$$

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir wieder zu unserem Ausgangspunkt zurück. Jedem Intervall i , sollte eine Zahl $\lambda(i)$, so zugeordnet werden, daß (3; 4) erfüllt ist. Dazu haben wir jetzt nur zu schreiben:

$$(3; 8) \quad \lambda(i) = \Phi(l),$$

wobei l wie früher die Intervalllänge bedeutet. Zum Beweis werden wir zeigen, daß bei dieser Wahl von λ für jedes $x_0^p \in \mathfrak{M}_u$ die Gleichung (3; 4) besteht, d. h. also:

$$(3; 9) \quad \lim_{z \rightarrow x_0^p} \frac{1}{\Phi(l)} \cdot \frac{l \cdot \{|f'(z)| + 1\}}{d(x_0^p)} = 0.$$

Nun bewirkt der Grenzübergang $z \rightarrow x_0^p$, daß die Intervalllänge l gleichzeitig gegen Null konvergiert. Für den zweiten Faktor in (3; 9) gilt aber nach (3; 5) die Abschätzung:

$$0 < \frac{l \cdot \{|f'(z)| + 1\}}{d(x_0^p)} < \varphi_p(l),$$

woraus wegen (3; 7) die Behauptung (3; 9) folgt. Wir erhalten also:

Satz V. *Hinreichend für die „Fortsetzbarkeit“ von $f(x)$ im Sinne von (1; 3) ist es, wenn in der Menge \mathfrak{M}_0 (Menge der Häufungspunkte der Lückenintervalle) nur höchstens abzählbar viele Unstetigkeitspunkte von $f'(x)$ vorkommen.*

§ 4.

Die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Erweiterung des Definitionsbereiches ist unabhängig von den Werten der Ableitung in den isolierten Punkten des Definitionsbereiches.

15. Alle bisher aufgestellten Sätze sind in einer Beziehung noch unvollständig. Wir hatten ja ganz am Anfang die Funktionswerte von $f'(x)$ in den isolierten Punkten von \mathfrak{M} willkürlich vorgegeben und die so für die ganze Menge \mathfrak{M} erklärte Funktion $f'(x)$ als Basis für unsere Untersuchungen ge-

¹²⁾ Im Falle endlich vieler $\varphi_p(t)$ braucht man nur zu setzen: $\Phi(t) = \frac{1}{t} \cdot \max_p \varphi_p(t)$; im Falle unendlich vieler gelingt die Konstruktion nach dem Diagonalverfahren; siehe E. Borel, *La croissance*, Paris 1910, p. 27.

wählt. Auf diese schon vorher willkürlich ergänzte Funktion $f'(x)$ beziehen sich nun alle bis jetzt gefundenen Ergebnisse. Damit erhebt sich natürlich die Frage, inwieweit diese anfangs gemachte Zusatzdefinition für die Möglichkeit der Fortsetzung selbst von Einfluß ist. Es könnte ja sein, daß bei einer gewissen Festsetzung für $f'(x)$ die Bedingung (2; 16) erfüllbar ist, bei einer anderen hingegen nicht. Wir werden zeigen, daß in Wahrheit die Fortsetzbarkeit von dieser Willkür unabhängig ist; gleichzeitig werden wir die Bedingung (2; 16) auf eine solche Form bringen, daß sie nur mehr von vornherein gegebene Bedingungstücke enthält, also in ihr keine Größen mehr auftreten, von denen sie — wie wir zeigen werden — nicht abhängt.

16. Wir schränken also den Definitionsbereich von $f'(x)$ vorübergehend wieder auf den ursprünglichen, durch das Problem selbst gegebenen Bereich \mathfrak{M}' ein. Dann hat der in der Bedingung (2; 16) auftretende Ausdruck nur einen Sinn, wenn der dem Häufungspunkt x_0 zugekehrte Intervallendpunkt z zu \mathfrak{M}' gehört. Durch die Forderung $z \in \mathfrak{M}'$ wird aus der Gesamtheit der Lückenintervalle eine Teilmenge ausgesondert, nämlich die Teilmenge solcher Intervalle, von denen wenigstens ein Endpunkt zu \mathfrak{M}' gehört und dieser gleichzeitig irgendeinem x_0 zugekehrt ist. Die Gesamtheit dieser letzteren Intervalle bezeichnen wir mit \mathfrak{G} . Nun ist nach (2; 16) für die Fortsetzbarkeit von $f(x)$ jedenfalls folgende Bedingung notwendig: Jedem zur Gesamtheit \mathfrak{G} gehörenden i , muß sich eine Zahl $\lambda_1 = \lambda_1(i)$ so zuordnen lassen, daß für jedes x_0 gilt:

$$(4; 1) \quad \lim_{i \rightarrow x_0} \frac{1}{1 + \lambda_1(i) \cdot \frac{d(x_0)}{i}} \cdot [f'(z) - f'(x_0)] = 0,$$

für alle $i \in \mathfrak{G}$, für die gleichzeitig z zu \mathfrak{M}' gehört.

17. Wir werden jetzt zeigen, daß diese Bedingung (4; 1) auch schon hinreichend ist, gleichgültig, wie wir die Werte von $f'(x)$ für die isolierten Punkte von \mathfrak{M} ergänzen. Der Beweis ist erbracht, wenn wir zeigen: Sobald sich den Lückenintervallen aus \mathfrak{G} Zahlen λ_1 zuordnen lassen, die (4; 1) erfüllen, dann lassen sich zu *allen* Lückenintervallen Zahlen λ bestimmen, so daß (2; 16) gilt.

Um dies zu beweisen, gehen wir aus von der Menge \mathfrak{M}'_0 der Intervallhäufungspunkte. Diese Menge ist jedenfalls abgeschlossen und nirgends dicht; sie kann also dargestellt werden durch die Endpunkte gewisser getrennt liegender offener Intervalle — wir nennen diese Intervalle g_n — und deren Häufungspunkte. Nennen wir die Menge der Intervallendpunkte \mathfrak{E}'_0 , deren bezüglich \mathfrak{M}'_0 komplementäre Menge \mathfrak{S}'_0 , so erhält man die eindeutige Zerlegung

$$(4; 2) \quad \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{E}'_0 + \mathfrak{S}'_0; \quad \mathfrak{E}'_0 \cdot \mathfrak{S}'_0 = 0.$$

\mathbb{E}'_0 ist höchstens abzählbar. Daher können wir nach demselben Verfahren wie in § 3 (Nr. 14) eine für alle i , definierte Intervallfunktion $\lambda(i)$, wir wollen sie $\lambda_2(i)$ nennen, so bestimmen, daß für jedes $x_0 \in \mathbb{E}'_0$ gilt:

$$(4; 3) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f'(z)}{1 + \lambda_2(i) \cdot \frac{d(x_0)}{l}} = 0; \quad \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \lambda_2(i) \cdot \frac{d(x_0)}{l}} = 0.$$

$x_0 \in \mathbb{E}'_0.$

Ist nun \mathfrak{H}'_0 die Nullmenge, so sind wir fertig, da alle x_0 schon in \mathbb{E}'_0 vorkommen. Andernfalls greifen wir ein beliebiges $x_0 \in \mathfrak{H}'_0$ heraus, das wir für das Folgende festhalten. x_0 ist also Häufungspunkt von Intervallen g_μ , aber kein Endpunkt eines solchen. Durch x_0 wird die Gesamtheit der Intervalle i , in zwei Klassen geschieden, solche, die rechts von x_0 liegen, und solche, die links von x_0 liegen. Im folgenden beschränken wir uns der Kürze halber auf die ersten; für die links liegenden geht alles ganz analog.

18. Irgendein i , sei also rechts von x_0 , und x_0 sei auch Häufungspunkt solcher rechts liegender i . Das zugehörige z ist dann der linke Intervallendpunkt. Da kein i , irgendeinen Punkt der nirgends dichten Menge \mathfrak{M}'_0 im Inneren enthalten darf, müssen die Intervalle i , in den Intervallen g_μ enthalten sein. Dabei kann man zwei Arten von Intervallen i , unterscheiden; bei den Intervallen i , der ersten Art ist z gleichzeitig Endpunkt eines g_μ -Intervalls: i , gehört dann zu \mathfrak{G} und z zu \mathfrak{M}' ; bei den Intervallen i , der zweiten Art liegt z ganz im Inneren eines g_μ -Intervalls; für alle i , der ersten Art ist aber (2; 16) identisch mit (4; 1), daher nach Voraussetzung erfüllt. Wir brauchen uns also nur mehr mit den Intervallen i , der zweiten Art zu befassen (siehe Fig. 1; dabei ist $\bar{x} < \bar{u}$ genommen; natürlich könnte auch $\bar{x} = \bar{u}$ sein).

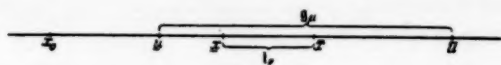


Fig. 1.

Bezeichnen wir die Endpunkte eines g_μ -Intervalls mit \underline{u} , \bar{u} ($\underline{u} < \bar{u}$), so gilt für jedes i , der obigen zweiten Art: $\underline{u} < \underline{x}$. Daher gelten bei beliebigem $\lambda > 0$ die Ungleichungen:

$$(4; 4) \quad 0 < \frac{|f'(z)|}{1 + \lambda \cdot \frac{d(x_0)}{l}} < \frac{|f'(z)|}{1 + \lambda \frac{x - \underline{u}}{l}} = \frac{|f'(z)|}{1 + \lambda \frac{\bar{x} - \underline{u}}{l}},$$

$$0 < \frac{1}{1 + \lambda \cdot \frac{d(x_0)}{l}} < \frac{1}{1 + \lambda \frac{\bar{x} - \underline{u}}{l}}; \quad \bar{x} > x_0, \quad \bar{x} \text{ nicht in } \mathbb{E}'_0.$$

Nun ist \underline{u} ein Punkt aus \mathbb{E}'_0 . Wählt man daher in (4; 3) für x_0 speziell \underline{u} , so stimmen für $\lambda = \lambda_2(i)$ die in (4; 4) rechts stehenden Quotienten mit den zu limitierenden Ausdrücken in (4; 3) überein, konvergieren also mit $l \rightarrow 0$

gegen Null. Eine analoge Abschätzung gilt natürlich für die Intervalle links von x_0 , deren rechter Endpunkt nicht zu \mathfrak{G}_0 gehört. Für alle i , der oben genannten zweiten Art, gleichgültig ob rechts oder links von x_0 , ergibt sich also bei beliebigem festen x_0 :

$$(4; 5) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f'(z)}{1 + \lambda_2(i) \cdot \frac{d(x_0)}{l}} = 0, \quad z \text{ nicht in } \mathfrak{G}_0'$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \lambda_3(i) \cdot \frac{d(x_0)}{l}} = 0,$$

Da die Intervalllänge l bei Annäherung an einen Häufungspunkt x_0 gegen Null konvergiert, folgt für die letztgenannte Klasse von Intervallen aus (4; 5) unmittelbar (2; 16).

Ordnen wir daher jedem Intervall i , eine Zahl

$$\lambda_3(i) = \text{Max} [\lambda_1(i); \lambda_2(i)]$$

zu ¹³⁾, so ist mit dieser Intervallfunktion $\lambda_3(i)$ wegen (4; 1) und (4; 5) die Bedingung (2; 16) für alle i , und jedes x_0 erfüllt. Wir entnehmen daraus den Hauptsatz:

Satz VI. Sei x_0 ein beliebiger Häufungspunkt von Lückenintervallen i , l die Länge eines solchen Intervalls, $d(x_0)$ sein Abstand von x_0 und z der dem Häufungspunkt x_0 zugekehrte Endpunkt des Intervalls i . Die Gesamtheit der Lückenintervalle, von denen mindestens ein Endpunkt zu \mathfrak{M}' gehört und dieser gleichzeitig irgendeinem Intervallhäufungspunkt x_0 zugekehrt ist, sei \mathfrak{G} . Für die „Fortsetzbarkeit“ von $f(x)$ im Sinne von (1; 3) ist dann folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

Jedem i , aus \mathfrak{G} muß man eine positive Zahl $\lambda_1 = \lambda_1(i)$, so zuordnen können, daß bei beliebigem festen x_0 gilt:

$$\lim_{z \rightarrow x_0} \frac{1}{1 + \lambda_1(i) \cdot \frac{d(x_0)}{l}} [f'(z) - f'(x_0)] = 0,$$

wobei bei dieser Grenzwertbildung nur diejenigen Intervalle i , aus \mathfrak{G} in Betracht zu ziehen sind, deren z zu \mathfrak{M}' gehört (was im allgemeinen von x_0 abhängen wird).

Aus Satz VI folgt, nachdem in der dort auftretenden Bedingung die Werte von $f'(x)$ in den isolierten Punkten von \mathfrak{M} nicht mehr vorkommen,

Satz VII. Die Fortsetzbarkeit bzw. Nichtfortsetzbarkeit von $f(x)$ ist unabhängig davon, wie die Werte von $f'(x)$ in den isolierten Punkten von \mathfrak{M} vorgeschrieben werden.

¹³⁾ Wenn $\lambda_1(i_r)$ für ein i_r nicht definiert ist, sei $\lambda_3(i_r) = \lambda_2(i_r)$.

Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen.

Von

Gottfried Köthe in Münster.

Ein bekannter Satz von H. Hahn und S. Banach besagt, daß man jede auf einem linearen Teilraum eines metrischen Raumes erklärte beschränkte Linearfunktion auf den ganzen Raum fortsetzen kann. Auf diesen Satz gründen sich die meisten allgemeinen Existenzbeweise für die Lösungen linearer Gleichungen in metrischen Räumen.

In einer früheren Arbeit (K. 2¹⁾) habe ich diesen Erweiterungssatz auf die vollkommenen, im allgemeinen nicht mehr metrischen, Räume übertragen. Dieses Resultat soll hier verschärft und in eine endgültige Form gebracht werden. Die wesentliche Idee ist die Einführung einer neuen Topologie in den vollkommenen Räumen, der auf den beschränkten, schwach kompakten Mengen des dualen Raumes aufgebauten k -Topologie (§ 2). Sie ist einfacher als die in K. 2 betrachtete schwache Topologie, und es läßt sich zeigen (§ 4, Satz 5), daß sie die schärfste Topologie ist, für die noch gilt, daß eine auf einem linearen Teilraum erklärte, im Sinne der Topologie stetige Linearfunktion stets durch eine Stelle des dualen Raumes erzeugt wird. Sie ist ferner die schärfste Topologie, in der die Abschnitte jeder Stelle gegen die Stelle konvergieren (§ 2, Satz 3). Die zur k -Topologie gehörige Konvergenz liegt zwischen der schwachen und starken Konvergenz und kann auch in den metrischen Räumen von beiden verschieden sein.

Das in K. 2 abgeleitete Auflösungskriterium für lineare Gleichungen mit unendlich vielen Variablen läßt sich ebenfalls verschärfen und auf endgültige Gestalt bringen (§ 4, Satz 6).

A. Weil²⁾ hat den Begriff der Cauchy-Familie in linearen topologischen Räumen eingeführt. Damit kann man einem Raum, der vollständig im üblichen Sinne ist (jede Fundamentalfolge besitzt also einen Limes) ansehen, ob man ihm noch Häufungspunkte hinzufügen kann oder nicht. In § 3 wird

¹⁾ Wir beziehen uns häufig auf folgende Arbeiten: K. T., G. Köthe u. O. Toeplitz, Journ. f. reine angew. Math. 171 (1934), S. 193—226; H., E. Hagemann, Math. Annalen 114 (1937), S. 126—143; K. 1, G. Köthe, ebenda 114 (1937), S. 99—125; K. 2, G. Köthe, Journ. f. reine angew. Math. 178 (1938), S. 193—213; K. 3, G. Köthe, Das Reziprokentheorem für zeilenabsolute Matrizen, erscheint 1939 in den Monatsheften f. Math. u. Phys.

²⁾ Actualités scient. ind., Nr. 551, Sur les espaces à structure uniforme. Paris 1937.

bewiesen, daß die vollkommenen Räume diese topologische Vollständigkeit besitzen, wenn man die k -Topologie zugrunde legt.

Damit und mit dem Erweiterungssatz ist es möglich, ein von E. Hagemann (H., § 4, Satz 2) angegebenes alternatives Reziprokontheorem für unendliche Matrizen in vereinfachter Gestalt zu beweisen (§ 5, Satz 4). Auch ein von F. Riesz³⁾ für die Räume α_r , $r > 1$, bewiesenes doppeltes Reziprokontheorem erweist sich in beliebigen vollkommenen Räumen als gültig (§ 5, Satz 5).

§ 1.

Kompakte Mengen.

λ sei ein vollkommener Raum. Eine Menge M von Stellen aus λ heiße (in λ) schwach bzw. stark kompakt, wenn jede unendliche Teilmenge von M eine schwach bzw. stark konvergente Teilfolge enthält⁴⁾.

Satz 1. *Die normale Hülle einer beschränkten, schwach kompakten Menge ist wieder beschränkt und schwach kompakt.*

Beweis. Die normale Hülle \bar{M} einer Menge M besteht aus allen Stellen $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$, die zu einer Stelle $x = (x_1, x_2, \dots)$ aus M in der Beziehung $|\bar{x}_i| \leq |x_i|$, $i = 1, 2, \dots$, stehen. Nach KT., § 5, Satz 2 ist \bar{M} mit M beschränkt.

Wir nehmen an, M sei außerdem schwach kompakt, aber \bar{M} nicht. Es gibt dann in \bar{M} eine beschränkte Folge $\bar{x}^{(n)}$, aus der keine konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann. $x^{(n)}$ sei eine Folge aus M mit $|\bar{x}_i^{(n)}| \leq |x_i^{(n)}|$. Nach Voraussetzung besitzt $x^{(n)}$ eine schwach konvergente Teilfolge $x^{(n_j)}$. Aus der entsprechenden Folge $\bar{x}^{(n_j)}$ läßt sich nach dem üblichen Diagonalverfahren eine koordinatenweise konvergente Teilfolge $\bar{x}^{(m_k)}$ auswählen. Da sie nicht schwach konvergiert, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und dazu Indizesfolgen $g_k, h_k \rightarrow \infty$ und eine Stelle $u \in \lambda^*$, so daß stets

$$(1) \quad |u(\bar{x}^{(g_k)} - \bar{x}^{(h_k)})| > \varepsilon$$

ist. Wir setzen $\bar{x}^{(r_1)} = \bar{x}^{(r_1)}$. Sei nun N_1 so groß, daß für die $\bar{x}^{(r_1)}$ entsprechende Stelle $x^{(r_1)}$

$$(2) \quad \sum_{N_1+1}^{\infty} |u_i| |x_i^{(r_1)}| \leq \frac{\varepsilon}{10}$$

gilt.

³⁾ Systèmes des équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

⁴⁾ Die Grundbegriffe der Theorie der vollkommenen Räume findet der Leser in KT.

Wir bestimmen nun sukzessive eine Stelle $v = (v_1, v_2, \dots)$ mit $v_i = u_i \varepsilon_i$, $|\varepsilon_i| = 1$. Jede solche Stelle v liegt wegen der Normalität von λ^* in λ^* (vgl. KT., § 3, Satz 4). Wir setzen $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{N_1} = 1$. Wie auch die späteren ε_i bestimmt werden, es gilt jedenfalls nach (2)

$$(3) \quad \sum_{N_1+1}^{\infty} |v_i| |x_i^{(r_1)}| \leq \frac{\varepsilon}{10}.$$

Wegen der koordinatenweisen Konvergenz der Folge $\tilde{x}^{(m)}$ kann ferner in

$$(1) \quad k \text{ so groß genommen werden, daß } \left| \sum_{i=1}^{N_1} u_i (\tilde{x}_i^{(k)} - \tilde{x}_i^{(h)}) \right| < \frac{\varepsilon}{5}, \text{ also}$$

$$\left| \sum_{i=N_1+1}^{\infty} u_i (\tilde{x}_i^{(k)} - \tilde{x}_i^{(h)}) \right| > \frac{4\varepsilon}{5} \text{ ist. Es gibt also ein } r_2 > r_1, \text{ so daß}$$

$$(4) \quad \left| \sum_{i=N_1+1}^{\infty} u_i \tilde{x}_i^{(r_2)} \right| > \frac{4\varepsilon}{10}$$

ist. Sei nun N_2 so groß, daß für das $\tilde{x}^{(r_2)}$ entsprechende $x^{(r_2)}$

$$(5) \quad \sum_{N_2+1}^{\infty} |v_i| |x_i^{(r_2)}| \leq \frac{\varepsilon}{10}$$

gilt. Dann ist aber auch wegen (4)

$$(6) \quad \left| \sum_{N_1+1}^{N_2} u_i \tilde{x}_i^{(r_2)} \right| > \frac{3\varepsilon}{10}.$$

Nun lassen sich $\varepsilon_{N_1+1}, \dots, \varepsilon_{N_2}$ so bestimmen, daß

$$(7) \quad \left| \sum_{i=1}^{N_1} v_i (x_i^{(r_1)} - x_i^{(r_2)}) - \sum_{N_1+1}^{N_2} v_i x_i^{(r_2)} \right| > \frac{3\varepsilon}{10}$$

ist. Zieht man noch (3) und (5) heran, so ergibt sich aus (7)

$$\begin{aligned} |v(x^{(r_1)} - x^{(r_2)})| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} v_i (x_i^{(r_1)} - x_i^{(r_2)}) \right| \\ &\geq \left| \sum_1^{N_1} v_i (x_i^{(r_1)} - x_i^{(r_2)}) - \sum_{N_1+1}^{N_2} v_i x_i^{(r_2)} \right| - \left| \sum_{N_1+1}^{\infty} v_i x_i^{(r_1)} \right| - \left| \sum_{N_2+1}^{\infty} v_i x_i^{(r_2)} \right| \\ &> \frac{3\varepsilon}{10} - \frac{\varepsilon}{10} - \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{10}. \end{aligned}$$

Durch dieselbe Überlegung kann dann $x^{(r_2)}$ so bestimmt werden, daß $|v(x^{(r_2)} - x^{(r_3)})| > \frac{\varepsilon}{10}$ ist usf. Dabei ergeben sich der Reihe nach alle ε_i . Die so erhaltenen Beziehungen

$$(8) \quad |v(x^{(r_i)} - x^{(r_{i+1})})| > \frac{\varepsilon}{10}$$

für ein festes $v \in \lambda^*$ widersprechen aber der vorausgesetzten schwachen Konvergenz der Folge $x^{(r_i)}$, von der die Folge $x^{(r_i)}$ ja Teilfolge ist.

Über das Verhältnis der kompakten zu den begrenzten und beschränkten Mengen eines vollkommenen Raumes geben die folgenden Sätze und Beispiele Auskunft⁵⁾.

Satz 2. *Jede beschränkte, stark kompakte Menge ist begrenzt.*

Beweis. M sei eine beschränkte und stark kompakte, aber nicht begrenzte Menge von Stellen aus λ . Nach der Definition der begrenzten Menge gibt es also in λ^* eine schwach gegen $o = (0, 0, \dots)$ konvergente Folge $u^{(n)}$, so daß $\sup_{x \in M} |xu^{(n)}| > \varepsilon$ bleibt für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$. Also gibt es Stellen $x^{(n)}$ in M , so daß für alle n

$$(9) \quad |x^{(n)} u^{(n)}| > \varepsilon$$

ist. Aus den $x^{(n)}$ läßt sich nach Voraussetzung eine stark konvergente Teilfolge $x^{(n_i)}$ auswählen; ihr Limes sei x . Da die $u^{(n_i)}$ in λ^* eine beschränkte Menge bilden (KT., § 5, Satz 5), ist nach Definition der starken Konvergenz für genügend großes i $|u^{(n_i)}(x - x^{(n_i)})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Andererseits wird auch $|u^{(n_i)} x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für genügend großes i , da $u^{(n)} \rightarrow o$. Beide Ungleichungen zusammen ergeben aber einen Widerspruch zu (9).

Satz 3. *Ist λ stark separabel, so ist jede begrenzte Menge in λ stark kompakt.*

Beweis. M sei eine begrenzte, aber nicht stark kompakte Teilmenge des stark separablen Raumes λ . Es gibt dann in M eine Folge $x^{(n)}$ von Stellen, aus der keine stark konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann. Da die Folge $x^{(n)}$ beschränkt ist (jede begrenzte Menge ist ja beschränkt), kann $x^{(n)}$ als koordinatenweise konvergent angenommen werden. Zu zwei Teilfolgen $x^{(n_i)}, x^{(n_j)}$ gibt es dann eine beschränkte Menge U in λ^* , so daß $\sup_{u \in U} |u(x^{(n_i)} - x^{(n_j)})| > \varepsilon$ bleibt für ein $\varepsilon > 0$. Also gibt es Stellen $u^{(n_i)} \in U$, für die ebenfalls

$$(10) \quad |u^{(n_i)}(x^{(n_i)} - x^{(n_j)})| > \varepsilon$$

gilt. Da λ stark separabel ist, gilt in λ^* der Grenzstellensatz (vgl. K. 1, § 1), die beschränkte Menge U ist also schwach kompakt. Aus den $u^{(n_i)}$ läßt sich daher eine gegen eine Stelle u schwach konvergente Teilfolge $u^{(m_i)}$ auswählen. Die $x^{(m_i)}$ und $x^{(m_j)}$ liegen in der begrenzten Menge M , also liegen auch die Differenzen $x^{(m_i)} - x^{(m_j)}$ in einer begrenzten Menge. Daher ist für genügend großes i

$$(11) \quad |(u - u^{(m_i)})(x^{(m_i)} - x^{(m_j)})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

⁵⁾ Die begrenzten Mengen sind in K. 2, § 1 erklärt.

Da die Abschnitte u_n von u schwach gegen u konvergieren, gibt es aus demselben Grunde ein k , so daß für alle i $|(u - u_k)(x^{(m_i)} - x^{(m'_i)})| < \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Für genügend großes i ist ferner wegen der koordinatenweisen Konvergenz von $x^{(m_i)} - x^{(m'_i)}$ gegen 0 auch $|u_k(x^{(m_i)} - x^{(m'_i)})| < \frac{\varepsilon}{4}$, also

$$(12) \quad |u(x^{(m_i)} - x^{(m'_i)})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(11) und (12) ergeben aber einen Widerspruch gegen (10).

Satz 4. *Jede begrenzte Menge ist schwach kompakt.*

Beweis. M sei eine begrenzte Menge. Es genügt zu zeigen, daß jede koordinatenweise konvergente Folge $x^{(n)}$ aus M schwach konvergent ist, denn mit Hilfe des Diagonalverfahrens kann aus jeder unendlichen Teilmenge von M eine koordinatenweise konvergente Folge ausgewählt werden. Es sei u eine beliebige Stelle aus λ^* . Da die Folge u_k der Abschnitte schwach gegen u konvergiert und M begrenzt ist, wird für gegebenes $\varepsilon > 0$ $\sup_{x \in M} |x(u - u_k)| < \frac{\varepsilon}{4}$ für ein geeignetes k . Speziell ist für jedes n und m

$$(13) \quad |(x^{(n)} - x^{(m)})(u - u_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $x^{(n)}$ koordinatenweise konvergiert, gibt es ein n_0 , so daß für $n, m \geq n_0$

$$(14) \quad |(x^{(n)} - x^{(m)})u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Aus (13) und (14) ergibt sich $|(x^{(n)} - x^{(m)})u| < \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$, d. h. die Folge $x^{(n)}$ ist schwach konvergent.

Im Hilbertschen Raum σ_2 und den Hölder-Rieszschen Räumen σ_r , $r > 1$, ist jede beschränkte Menge schwach kompakt, es gibt aber beschränkte, schwach kompakte Mengen, die nicht stark kompakt sind, z. B. die Menge aller e_i , $i = 1, 2, \dots$. Nach Satz 2 und 3 fallen die begrenzten Mengen mit den beschränkten, stark kompakten zusammen.

Da σ_1 stark separabel ist, fallen wieder begrenzte und beschränkte stark kompakte Mengen zusammen. Da ferner in σ_1 starke und schwache Konvergenz zusammenfallen, sind stark und schwach kompakte Mengen identisch. Es gibt aber beschränkte Mengen, die nicht kompakt sind (wieder die Menge aller e_i). Die begrenzten Mengen in σ_1 wurden in K. 2, § 4 näher bestimmt.

Im dualen Raum $\sigma_1^* = \sigma_\infty$ sind die beschränkten Mengen schwach kompakt, aber nicht stark kompakt. Die begrenzten Mengen fallen hier mit den beschränkten, schwach kompakten Mengen zusammen, aber nicht mit den beschränkten, stark kompakten.

Die konvergenzfreien Räume sind stark separabel, ferner ist in ihnen starke und schwache Konvergenz identisch, also fallen alle vier Klassen von Mengen zusammen.

Neben den Begriff schwach kompakt treten die Begriffe schwach top. kompakt und minimal top. kompakt. Eine Menge heißt schwach (minimal) top. kompakt, wenn jede Teilmenge N eine schwache (minimale) Häufungsstelle in λ besitzt. Sicher ist eine schwach kompakte Menge schwach (minimal) top. kompakt. Andererseits ist auch jede beschränkte, schwach (minimal) top. kompakte Menge schwach kompakt⁶⁾, so daß wir uns für das Folgende mit dem einfachen Begriff schwach kompakt begnügen können.

§ 2.

Die k -Topologie.

Auf die beschränkten, schwach kompakten Mengen des dualen Raumes λ^* läßt sich nach dem Muster von K. 2, § 1 eine Topologie in λ aufbauen.

Definition 1. K sei eine beschränkte, schwach kompakte Menge aus λ^* , $\varepsilon > 0$, x eine Stelle aus λ . Die Gesamtheit aller Stellen η aus λ , die der Ungleichung

$$(x - \eta)_K = \sup_{u \in K} |u(x - \eta)| < \varepsilon$$

genügen, bezeichnen wir als eine k -Umgebung der Stelle x . Die Gesamtheit dieser Umgebungen erzeugt die k -Topologie von λ .

Der Nachweis der Umgebungsaxiome bietet keine Schwierigkeiten (vgl. K. 1, § 5). Aus § 1, Satz 1 folgt wie in K. 2, § 1

Satz 1. K sei eine beschränkte, schwach kompakte Menge aus λ^* . Die Gesamtheit aller Stellen η aus λ , die der Ungleichung

$$[x - \eta]_K = \sup_{u \in K} \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| |x_i - y_i| < \varepsilon$$

genügen, bezeichnen wir als eine normale k -Umgebung von x . Die Gesamtheit aller normalen k -Umgebungen bildet ein zum System aller k -Umgebungen äquivalentes System.

⁶⁾ Sei $x^{(n)}$ eine koordinatenweise konvergente Folge aus einer schwach top. kompakten beschränkten Menge M . Sie hat eine schwache Häufungsstelle $x^{(0)}$. Daher ist $e_i(x^{(0)} - x^{(n)}) \rightarrow 0$ für eine Teilfolge $x^{(n_j)}$, d. h. $x^{(0)}$ ist der koordinatenweise Limes von $x^{(n)}$. Ist nun B eine begrenzte Menge in λ^* , so ist $(x^{(0)} - x^{(n)})_B \rightarrow 0$. Andernfalls wäre für eine Teilfolge $(x^{(m_j)} - x^{(n_j)})_B > \varepsilon > 0$, diese hätte aber wieder die schwache Häufungsstelle $x^{(0)}$, woraus auf $(x^{(0)} - x^{(j)})_B \rightarrow 0$ für eine Teilfolge geschlossen werden könnte. Also ist $x^{(n)} \rightarrow x^{(0)}$, M ist schwach kompakt. — Für beschränkte, minimal top. kompakte Mengen M hat man statt der begrenzten Mengen B die endlichen Mengen aus λ^* zu nehmen. Damit bleibt der Beweis wörtlich derselbe.

Wie verhält sich die k -Topologie zur schwachen und zur starken Topologie von K. 2? Die schwachen Umgebungen $(x - \eta)_M < \varepsilon$ werden durch begrenzte Mengen M , die starken Umgebungen durch beliebige beschränkte Mengen M des dualen Raumes erzeugt.

Jede k -Umgebung ist eine starke Umgebung, da jede beschränkte, schwach kompakte Menge aus λ^* beschränkt ist. Nach § 1, Satz 4 ist ferner jede schwache Umgebung eine k -Umgebung, also gilt: *Die k -Topologie liegt zwischen der schwachen und der starken Topologie.*

In den konvergenzfreien Räumen fallen also alle drei Topologien zusammen. Ist λ stark separabel, so gilt nach K. 1 in λ^* der Grenzstellensatz, d. h. jede beschränkte Menge von λ^* ist schwach kompakt, also fällt die k -Topologie von λ mit der starken Topologie zusammen. Dies ist der Fall in allen σ_r , $r \geq 1$. In σ_∞ jedoch fällt die k -Topologie mit der schwachen Topologie zusammen, denn nach § 1 sind in $\sigma_\infty^* = \sigma_1$ die beschränkten, stark kompakten Mengen mit den begrenzten Mengen identisch.

Ein vollkommener metrischer Raum, in dem alle drei Topologien voneinander verschieden sind, ist der Raum $\sigma_2 + \sigma_\infty$ der Paare (x, y) , $x \in \sigma_2$, $y \in \sigma_\infty$. Denn im dualen Raum $\sigma_2 + \sigma_1$ bilden die linken Hälften der Stellen einer beschränkten, schwach kompakten Menge K eine ebensolche Menge K_1 in σ_2 , d. h. eine beliebige beschränkte Menge in σ_2 , die rechten Hälften jedoch eine beliebige begrenzte Menge K_2 in σ_1 , d. h. die Mengen K bilden eine echte Teilmenge der beschränkten Mengen M von $\sigma_2 + \sigma_1$ (für die auch M_2 beliebig beschränkt ist), enthalten aber andererseits auch nicht begrenzte Mengen aus $\sigma_2 + \sigma_1$, denn in σ_2 ist nicht jede beschränkte Menge begrenzt.

Der Konvergenzbegriff, der zur k -Topologie gehört, die k -Konvergenz von Folgen von Stellen aus λ und der k -Limes einer Folge nimmt entsprechend eine Zwischenstellung zwischen der schwachen und starken Konvergenz ein: In den σ_r , $r \geq 1$, ist eine Folge dann und nur dann k -konvergent, wenn sie stark konvergiert, in σ_∞ dann und nur dann, wenn sie schwach konvergiert, in $\sigma_2 + \sigma_\infty$ liegt genau dann k -Konvergenz vor, wenn die linken Hälften der Stellen stark, die rechten schwach konvergieren.

Die k -Konvergenz von $x^{(n)}$ gegen x werde mit $x^{(n)} \xrightarrow{k} x$ bezeichnet.

Jeder vollkommene Raum λ ist k -vollständig, d. h. jede k -konvergente Folge besitzt in λ einen k -Limes. Der Beweis ist wie in K.T., § 5 für die starke Vollständigkeit zu führen.

Wie für die schwache Konvergenz (K.T., § 3, Satz 1) gilt auch für die k -Konvergenz

Satz 2. *Die Abschnitte x_n einer Stelle x sind k -konvergent gegen x .*

Beweis. Es muß gezeigt werden, daß zu jeder beschränkten, schwach kompakten Menge K aus λ^* und jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß

$(x - x_n)_K < \varepsilon$ wird für $n \geq n_0$. Nach § 1, Satz 1 kann K als normal angenommen werden. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es Zahlen $n_i \rightarrow \infty$, ein normales K und ein $\varepsilon > 0$, so daß $(x - x_{n_i})_K > \varepsilon$ ist für alle i . Also gibt es auch Stellen $u^{(i)}$ in K mit

$$(15) \quad |u^{(i)}(x - x_{n_i})| > \varepsilon.$$

Wegen der Normalität von K liegen auch die Stellen $v^{(i)}$ in K , die durch Nullsetzen der ersten n_i Koordinaten aus den $u^{(i)}$ entstehen. (15) wird zu

$$(16) \quad |v^{(i)}(x - x_{n_i})| = |v^{(i)}x| > \varepsilon.$$

Die Folge $v^{(i)} \varepsilon K$ geht koordinatenweise gegen Null, die wegen der schwachen Kompaktheit von K existierende schwach konvergente Teilfolge $v^{(j)}$ hat also den schwachen Limes 0, es geht daher $v^{(j)}x \rightarrow 0$ im Widerspruch zu (16).

Satz 3. Ist M eine beschränkte Menge aus λ^* und gilt $(x - x_n)_M \rightarrow 0$ für jedes x aus λ , so ist M schwach kompakt.

Beweis. M sei beschränkt, aber nicht schwach kompakt. Dann läßt sich in M eine koordinatenweise konvergente Folge $u^{(n)}$ bestimmen, die nicht schwach konvergent ist. Es gibt also ein x in λ , ein $\varepsilon > 0$ und Zahlen $n_i, m_i \rightarrow \infty$, so daß

$$(17) \quad |(u^{(n_i)} - u^{(m_i)})x| > \varepsilon$$

bleibt für alle i . n sei gegeben; wegen der koordinatenweisen Konvergenz von $u^{(i)}$ kann dann m_0 so groß gemacht werden, daß für $n_i, m_i \geq m_0$

$$(18) \quad |(u^{(n_i)} - u^{(m_i)})x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. (17) und (18) ergeben $|(u^{(n_i)} - u^{(m_i)})'(x - x_n)| > \frac{\varepsilon}{2}$, also da $u^{(n_i)}, u^{(m_i)}$ in M liegen,

$$(19) \quad (x - x_n)_M > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Da dies für alle n gilt, geht $(x - x_n)_M$ nicht gegen Null.

Satz 3 zeigt, daß die k -Topologie die engste, durch beschränkte Mengen aus λ^* erzeugte Topologie ist, in der die Abschnitte jeder Stelle gegen die Stelle konvergieren.

Wie im Falle der schwachen und starken Topologie hat man zwischen k -Limes und k -Häufungsstelle zu unterscheiden (vgl. K.1, § 5). Eine Menge M heißt k -abgeschlossen, wenn sie mit einer k -konvergenten Folge stets deren k -Limes enthält. M heißt k -top. abgeschlossen, wenn sie mit einer Menge N jede k -Häufungsstelle von N enthält.

§ 3.

Die topologische Vollständigkeit.

Wir folgen einer Arbeit von A. Weil²⁾.

Definition 1. Eine Gesamtheit von Mengen M_α von Stellen eines vollkommenen Raumes λ heiße eine *Cauchy-Familie* (C.-F.), wenn je endlich viele dieser Mengen einen von Null verschiedenen Durchschnitt haben und wenn es zu jeder k -Umgebung $U(o)$ eine Menge M_α gibt mit $x - y \in U(o)$ für alle x, y aus M_α .

Ist $x^{(n)}$ eine k -konvergente Folge, so bilden die Mengen $M_i = \{x^{(i)}, x^{(i+1)}, \dots\}$ eine C.-F.

Satz 1. Es gibt höchstens eine Stelle $x^{(0)}$, die k -Häufungsstelle aller M_α einer C.-F. ist.

Beweis. Sind $x^{(0)}$ und $x^{(1)}$ zwei verschiedene Stellen aus λ , so gibt es eine Stelle $u \in \lambda^*$ mit

$$(20) \quad |u(x^{(0)} - x^{(1)})| > 1.$$

Die der Ungleichung $|ux| < \frac{1}{2}$ genügenden Stellen $x \in \lambda$ bilden eine k -Umgebung $U(o)$. Dazu gehört ein M_α der gegebenen C.-F. mit

$$(21) \quad |u(x - y)| < \frac{1}{2}$$

für alle $x, y \in M_\alpha$. Wären nun $x^{(0)}$ und $x^{(1)}$ k -Hufungsstellen von M_α , so gäbe es ein x und ein y in M_α mit

$$(22) \quad |u(x^{(0)} - x)| < \frac{1}{2}, \quad |u(x^{(1)} - y)| < \frac{1}{2}.$$

Aus (21) und (22) würde dann

$$|u(x^{(0)} - x^{(1)})| = |u[(x^{(0)} - x) - (x^{(1)} - y) + (x - y)]| < 1$$

im Widerspruch zu (20) folgen.

Definition 2. Ist $x^{(0)}$ k -Häufungsstelle aller M_α einer C.-F., so heiße $x^{(0)}$ die k -Häufungsstelle der C.-F. Ein vollkommener Raum, in dem jede C.-F. eine k -Häufungsstelle besitzt, heiße *k -top. vollständig*.

Satz 2. Jeder vollkommene Raum ist k -top. vollstandig⁷⁾.

Beweis. Sei $\{M_\alpha\}$ eine C.-F. im vollkommenen Raum λ . $M_\alpha^{(n)}$ sei die Menge der n -ten Abschnitte der Stellen aus M_α . Für festes n bilden die $M_\alpha^{(n)}$ eine C.-F. von Punkten im komplexen R_n . Diese hat genau einen Punkt

⁷⁾ Dieser Satz gilt mit demselben Beweis auch für die schwache und die starke Topologie. Für die in K. I eingeführte minimale Topologie gilt jedoch: Jeder vollkommene Raum $\lambda \neq \omega$ ist nicht minimal top. vollständig. Für $\lambda = \sigma_2$ ist dies bei G. Birkhoff, *Annals of Math. II. ser.*, 38 (1937), S. 39–56, bewiesen. Nach dem Muster dieses Beweises läßt sich leicht allgemein zeigen, daß erst der Raum aller (auch der nichtstetigen) Linearfunktionen auf λ^* die minimal topologisch vollständige Hülle von λ ist. ω ist minimal top. vollständig.

$(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ als Häufungspunkt. Ist $m > n$, so hat der zugehörige Häufungspunkt ebenfalls die ersten n Koordinaten $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. Wir setzen $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots)$.

Es sei nun K eine schwach kompakte beschränkte Menge in λ^* . Es gibt nach § 2, Satz 1 ein M_β , so daß für alle $x, y \in M_\beta$ $\sup_{u \in K} \sum_1^\infty |u_i| |x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, erst recht gilt also

$$(23) \quad \sup_{u \in K} \sum_1^n |u_i| |x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach dem obigen Schluß gibt es Stellen $x \in M_\beta$, deren n -te Abschnitte den n -ten Abschnitt von $x^{(0)}$ beliebig gut approximieren. Also gilt

$$(24) \quad \sup_{u \in K} \sum_1^n |u_i| |x_i^{(0)} - y_i| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

für alle $y \in M_\beta$. Da dies für alle n gilt, folgt daraus

$$(25) \quad \sup_{u \in K} \sum_1^\infty |u_i| |x_i^{(0)} - y_i| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Damit ist für jedes $u \in \lambda^*$ bewiesen, daß

$$\sum_1^\infty |u_i| |x_i^{(0)}| \leq \sum_1^\infty |u_i| |x_i^{(0)} - y_i| + \sum_1^\infty |u_i| |y_i| < \infty$$

ist, $x^{(0)}$ liegt also in λ . (25) besagt dann weiter, daß in der Umgebung $(x^{(0)} - \eta)_K < \varepsilon$ für geeignetes M_β jedes y aus M_β liegt, also auch ein Element jedes M_α , d. h. $x^{(0)}$ ist k -Häufungsstelle jedes M_α .

Satz 3. Eine Menge M von Elementen eines vollkommenen Raumes λ ist dann und nur dann k -top. abgeschlossen, wenn die k -Häufungsstelle jeder nur aus Elementen von M gebildeten C.-F. M angehört.

Beweis. a) Ist $x^{(0)}$ k -Häufungsstelle der Menge M , so bilden wir zu jeder Umgebung $U(x^{(0)})$ die Menge M_U aller $y \in M$ mit $y \in U(x^{(0)})$. Die M_U bilden eine C.-F. mit der k -Häufungsstelle $x^{(0)}$.

b) Ist $\{M_\alpha\}$ eine C.-F. von Elementen aus M mit der k -Häufungsstelle $x^{(0)}$, so ist $x^{(0)}$ bereits k -Häufungsstelle von M_1 .

§ 4.

Erweiterung von Linearfunktionen.

Eine auf einem linearen Teilraum μ von λ erklärte Linearfunktion $u(x)$ heißt k -stetig in μ , wenn aus $x^{(n)} \xrightarrow{k} x$ stets $u(x^{(n)}) \rightarrow u(x)$ folgt. Sie heißt k -top. stetig in μ , wenn es zu jedem x aus μ und jedem $\varepsilon > 0$ eine k -Umgebung von x gibt, so daß $|u(x) - u(\eta)| < \varepsilon$ ist für alle η aus μ , die der Umgebung angehören.

Wie in K. 2, § 2 beweist man

Satz 1. $u(x)$ ist auf μ dann und nur dann k -top. stetig, wenn es eine beschränkte, schwach kompakte Menge K in λ^* gibt, so daß für alle x aus μ

$$|u(x)| \leq (x)_K$$

gilt.

Satz 2. Jede auf dem ganzen vollkommenen Raum λ erklärte k -stetige bzw. k -top. stetige Linearfunktion wird durch eine Stelle des dualen Raumes λ^* erzeugt.

Beweis. Es genügt, dies für k -stetige Linearfunktionen zu zeigen, da jede k -top. stetige Linearfunktion k -stetig ist. Mit der in § 2 bewiesenen k -Konvergenz der Abschnitte kann man aber den Beweis von KT., § 3, Satz 6 ohne weiteres auf unseren Fall übertragen.

Satz 3 (Erweiterungssatz). Jede auf einem linearen Teilraum μ des vollkommenen Raumes λ erklärte k -top. stetige Linearfunktion $u(x)$ läßt sich durch eine Stelle u aus λ^* erzeugen, $u(x) = ux$. u kann so gewählt werden, daß eine auf μ geltende Beziehung

$$(26) \quad |u(x)| \leq (x)_K,$$

K beschränkt und schwach kompakt in λ^* , auch für die erweiterte Linearfunktion ux gültig bleibt.

Beweis. Nach Satz 1 erfüllt $u(x)$ eine Beziehung (26). Nach K. 2, § 3, Satz 2 kann $u(x)$ auf ganz λ so erweitert werden, daß (26) gilt. Die so erweiterte Linearfunktion wird nach Satz 2 durch eine Stelle u aus λ^* erzeugt.

Dies ist eine Verschärfung des schwachen Erweiterungssatzes aus K. 2. Auch der starke Erweiterungssatz ist zum Teil darin enthalten, denn ist λ stark separabel, so ist nach § 2 die k -Topologie mit der starken Topologie identisch; dann läßt sich also sogar jede stark top. stetige Linearfunktion durch eine Stelle aus λ^* erzeugen.

Ohne weiteres läßt sich auch K. 2, § 5 übertragen und ergibt

Satz 4 (Orthogonalraumsatz). Ein k -top. abgeschlossener Teilraum eines vollkommenen Raumes ist stets orthogonalabgeschlossen und umgekehrt.

Dieser Satz enthält den schwachen und den starken Orthogonalraumsatz aus K. 2, § 5.

Satz 5. Ist M eine beschränkte, nicht schwach kompakte Teilmenge von λ^* , so gibt es in λ einen Teilraum μ , auf dem sich eine Linearfunktion $u(x)$ erklären läßt, die der Bedingung $|u(x)| \leq (x)_M$ genügt, aber nicht durch eine Stelle aus λ^* erzeugt werden kann.

Beweis. Ist M beschränkt und nicht schwach kompakt, so gibt es nach § 2, Satz 3 in λ ein x , so daß (19) gilt. (19) ist aber der Formel (1) von K. 2, § 8 äquivalent; der Beweis von Satz 1 aus K. 2, § 8 läßt sich damit wörtlich durchführen und so die Behauptung unseres Satzes beweisen.

Damit ist gezeigt, daß die k -Topologie auch wirklich die engste Topologie ist, für die der Erweiterungssatz noch richtig ist. Auch für die starke Topologie kann, wie in K. 2 bewiesen wurde, jede stark top. stetige Linearfunktion von einem Teilraum auf den ganzen Raum erweitert werden, doch braucht sie nicht mehr durch eine Stelle aus λ^* darstellbar zu sein.

Wie in K. 2, § 6 ergibt sich jetzt

Satz 6 (Auflösungskriterium). \mathfrak{A} bilde den vollkommenen Raum λ auf einen Teilraum des vollkommenen Raumes μ ab, c sei eine Stelle aus μ . Die Gleichung

$$(27) \quad \mathfrak{A}x = c$$

ist dann und nur dann durch ein $x \in \lambda$ lösbar, wenn durch

$$x(\mathfrak{A}'v) = vc, \quad v \in \mu^*,$$

auf ganz $\mathfrak{A}'(\mu^*)$ eine im Sinne von λ^* k -top. stetige Linearfunktion eindeutig erklärt ist, d. h. wenn es in λ eine beschränkte, schwach kompakte Menge K gibt, so daß für alle v aus μ^*

$$(28) \quad |vc| \leq (\mathfrak{A}'v)_K$$

gilt.

Dieses Kriterium enthält Satz 1 und Satz 2 von K. 2, § 6, und man zeigt wie in K. 2, § 9, daß es in jedem vollkommenen Raum λ zu jeder beschränkten, nicht schwach kompakten Menge K eine Matrix \mathfrak{A} gibt, die λ in sich abbildet, und eine Stelle $c \in \lambda$, so daß die Gleichung (27) unlösbar ist, obwohl (28) erfüllt ist.

§ 5.

Nach unten beschränkte Matrizen.

Eine lineare Abbildung A eines vollkommenen Raumes λ in einen vollkommenen Raum μ (d. h. auf einen Teilraum von μ) heißt k -stetig, wenn aus $x^{(n)} \xrightarrow{k} x$ stets $A(x^{(n)}) \xrightarrow{k} A(x)$ folgt, k -top. stetig, wenn es zu jeder k -Umgebung $U(o)$ in μ eine k -Umgebung $V(o)$ in λ gibt, die in $U(o)$ abgebildet wird.

Satz 1. Eine Matrix \mathfrak{A} , die den vollkommenen Raum λ in den vollkommenen Raum μ abbildet, vermittelt eine k -top. stetige Abbildung. Umgekehrt wird bereits jede k -stetige lineare Abbildung von λ in μ durch eine Matrix erzeugt. \mathfrak{A} führt ferner jede beschränkte, schwach kompakte Menge in eine ebensolche über.

Beweis. Nach K. 2., § 8, Satz 2 gilt für $x \in \lambda$, $v \in \mu^*$ stets $v(\mathfrak{A}x) = (v\mathfrak{A})x$ und die Abbildung $x \rightarrow \mathfrak{A}x$ ist stetig im Sinne der schwachen Konvergenz. \mathfrak{A} führt jede beschränkte Menge M in eine ebensolche M' über, denn ist $|ux| \leq k(u)$ für jedes $x \in M$ und $u \in \lambda^*$, so ist $|v(\mathfrak{A}x)| = |(v\mathfrak{A})x| \leq k(v\mathfrak{A})$ für jedes $v \in \mu^*$.

Sei ferner M schwach kompakt. Durchläuft \mathfrak{A}_3 eine Teilmenge von M' , so läßt sich aus den 3 eine schwach konvergente Teilfolge $3^{(n)}$ auswählen, deren Bildfolge $\mathfrak{A}_3^{(n)}$ wieder schwach konvergent ist. Also ist M' ebenfalls schwach kompakt.

Ist weiter K eine beschränkte, schwach kompakte Menge von Stellen v aus μ^* und $(\eta)_K < \varepsilon$ die dazugehörige k -Umgebung von v in μ , so ist die Umgebung $(x)_{K'} < \varepsilon$ in λ , K' die Bildmenge von K bei der Abbildung \mathfrak{A}' , nach dem vorigen eine k -Umgebung von v . Die Bildstellen $\mathfrak{A}x$ der Stellen aus $(x)_{K'} < \varepsilon$ liegen offenbar in $(\eta)_K < \varepsilon$; \mathfrak{A} ist also k -top. stetig.

Ist schließlich eine k -stetige lineare Abbildung gegeben, so schließt man mit Hilfe von § 2, Satz 2 wie in KT., § 6, Satz 7, daß diese Abbildung durch eine Matrix erzeugt wird.

Eine Matrix \mathfrak{A} , die λ in μ überführt, heißt *intakt*, wenn sie eine schwache Homöomorphie, d. h. eine eineindeutige, umkehrbar schwach stetige Abbildung von ganz λ auf ganz μ erzeugt. Gleichbedeutend damit ist nach KT., § 8, daß \mathfrak{A} eine eindeutige linke und rechte Reziproke besitzt. Als k -Homöomorphie werde eine eineindeutige, umkehrbar k -stetige Abbildung von λ auf ganz μ bezeichnet. Nach Satz 1 sind Homöomorphie und k -Homöomorphie äquivalent, die Intaktheit von \mathfrak{A} kann also auch durch die k -Homöomorphie erklärt werden.

Definition 1. Eine Matrix \mathfrak{A} , die den vollkommenen Raum λ in den vollkommenen Raum μ abbildet, heiße *k -top. nach unten beschränkt* (n. u. b.), wenn die durch sie erzeugte Abbildung *eindeutig und umkehrbar stetig im Sinne der k -Topologie* ist.

Nach Satz 1 ist \mathfrak{A} k -top. n. u. b., wenn es zu jeder k -Umgebung $U(v)$ in λ eine k -Umgebung $V(v)$ in μ gibt, so daß x für alle $\mathfrak{A}x$ aus $V(v)$ stets in $U(v)$ liegt.

Satz 2. Ist \mathfrak{A} k -top. n. u. b., so ist der Bildraum $\mathfrak{A}(\lambda)$ von \mathfrak{A} k -top. abgeschlossen.

Beweis. Nach § 3, Satz 3 genügt es zu zeigen, daß die k -Häufungsstelle $3^{(n)}$ einer C.-F. von Mengen $\{M_\alpha\}$ von Stellen $\mathfrak{A}x$ selbst die Gestalt $\mathfrak{A}x^{(n)}$ hat. Sei M_α^* die Menge der Urbilder x der Stellen $\mathfrak{A}x \in M_\alpha$. Da \mathfrak{A} k -top. n. u. b. ist, bilden die M_α^* eine C.-F. in λ . Diese besitzt nach § 3, Satz 2 aber eine k -Häufungsstelle $x^{(n)}$. $\mathfrak{A}x^{(n)}$ ist dann wegen der k -top. Stetigkeit von \mathfrak{A} (Satz 1) k -Häufungsstelle aller M_α , also Häufungsstelle der C.-F. $\{M_\alpha\}$.

Satz 3. Ist \mathfrak{A} k -top. n. u. b., so ist $\mathfrak{A}'(\mu^*) = \lambda^*$, d. h. die Gleichung $v\mathfrak{A} = u$ ist für jedes $u \in \lambda^*$ durch ein $v \in \mu^*$ lösbar.

Dies läßt sich mit Hilfe von § 4, Satz 6 ganz nach dem Muster von K. 3, § 2, Satz 4 beweisen. Die Umkehrung von Satz 3 gilt für stark separable

metrische Räume⁸⁾, für beliebige vollkommene Räume ist dies aber noch ungeklärt.

Satz 4 (Alternatives Reziprokentheorem). \mathfrak{A} bilde den vollkommenen Raum λ in den vollkommenen Raum μ ab. Ist \mathfrak{A} k -top. n. u. b., so gilt: Entweder ist \mathfrak{A} intakt oder das transponierte homogene Gleichungssystem $v\mathfrak{A} = 0$ ist in μ^* lösbar.

Beweis. Sei \mathfrak{A} k -top. n. u. b. $\chi = \mathfrak{A}(\lambda)$ ist nach Satz 2 k -top. abgeschlossen. Ist $v\mathfrak{A} = 0$ unlösbar, so ist der Orthogonalraum $\bar{\chi}$ von χ gleich (0) . Nach dem Orthogonalraumsatz (§ 4, Satz 4) ist also $\chi = \bar{\bar{\chi}} = \mu$. Ferner ist nach Satz 3 $\mathfrak{A}'(\mu^*) = \lambda^*$. Nach H., § 4, Satz 3⁹⁾ ist dann \mathfrak{A} intakt.

Satz 5 (Doppeltes Reziprokentheorem). \mathfrak{A} bilde den vollkommenen Raum λ in den vollkommenen Raum μ ab. \mathfrak{A} ist dann und nur dann intakt, wenn \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' k -top. n. u. b. sind.

Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar. Nach Satz 3 folgt andererseits, daß $\mathfrak{A}(\lambda) = \mu$, $\mathfrak{A}'(\mu^*) = \lambda^*$ ist, wenn \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' k -top. n. u. b. sind. H., § 4, Satz 3 ergibt wieder die Behauptung.

⁸⁾ Vgl. S. Kaczmarz u. H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen (Monografie Matematyczne VI), Warschau-Lwów 1935, S. 33ff.

⁹⁾ Dieser Satz ist bei H. nur für Abbildungen \mathfrak{A} von λ in sich bewiesen, gilt aber wörtlich auch für den allgemeinen Fall.

Eine Bemerkung zu den verschiedenen Möglichkeiten, eine Zahl in einen Kettenbruch zu entwickeln*).

Von

Ott-Heinrich Keller in Berlin.

Eine irrationale Zahl ω läßt sich auf unendlich viele Weisen in einen Kettenbruch entwickeln. Es entsteht das Bedürfnis, Übersicht über diese Fülle zu gewinnen. Tietze¹⁾ hat uns einen Maßstab gegeben, *rascher* und *langsamer* konvergierende Kettenbrüche zu unterscheiden. Vor allem sind die Kettenbrüche bemerkenswert, die in seinem Sinne am raschesten konvergieren (§ 1). Zu ihnen gehören die beiden Hurwitzschen Kettenbrüche²⁾.

Andererseits hat Minkowski³⁾ eine bestimmte Kettenbruchentwicklung untersucht, deren sämtliche Näherungsbrüche möglichst *gute Annäherungen* an die dargestellte Zahl sind; er nannte sie den *Diagonalkettenbruch*. Tietze hat durch Beispiele gezeigt, daß er im allgemeinen nicht am raschesten konvergiert. Nun kann man aber durch gewisse Transformationen aus dem Diagonalkettenbruch noch weitere Kettenbrüche erhalten, deren Näherungsbrüche denselben scharfen Anforderungen hinsichtlich Annäherung der dargestellten Zahl genügen, wie der Diagonalkettenbruch (§ 2). Solche Kettenbrüche wollen wir *engste* Kettenbrüche nennen. (Sie schmiegen sich besonders eng an die dargestellte Zahl an.) Die raschesten Kettenbrüche sind im allgemeinen keine engsten, auch die Hurwitzschen nicht.

Es gibt zu einer Zahl ω im allgemeinen unendlich viele rascheste und unendlich viele engste Kettenbrüche. Die vorliegende Arbeit soll sich mit der Frage beschäftigen, ob es nicht zu jeder Zahl ω Kettenbrüche gibt, die *zugleich* rascheste und engste sind. Diese Frage ist zu bejahen (§ 4), und zwar gibt es im allgemeinen wieder unendlich viele Kettenbrüche mit beiden Eigenschaften.

In § 3 soll einiges über Diagonalkettenbrüche gesagt werden, u. a. soll neu bewiesen werden, daß die Diagonalkettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalität periodisch ist.

*) Herrn Prof. Dr. C. L. Siegel zum 40. Geburtstag.

1) Mh. Math. Phys. 24 (1913), S. 209.

2) Acta math. 12 (1889), S. 367, Werke II, S. 84.

3) Math. Annalen 54 (1901), S. 91, Werke I, S. 320.

Bezeichnungen.

Zum Vergleich seien ein für allemal nur *halbregelmäßige* Kettenbrüche zugelassen, d. h. Kettenbrüche der Form

$$\varepsilon_0 a_0 + \frac{\varepsilon_1}{a_1 + \frac{\varepsilon_2}{a_2 \dots}}$$

wobei die Teilnenner a_i ganze positive Zahlen, die Teilzähler $\varepsilon_i = \pm 1$ und die Teilreste kleiner sind als 1.

(Die Zusammenstellung

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\dots}}$$

sei also verboten.)

Gelegentlich wollen wir auch die Schreibweise

$$\left(\frac{\varepsilon_0}{a_0}, \frac{\varepsilon_1}{a_1}, \frac{\varepsilon_2}{a_2}, \dots \right)$$

verwenden. Perioden seien durch einen darübergezogenen Querstrich angedeutet.

Bricht man den Kettenbruch mit a_n ab, so erhält man den n -ten *Näherungsbruch* $\frac{p_n}{q_n}$. Für das Folgende empfiehlt sich die Ausdrucksweise, er sei in dem in Rede stehenden Kettenbruch *enthalten* und *gehöre* zu dem ersten weggelassenen Teilnenner a_{n+1} .

Der wichtigste Kettenbruch ist der *gewöhnliche*, dessen Teilzähler sämtlich $+1$ sind. Seine Teilnenner wollen wir mit g_n , ihre Folge mit F bezeichnen. Die Zahl ω denken wir uns durch ihren gewöhnlichen Kettenbruch gegeben.

§ 1.

Rascheste Kettenbrüche.

Wir wollen hier die für uns wichtigen Ergebnisse der Tietzeschen Arbeit zusammenstellen.

Um sagen zu können, ein Kettenbruch konvergiere rascher als ein anderer, müssen wir ein Geschwindigkeitsmaß haben. Dieses liefert uns der Kettenbruch von Vahlen⁴⁾, der dadurch eindeutig bestimmt ist, daß seine sämtlichen Teilreste nicht kleiner sind als $\frac{1}{2}$. Sämtliche Näherungsbrüche aller halbregelmäßigen Kettenbrüche für ω sind in dem Vahlenschen Kettenbruch enthalten. Der Index, den ein Näherungsbruch im Vahlenschen Kettenbruch trägt, heiße seine Ordnungszahl.

Stellen zwei Kettenbrüche K_1 und K_2 dieselbe Zahl ω dar und sind die Ordnungszahlen aller Näherungsbrüche von K_1 von einer bestimmten Stelle

⁴⁾ Journ. f. Math. 115 (1895), S. 221.

an größer als die Ordnungszahlen der Näherungsbrüche von K_2 mit demselben Index, so heiße K_1 *rascher* als K_2 .

In diesem Sinne gibt es für jedes ω rascheste und langsamste Kettenbrüche. Der langsamste ist der Vahlensche. Denn jeder andere Kettenbruch läßt mindestens einen Näherungsbruch des Vahlenschen aus; von dieser Stelle an sind die Indizes seiner Näherungsbrüche kleiner als ihre Ordnungszahlen.

Ein Kettenbruch ist nach Tietze dann und nur dann ein raschester, wenn alle Teilreste kleiner sind als $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. — Für eine Zahl ω gibt es im allgemeinen mehrere, ja sogar unendlich viele rascheste Kettenbrüche. — Sie unterscheiden sich vom gewöhnlichen Kettenbruch höchstens dort, wo die Teilnenner 1 oder 2 sind. Die Umrechnung geschieht mit Hilfe der Identitäten:

$$(1) \quad a_n + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{n+1} + \dots}} = a_n + 1 - \frac{1}{a_{n+2} + 1 + \dots},$$

$$(2) \quad a_n + \frac{1}{2 + \frac{1}{a_{n+2} + \dots}} = a_n + 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{a_{n+2} + 1 + \dots}}.$$

Nach Anwendung von (1) sind die Näherungsbrüche des neuen Kettenbruches dieselben wie die des alten; nur der zu $a_{n+1} = 1$ gehörige Näherungsbruch ist im neuen Kettenbruch nicht mehr enthalten, und es ist auch kein anderer Bruch an seine Stelle getreten. Wir sagen, wir haben diesen Näherungsbruch *gelöscht*. Durch das Löschen werden die Indizes der späteren Näherungsbrüche um 1 verkleinert; jeder Index $i > n$ wird jetzt von einem Näherungsbruch von höherer Ordnungszahl getragen als vorher. Durch das Löschen eines Näherungsbruches wird also der Kettenbruch rascher gemacht. In einem raschesten Kettenbruch darf sich kein Näherungsbruch mehr löschen lassen; es darf daher kein Teilnenner gleich 1 sein. Wir haben jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Steht in F eine *ungerade* Anzahl $2\nu + 1$ von 1-en unmittelbar hintereinander, so sind die zur 1-ten, 3-ten, ..., $(2\nu + 1)$ -ten 1 gehörigen Näherungsbrüche zu löschen, wenn man einen kürzesten Kettenbruch aufstellen will.

2. Steht in F eine *gerade* Anzahl 2ν von 1-en unmittelbar hintereinander, so hat man sich eine Zahl ϱ mit $0 \leq \varrho \leq \nu$ zu wählen und den zur 1-ten, 3-ten, ..., $(2\varrho - 1)$ -ten, $(2\varrho + 2)$ -ten, ..., 2ν -ten 1 gehörigen Näherungsbruch zu löschen, wenn man einen raschesten Kettenbruch aufstellen will. (Aussagen über die (-1) -te 1 und vorhergehende 1-en oder die $(2\nu + 2)$ -te 1 und folgende 1-en bedeuten dabei nichts.) Durch verschiedene Wahl von ϱ können wir dabei zu $\nu + 1$ verschiedenen raschesten Kettenbrüchen gelangen.

Durch Anwendung der Identität (2) kommt man zu einem ebenso raschen Kettenbruch. Es tritt dabei ein neuer Näherungsbruch auf, der in dem gewöhnlichen Kettenbruch nicht enthalten war. Wenn es nur darauf ankommt, zu irgendeinem raschesten Kettenbruch zu gelangen, reichen also Umformungen mit Hilfe von (1) aus. Liegt dann dieser eine rascheste Kettenbruch vor, so hat man zur Gewinnung anderer raschester Kettenbrüche bei jedem Teilnenner 2 die Wahl, die Identität (2) anzuwenden oder nicht. Es wird sich übrigens zeigen (§ 4), daß wir für unsere Zwecke diese Wahl immer gegen die Anwendung von (2) treffen müssen.

§ 2.

Engste Kettenbrüche.

Wir wollen uns nun darüber klar werden, was wir unter Kettenbrüchen verstehen wollen, deren sämtliche Näherungsbrüche die dargestellte Zahl möglichst gut annähern. Als ein Maß für die Güte der Annäherung von ω durch den Bruch $\frac{p}{q}$, als „Annäherungsmaß“, wollen wir die Zahl λ ansehen, die durch $\left| \frac{p}{q} - \omega \right| = \frac{1}{\lambda q^2}$ bestimmt ist. Ein Kettenbruch habe die Enge λ , wenn sämtliche Näherungsbrüche mindestens das Annäherungsmaß λ haben. Grace⁵⁾ hat gezeigt, daß es zu jeder Zahl ω einen Kettenbruch der Enge 2 gibt, aber nicht zu jeder Zahl einen Kettenbruch einer vorgeschriebenen Enge $\lambda > 2$. Die Enge 2 ist das äußerste, was man allgemein fordern darf. Einen Kettenbruch der Enge 2 wollen wir einen *engsten* Kettenbruch nennen.

Wir wollen einen Bruch einen *Engwert* für die Zahl ω nennen, wenn sein Annäherungsmaß mindestens 2 ist, wenn er also als Näherungsbruch eines engsten Kettenbruches in Frage kommt.

Über das Verhältnis der engsten Kettenbrüche zum Diagonalkettenbruch soll im nächsten Paragraphen noch ein Wort gesagt werden.

Wenn wir feststellen wollen, ob der zu einem bestimmten Teilnenner gehörige Näherungsbruch ein Engwert ist oder nicht, müssen wir ihn zunächst ausrechnen, was um so mühsamer wird, je größer der Index ist. Dann müssen wir ihn mit ω vergleichen. Da die Differenz rasch sehr klein wird, müssen wir sehr genau rechnen, z. B. wird man bei quadratischen Irrationalitäten die Norm bilden und exakt rechnen. Diese Rechenvorschrift ist so unhandlich, daß wir bei den späteren Beweisen damit nicht durchkommen würden und uns daher nach Regeln umsehen müssen, die uns gestatten, aus der Folge der Teilnenner unmittelbar abzulesen, wo ein Engwert zu erwarten

⁵⁾ Proc. London Math. Soc. (2) 17 (1919), S. 247.

ist und wo nicht. Das wesentliche Hilfsmittel ist dazu die Formel von Grace:
Das Annäherungsmaß von $\frac{p_n}{q_n}$ ist

$$(3) \quad \lambda_n = a_{n+1} + \frac{e_{n+2}}{a_{n+2} + \frac{e_{n+3}}{a_{n+3} + \dots}} + \frac{e_{n+1}}{a_n + \frac{e_n}{a_{n-1} + \dots \frac{e_2}{a_1}}}$$

Diese Formel wenden wir auf den zu g_{n+1} gehörigen Näherungsbruch des gewöhnlichen Kettenbruchs an.

1. Ist g_{n+1} von 1 verschieden, so ist $\lambda_n > 2$. Überall, wo der nächste Teilnenner nicht 1 ist, ist der Näherungsbruch ein Engwert.

2. Es sei $g_{n+1} = 1$.

2a. Diese 1 stehe in F für sich, also $g_n \geq 2$ und $g_{n+2} \geq 2$. Da ω irrational ist, bricht der erste von den beiden Kettenbrüchen in (3) nicht ab und ist kleiner als $\frac{1}{2}$, und der zweite ist höchstens $\frac{1}{2}$; also ist $\lambda_n < 2$. Der zugehörige Näherungsbruch ist dann kein Engwert⁶⁾.

2b. Die 1 stehe in F zwischen zwei anderen 1-en: $g_n = g_{n+1} = g_{n+2} = 1$. Dann sind die beiden Kettenbrüche in (3) größer als $\frac{1}{2}$, und $\lambda_n > 2$. Der zugehörige Näherungsbruch ist dann ein Engwert.

2c. Die 1 stehe in F am Anfang einer Reihe von 1-en; dann benutzen wir die Identität

$$g_n + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{g_{n+3} + \dots}}} = g_n + \frac{1}{2 - \frac{1}{(g_{n+3} + 1) + \dots}}$$

Dann wird

$$\lambda_n = 2 - \frac{1}{g_{n+3} + 1 + \dots} + \frac{1}{g_n + \frac{1}{g_{n-1} + \dots}}$$

und $\lambda_n \geq 2$, je nachdem

$$(g_{n+3} + 1) + \frac{1}{g_{n+4} + \dots} \leq g_n + \frac{1}{g_{n-1} + \dots} \quad 7).$$

⁶⁾ In dem rationalen Kettenbruch $\frac{8}{3} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$ ist hingegen $\frac{1}{2}$ sehr wohl

ein Engwert.

⁷⁾ Es ist immer leicht zu entscheiden, welcher von zwei gewöhnlichen Kettenbrüchen

$$K_1 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots} \quad \text{und} \quad K_2 = b_0 + \frac{1}{b_1 + \dots}$$

größer ist als der andere. Man braucht dazu nur den ersten Index n aufzusuchen, für den $a_n \neq b_n$, etwa $a_n > b_n$. Dann ist $K_1 \geq K_2$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

2d. Die 1 stehe in F am Ende einer Reihe von 1-en. Dann benutzen wir die Identität

$$g_{n-1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{g_{n+1}}}} = (g_{n-1} + 1) - \frac{1}{2 + \frac{1}{g_{n+1}}},$$

und es wird

$$\lambda_n = 2 + \frac{1}{g_{n+1}} - \frac{1}{(g_{n-1} + 1) + \frac{1}{g_{n-2}}},$$

also ist $\lambda_n \geq 2$, je nachdem

$$g_{n-1} + 1 + \frac{1}{g_{n-2}} \geq g_{n+1} + \frac{1}{g_{n+2}}.$$

Wir sehen also, daß

1. zu einem von 1 verschiedenen Teilnenner stets

2a zu einer einzelnen 1 nie

2b zu einer 1, die zwischen zwei anderen 1-en steht, immer

2c, d zu einer 1, die am Anfang oder am Ende einer Reihe von 1-en steht, vielleicht

ein Engwert als Näherungswert gehört.

§ 3.

Diagonalkettenbrüche.

Nach Minkowski lassen sich die Engwerte nach abnehmender Größe von $\eta = |p - \omega q|$ ordnen. In dieser Anordnung lassen sie sich als Folge der Näherungsbrüche eines bestimmten Kettenbruches auffassen; diesen nannte Minkowski den Diagonalkettenbruch. Die Näherungsbrüche jedes engsten Kettenbruches sind demnach im Diagonalkettenbruch enthalten; er ist der langsamste unter den engsten Kettenbrüchen.

Minkowski zeigte, daß die Näherungsbrüche des Diagonalkettenbruches im gewöhnlichen Kettenbruch enthalten sind, und gab an, wie man den gewöhnlichen aus dem Diagonalkettenbruch entwickeln kann. Die umgekehrte Aufgabe, den Diagonalkettenbruch aus dem gewöhnlichen zu entwickeln, ist durch die Regeln des § 2 gelöst: wir haben festzustellen, welche Näherungswerte Engwerte sind, und diejenigen zu löschen, die es nicht sind.

Es fällt auf, daß von den zu einer längeren Reihe von 1-en gehörigen Näherungsbrüchen höchstens der erste und der letzte gelöscht werden kann.

Minkowski zeigte, daß der Diagonalkettenbruch einer quadratischen Irrationalität *periodisch* ist. Er mußte dabei auf die Endlichkeit der Anzahl der reduzierten Formen in einer Klasse indefiniter binärer quadratischer Formen zurückgehen. Da wir aber die Beziehung zum gewöhnlichen Kettenbruch hergestellt haben und für diesen die Periodizität bekannt ist, können wir den Beweis erheblich kürzer führen.

Die Länge einer Periode des gewöhnlichen Kettenbruches für ω sei k , die der Vorperiode sei v . Wir sagen, Teilnenner oder Näherungsbrüche entsprechen einander, wenn ihre Indizes sich um ganze Vielfache von k unterscheiden und größer sind als v ; entsprechende Teilnenner sind nach Voraussetzung gleich. Die Periodizität des gewöhnlichen Kettenbruches könnte beim Übergang zum Diagonalkettenbruch nur dann zerstört werden, wenn entsprechende Näherungsbrüche beim Löschen verschieden behandelt würden. Die Regeln 1, 2a, 2b des § 2 liefern für entsprechende Näherungsbrüche sicher die gleiche Entscheidung, denn diese Entscheidung wird nur durch die zugehörigen Teilnenner und die unmittelbar vorangehenden und folgenden bestimmt, und entsprechende Teilnenner sind ja gleich. Es bleibt zu zeigen, daß auch die Regeln 2c und 2d für entsprechende Näherungsbrüche schließlich die gleiche Entscheidung liefern.

Es stehe also in F eine 1 etwa am Anfang einer Reihe von 1-en, und zwar sei ihr Index $n+1 \geq k+v+2$. Die beiden Kettenbrüche, die wir nach der Regel 2c miteinander zu vergleichen haben, sind

$$K_1 = \frac{1}{g_{n+3} + 1 + \frac{1}{g_{n+4} \dots}} \quad \text{und} \quad K_2 = \frac{1}{g_n + \frac{1}{g_{n-1} \dots}}.$$

Sie sind spätestens im k -ten Teilnenner voneinander verschieden; denn nach Voraussetzung ist $g_n = g_{n-k}$, aber $g_{n+3} + 1 = g_{n+k+3} + 1 \neq g_{n+k+3}$. Die Entscheidung darüber, welcher der größere ist, fällt spätestens beim k -ten Teilnenner, und dann für entsprechende Näherungsbrüche in der gleichen Weise. Eine Ausnahme können dabei höchstens die Näherungsbrüche der ersten Periode bilden. — Dieselbe Schlußweise können wir anwenden, wenn die 1 am Ende einer Reihe von 1-en steht. *Diagonalkettenbrüche sind also periodisch.*

So ist der gewöhnliche Kettenbruch von $\omega = \frac{-8 + \sqrt{11}}{7}$

$$\omega = (0, 3, 1, 1, 2, \dots)$$

rein periodisch. Der Diagonalkettenbruch

$$\omega = (0, 3, 1, 1, 2, \overset{+}{4}, \overset{-}{2}, \dots)$$

hat eine dreigliedrige Vorperiode, da die auf die 3 in F folgende 1 in allen Perioden zu löschen ist, nur in der ersten nicht.

§ 4.

Beste Kettenbrüche.

Ein Kettenbruch, der zugleich ein engster und ein raschester ist, heiße ein *bester* Kettenbruch. Wir wollen zeigen, daß es zu jeder Zahl ω mindestens einen besten Kettenbruch gibt.

Zur Umrechnung eines gewöhnlichen Kettenbruches in einen besten dürfen wir von der Identität (2) des § 1 keinen Gebrauch machen; denn dadurch bekämen wir Näherungsbrüche, die im gewöhnlichen Kettenbruch nicht enthalten und daher sicher keine Engwerte sind.

Wir sind also auf Umformungen mit Hilfe der Identität (1) allein angewiesen. In § 1 haben wir gesehen, daß wir tatsächlich allein mit Hilfe von (1) vom gewöhnlichen zu einem raschesten Kettenbruch kommen können und daß wir dabei noch mehrere Möglichkeiten zur Auswahl haben. Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, daß wir diese Auswahl so treffen können, daß dabei u. a. alle die Näherungsbrüche gelöscht werden, die keine Engwerte sind. Jeder solche Näherungsbruch gehört zu einem Teilnenner 1. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Steht in F eine *ungerade* Anzahl $2\nu + 1$ von 1-en hintereinander, so sind nach § 1 die zur 1-ten, 3-ten, ..., $(2\nu + 1)$ -ten 1 gehörigen Näherungsbrüche zu löschen, also sicher die zur ersten und letzten 1 gehörigen, die allein möglicherweise keine Engwerte sind.

2. Steht in F eine *gerade* Anzahl $2\nu \geq 4$ von 1-en hintereinander, so wählen wir $0 < \varrho < \nu$ und löschen den zur 1-ten, 3-ten, ..., $(2\varrho - 1)$ -ten, $(2\varrho + 2)$ -ten, ..., 2ν -ten 1 gehörigen Näherungsbruch, unter denen sich dann wieder die beiden gefährlichen, zur ersten und letzten 1 gehörigen Näherungsbrüche befinden. Es gibt jedoch rascheste Kettenbrüche (nämlich die durch die Wahl von $\varrho = 0$ oder $\varrho = \nu$ entstehenden), in denen die gefährlichen Näherungsbrüche nicht gelöscht sind und die daher nicht notwendig engste Kettenbrüche sind.

3. In F stehen zwei 1-en hintereinander; es sei $g_n \neq 1, g_{n+1} = g_{n+2} = 1, g_{n+3} \neq 1$. Nach § 2 ist dann sicher

$$\lambda_n > 2, \text{ wenn } g_{n+3} + 1 > g_n,$$

$$\lambda_{n+1} > 2, \text{ wenn } g_n + 1 > g_{n+3}.$$

Von diesen beiden Ungleichungen ist mindestens eine richtig. Einer der beiden fraglichen Näherungsbrüche ist demnach ein Engwert, und den anderen können wir löschen.

Damit sind alle Möglichkeiten aufgezählt, wie eine 1 in F stehen kann. Wir können in allen Fällen dadurch vom gewöhnlichen zu einem raschesten

Kettenbruch kommen, daß wir unter anderen alle die Näherungsbrüche löschen, die keine Engwerte sind, und können behaupten:

Zu jeder Zahl ω gibt es mindestens einen besten Kettenbruch.

Die beiden Hurwitzschen Kettenbrüche, die wir bekommen, wenn wir in 2. durchweg $\varrho = 0$ oder durchweg $\varrho = \nu$ wählen, sind wohl rascheste, aber im allgemeinen keine engsten Kettenbrüche.

Der Diagonalkettenbruch ist wohl ein engster, aber im allgemeinen kein raschester Kettenbruch.

Wir wollen uns die Verhältnisse einmal am Beispiel der Zahl $\omega = \frac{-39 + \sqrt{3029}}{58}$ ansehen und den gewöhnlichen Kettenbruch G , den Diagonalkettenbruch D , die beiden Hurwitzschen Kettenbrüche H_1 und H_2 und zwei von den unendlich vielen besten Kettenbrüchen B_1 und B_2 in einer Tabelle zusammenstellen.

Name	Kettenbruch	Folge der Näherungsbrüche
G	$\left(\overline{0, 3, 1, 1, 1, 1, 1, \dots} \right)$	$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{5}{18} \quad \frac{8}{29} \quad \frac{13}{47} \dots$
D	$\left(\overline{0, 4, 2, 1, 1, 2, 5, \dots} \right)$	$* \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{5}{18} \quad * \quad \frac{13}{47} \dots$
H_1	$\left(\overline{0, 4, 3, 3, 2, \dots} \right)$	$* \quad \frac{1}{4} \quad * \quad \frac{3}{11} \quad * \quad \frac{8}{29} \quad \frac{13}{47} \dots$
H_2	$\left(\overline{0, 3, 2, 3, 3, 4, \dots} \right)$	$\frac{1}{3} \quad * \quad \frac{2}{7} \quad * \quad \frac{5}{18} \quad * \quad \frac{13}{47} \dots$
B_1	$\left(\overline{0, 4, 3, 2, 2, 5, \dots} \right)$	$* \quad \frac{1}{4} \quad * \quad \frac{3}{11} \quad \frac{5}{18} \quad * \quad \frac{13}{47} \dots$
B_2	$\left(\overline{0, 4, 2, 2, 3, 5, \dots} \right)$	$* \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{7} \quad * \quad \frac{5}{18} \quad * \quad \frac{13}{47} \dots$

Der Diagonalkettenbruch ist kein raschester, weil er noch Teilnenner 1 enthält; die Hurwitzschen Kettenbrüche sind keine engsten, weil $\frac{1}{3}$ und $\frac{8}{29}$ keine Engwerte sind.

(Eingegangen am 23. 12. 1938.)

Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz.

Von

M. Eichler in Göttingen.

Im folgenden liefere ich einen neuen Beweis für den bekannten Satz:

Es bezeichne $f(x, y)$ ein absolut irreduzibles Polynom in zwei Veränderlichen x und y mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper k . Dann kann man für x unendlich viele Zahlen a aus k so einsetzen, daß $f(a, y)$ als Polynom in y in k irreduzibel ist.

Dieser Satz enthält einen wesentlichen Teil des allgemeineren Irreduzibilitätssatzes von Hilbert. Seine hier gegebene Begründung verläuft ganz im Bereiche der Begriffe, die in der arithmetischen Theorie der algebraischen Zahl- und Funktionenkörper üblich sind, und scheint daher der Bedeutung des genannten Theorems angemessener zu sein als frühere.

Der leitende Gedanke ist der folgende: bezeichnet K den durch $f(x, y) = 0$ über k definierten algebraischen Funktionenkörper, so hat man in $k(x)$ unendlich viele Primdivisoren \mathfrak{X} ersten Grades, nämlich die Zählerdivisoren von Funktionen $x - a$ mit a aus k , zu finden, die in K Primdivisoren bleiben. Ein solcher Primdivisor \mathfrak{X} bildet $K = k(x, y)$ auf eine algebraische Erweiterung n -ten Grades ab, wenn n den Grad von $f(x, y)$ in y bezeichnet. Ist $x \equiv a \pmod{\mathfrak{X}}$ mit a aus k , so genügt die Restklasse $y \mathfrak{X}$ von $y \pmod{\mathfrak{X}}$ in k der Gleichung $f(a, y \mathfrak{X}) = 0$, die in $y \mathfrak{X}$ den Grad n hat und in k irreduzibel sein muß, weil $y \mathfrak{X}$ über k vom Grade n ist.

Man erkennt unmittelbar, daß es hinreicht, die Primdivisoren \mathfrak{X} so zu bestimmen, daß sie in der kleinsten K enthaltenden galoisschen Erweiterung von $k(x)$ Primdivisoren bleiben. Daher beschränkt es die Allgemeinheit nicht, gleich von vornherein $K = k(x, y)$ als galoissch über $k(x)$ vorauszusetzen.

Zur Konstruktion solcher Primdivisoren \mathfrak{X} werden zunächst zwei Hilfsätze hergeleitet; auf den ersten hat Herr Hasse gelegentlich in seinem Seminar in einem anderen Zusammenhang hingewiesen*).

Hilfssatz 1. $f(x, y)$ sei ein absolut irreduzibles Polynom mit Koeffizienten in k . Ersetzt man die Koeffizienten von $f(x, y)$ durch ihre Restklassen mod einem Primideal \mathfrak{p} aus k , so ist, von höchstens endlich vielen \mathfrak{p} abgesehen, das entstehende Polynom über dem Restklassenkörper $k \mathfrak{p}$ von $k \pmod{\mathfrak{p}}$ ebenfalls absolut irreduzibel. Oder kurz: $f(x, y)$ ist mod \mathfrak{p} absolut irreduzibel.

*) Zusatz bei der Korrektur: Wie ich nachträglich erfahre, ist dieser Hilfssatz auch Herrn Deuring seit einiger Zeit bekannt.

Beweis. Es sei $K = k(x, y)$ der durch $f(x, y) = 0$ über k definierte algebraische Funktionenkörper. Voraussetzung und Behauptung bleiben ungeändert, wenn man den Konstantenkörper k von K durch eine beliebige endliche algebraische Erweiterung ersetzt. Man darf daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Existenz eines in Zähler und Nenner von x und y nicht aufgehenden Primdivisors \mathfrak{P} ersten Grades in K voraussetzen.

x_1 sei eine nicht konstante Funktion aus K , deren Nenner eine Potenz von \mathfrak{P} ist, und y_1 sei eine solche Funktion, daß $K = k(x_1, y_1)$ ist. Der Nenner von y_1 sei $\mathfrak{P}^{a_1} \mathfrak{P}_1^{a_2} \mathfrak{P}_2^{a_3} \dots$, wobei die \mathfrak{P}_i von \mathfrak{P} verschiedene Primdivisoren sind. Da stets eine endliche algebraische Konstantenerweiterung gestattet ist, darf man voraussetzen, daß die \mathfrak{P}_i Primdivisoren ersten Grades sind. Dann enthält der Konstantenkörper Zahlen b_i mit $x_1 \equiv b_i \pmod{\mathfrak{P}_i}$, und K wird auch durch x_1 und $y'_1 = y_1 (x_1 - b_1)^{a_1} (x_1 - b_2)^{a_2} \dots$ erzeugt. y'_1 hat als Nenner eine Potenz von \mathfrak{P} . Es darf angenommen werden, daß bereits y_1 eine Potenz von \mathfrak{P} als Nenner hat.

$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots$ seien alle in den Zählern von x_1 und y_1 aufgehenden Primdivisoren und \mathfrak{I} der Integritätsbereich in K , dessen Funktionen Potenzprodukte der \mathfrak{R}_i als genaue Nenner haben. Ist z_0 eine Funktion in \mathfrak{I} , in deren Nenner sämtliche \mathfrak{R}_i wirklich auftreten, so ist \mathfrak{I} von dem Integritätsbereich $k[z_0]$ der Polynome in z_0 ganz algebraisch abhängig und besitzt bezüglich $k[z_0]$ eine Basis $z_1 = 1, z_2, \dots, z_m$. Zwischen den z_i besteht ein System von Relationen

$$(1) \quad z_j z_k = \sum m_{ijk}(z_0) z_i, \quad (i, j, k = 1, \dots, m),$$

mit Polynomen $m_{ijk}(z_0)$ in z_0 . Durch (1) wird \mathfrak{I} als ein kommutativer Ring hyperkomplexer Zahlen dargestellt. Ich schließe nun zunächst alle die Primideale \mathfrak{p} aus k von den folgenden Betrachtungen aus, die in den Nennern der Koeffizienten der $m_{ijk}(z_0)$ aufgehen. $k_{\mathfrak{p}}$ sei der Integritätsbereich aller Zahlen aus k , die \mathfrak{p} nicht im Nenner haben. Dann wird durch das Multiplikationsschema (1) über $k_{\mathfrak{p}}[z_0]$ ein hyperkomplexer kommutativer Ring $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$ erzeugt. Ich schließe weiterhin alle diejenigen \mathfrak{p} aus, die in der Diskriminante von $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$ bezüglich $k_{\mathfrak{p}}[z_0]$ aufgehen. Für die übrigen \mathfrak{p} gilt das Folgende: bezeichnet $k_{\mathfrak{p}}$ den Restklassenkörper von $k \bmod \mathfrak{p}$ und ersetzt man in (1) die Koeffizienten der $m_{ijk}(z_0)$ durch ihre Restklassen $\bmod \mathfrak{p}$, so definiert (1) über dem Polynombereich $k_{\mathfrak{p}}[z_0]$ einen halbeinfachen hyperkomplexen Ring

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{I}_{\mathfrak{p}1} + \mathfrak{I}_{\mathfrak{p}2} + \dots,$$

welcher ebenso wie seine direkten Summanden $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}i}$ ein homomorphes Bild von $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$ ist.

Dem oben genannten Primdivisor \mathfrak{P} entspricht eindeutig ein Primideal $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}$ in \mathfrak{I} ; es hat über $k[z_0]$ eine Basis p_1, \dots, p_m , und für diese besteht analog zu (1) ein System von Relationen

$$z_j p_k = \sum n_{ijk}(z_0) p_i, \quad (i, j, k = 1, \dots, m),$$

mit Polynomen $n_{i,j,k}(z_0)$ in z_0 . Ich schließe jetzt weiterhin alle die p aus, die in den Nennern der Koeffizienten der $n_{i,j,k}(z_0)$ aufgehen. Für die übrigen p sind die Durchschnitte $\mathfrak{I}_p \cap \mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}$ Ideale in den \mathfrak{I}_p , und bei den Homomorphismen $\mathfrak{I}_p \rightarrow \mathfrak{I}p$ und $\mathfrak{I}_p \rightarrow \mathfrak{I}p_i$ gehen die $\mathfrak{I}_p \cap \mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}$ in Ideale $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}p$ und $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}p_i$ von $\mathfrak{I}p$ und $\mathfrak{I}p_i$ über.

Die Norm von $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}$ bezüglich $k[z_0]$ hat die Form $k[z_0](az_0 + b)$, weil \mathfrak{P} ein Primdivisor ersten Grades ist. Das Produkt der Normen der Ideale $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}p$, bezüglich $k p[z_0]$ ist gleich der Norm von $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}p$ bezüglich $k p[z_0]$, und diese ist dem Hauptideal $(az_0 + b) \bmod p$ kongruent. Von den in a aufgehenden p abgesehen, muß also genau eins der Ideale $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}p_i$, etwa $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}p_1$, eine nicht konstante, d. h. von z_0 abhängige Norm haben. Sie muß in z_0 vom ersten Grade sein, also entspricht dem Ideal $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}p_1$ im Quotientenkörper Kp_1 von $\mathfrak{I}p_1$ ein Primdivisor $\mathfrak{P}p_1$ vom ersten Grade.

Der Homomorphismus $\mathfrak{I}_p \rightarrow \mathfrak{I}p_1$ läßt sich auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus $K \rightarrow Kp_1$ der Quotientenkörper fortsetzen. Bilder von Elementen w und Divisoren \mathfrak{B} aus K bei diesem Homomorphismus bezeichne ich mit $w p_1$ und $\mathfrak{B} p_1$. $\frac{1}{x_1}$ und $\frac{1}{y_1}$ liegen ihrer Definition gemäß in \mathfrak{I} , und man erkennt sofort, daß sie, von höchstens endlich vielen p abgesehen, sogar in \mathfrak{I}_p liegen und daß, ebenfalls von höchstens endlich vielen p abgesehen, $\frac{1}{x_1} p_1 \neq 0$, $\frac{1}{y_1} p_1 \neq 0$ ist. Dann existieren $x_1 p_1$ und $y_1 p_1$ in Kp_1 . Sind \mathfrak{P}^p und \mathfrak{P}^q die Nenner von x_1 und y_1 , so sind $(\mathfrak{P}p_1)^p$ und $(\mathfrak{P}p_1)^q$ die Nenner von $x_1 p_1$ und $y_1 p_1$, was man aus den Idealzerlegungen $\mathfrak{I} \frac{1}{x_1} = (\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P})^p$, $\mathfrak{I} \frac{1}{y_1} = (\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P})^q$, $\mathfrak{I} \frac{1}{x_1} p_1 = (\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}p_1)^p$, $\mathfrak{I} \frac{1}{y_1} p_1 = (\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}p_1)^q$ entnimmt. Zwischen x_1 und y_1 bestehe die absolut irreduzible Gleichung $f_1(x_1, y_1) = 0$ in k , und zwischen $x_1 p_1$ und $y_1 p_1$ bestehe die absolut irreduzible Gleichung $f_1 p(x_1 p_1, y_1 p_1) = 0$ in $k p$. $f_1(x_1, y_1)$ ist $\bmod p$ durch $f_1 p(x_1, y_1)$ teilbar, weil $Kp_1 = k p(x_1 p_1, y_1 p_1)$ ein homomorphes Bild von $K = k(x_1, y_1)$ ist. Die Grade von $f_1(x_1, y_1)$ und $f_1 p(x_1 p_1, y_1 p_1)$ in x_1, y_1 und $x_1 p_1, y_1 p_1$ sind aber gleich den Graden der Nenner von x_1, y_1 und $x_1 p_1, y_1 p_1$, und da die Nenner von x_1 und $x_1 p_1$ bzw. y_1 und $y_1 p_1$ gleiche Grade haben, gilt

$$f_1(x_1, y_1) \equiv f_1 p(x_1, y_1) \pmod{p}.$$

Also ist $f_1(x_1, y_1) \bmod p$ absolut irreduzibel.

Hiermit ist die absolute Irreduzibilität $\bmod p$ einer geeigneten K definierenden Gleichung für alle p bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen nachgewiesen. Darauf gründet sich der Beweis des Hilfssatzes 1. Es seien \mathfrak{R} und \mathfrak{R}_p der Integritätsbereich der ganzen rationalen Funktionen in x_1 und y_1 und der Integritätsbereich der ganzen rationalen Funktionen in x_1 und y_1

mit Koeffizienten, deren Nenner zu p prim sind. | Unter p wird stets ein solches Primideal verstanden, für welches $f_1(x_1, y_1) \bmod p$ absolut irreduzibel ist. Es sei

$$x \cong \frac{3}{\mathfrak{N}}, \quad y \cong \frac{3'}{\mathfrak{N}'}, \quad (3, \mathfrak{N}) = (3', \mathfrak{N}') = 1.$$

Da \mathfrak{P} voraussetzungsgemäß nicht in $3\mathfrak{N}3'\mathfrak{N}'$ aufgeht, entsprechen $3, \mathfrak{N}, 3', \mathfrak{N}'$ ganze Ideale $\mathfrak{R} \circ 3, \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}, \mathfrak{R} \circ 3', \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}'$ in \mathfrak{R} mit

$$\mathfrak{R} \circ 3 + \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N} = \mathfrak{R} \circ 3' + \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}' = \mathfrak{R}.$$

Von höchstens endlich vielen p abgesehen, sind $\mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R} \circ 3, \mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}, \mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R} \circ 3', \mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}'$ Ideale in \mathfrak{R}_p mit

$$\mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R} \circ 3 + \mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N} = \mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R} \circ 3' + \mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}' = \mathfrak{R}_p,$$

und bei den Homomorphismen $K \rightarrow Kp_1$ gehen diese Ideale in ganze Ideale $\mathfrak{R} \circ 3p_1, \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}p_1, \mathfrak{R} \circ 3'p_1, \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}'p_1$ aus $\mathfrak{R}p_1$ mit

$$\mathfrak{R} \circ 3p_1 + \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}p_1 = \mathfrak{R} \circ 3'p_1 + \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}'p_1 = \mathfrak{R}p_1$$

über, welchen wiederum ganze Divisoren $3p_1, \mathfrak{N}p_1, 3'p_1, \mathfrak{N}'p_1$ in Kp_1 entsprechen. Weil $f_1(x_1, y_1) \bmod p$ absolut irreduzibel ist, sind die Normen der Ideale $\mathfrak{R} \circ 3, \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}, \mathfrak{R} \circ 3', \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{R} \circ 3p_1, \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}p_1, \mathfrak{R} \circ 3'p_1, \mathfrak{R} \circ \mathfrak{N}'p_1$ bezüglich $k[x_1]$ bzw. $kp[x_1p_1]$ einander mod p kongruente Polynome in x_1 bzw. x_1p_1 , deren Grade die Grade der Divisoren $3, \mathfrak{N}, 3', \mathfrak{N}'$ und $3p_1, \mathfrak{N}p_1, 3'p_1, \mathfrak{N}'p_1$ angeben. Schließt man noch diejenigen p aus, welche die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x_1 teilen, so haben $3, \mathfrak{N}, 3', \mathfrak{N}'$ und $3p_1, \mathfrak{N}p_1, 3'p_1, \mathfrak{N}'p_1$ bezüglich die gleichen Grade. Es ist

$$(3p_1, \mathfrak{N}p_1) = (3'p_1, \mathfrak{N}'p_1) = 1$$

und

$$xp_1 \cong \frac{3p_1}{\mathfrak{N}p_1}, \quad yp_1 \cong \frac{3'p_1}{\mathfrak{N}'p_1}.$$

Also die Nenner von xp_1 und yp_1 haben die gleichen Grade wie die von x und y , und hieraus folgt, wie oben für $f_1(x_1, y_1)$, daß $f(x, y) \bmod p$ absolut irreduzibel ist, wie zu beweisen war.

Es sei jetzt $S = k(x, z)$ ein Unterkörper von $K = k(x, y)$; z genüge in k der absolut irreduziblen Gleichung $g(x, z) = 0$. Bis auf endlich viele p , von denen von jetzt ab durchweg abgesehen wird, sind nach Hilfssatz 1 sowohl $f(x, y)$ wie $g(x, z) \bmod p$ absolut irreduzibel. Ersetzt man die Koeffizienten von $f(x, y)$ und $g(x, z)$ durch ihre Restklassen mod p , so definieren $f(x, y) = 0$ und $g(x, z) = 0$ über dem Restklassenkörper kp von $k \bmod p$ mit K und S homomorphe Funktionenkörper Kp und Sp , und Sp ist ein Unterkörper von Kp . Die Grade $(K : S)$ und $(Kp : Sp)$ sind gleich.

Hilfssatz 2. Ist K über S zyklisch, so gibt es unendlich viele p derart, daß Sp einen Primdivisor $\mathfrak{P}p$ ersten Grades enthält, der in Kp ein Primdivisor bleibt und der im Nenner von xp und in der Diskriminante einer Ganzheitsbasis von Kp bezüglich $kp[xp]$ nicht aufgeht.

Beweis. Es sei $(K:S) = n$. Man adjungiere zu dem Konstantenkörper k von K und S zunächst eine primitive n -te Einheitswurzel ζ und betrachte $K(\zeta)$ über $S(\zeta)$. Wird ein Primideal q aus $k(\zeta)$ so gewählt, daß $f(x, y)$ und $g(x, z) \bmod q$ absolut irreduzibel sind, so ist auch $K(\zeta)q$ über $S(\zeta)p$ zyklisch vom Grade n , und der Konstantenkörper $k(\zeta)q$ dieser Funktionenkörper enthält die n -ten Einheitswurzeln. Nach bekannten Schlüssen aus der arithmetischen und analytischen Zahlentheorie der algebraischen Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper¹⁾ steht die Existenz unendlich vieler Primdivisoren in $S(\zeta)q$ fest, die in $K(\zeta)p$ Primdivisoren bleiben. Es sei $\mathfrak{P}'q$ ein solcher, der nicht im Nenner von xq und nicht in der Diskriminante einer Ganzheitsbasis von $K(\zeta)q$ bezüglich $k(\zeta)q[xq]$ aufgeht. tq sei eine Funktion aus $S(\zeta)q$, deren Zähler genau einmal durch $\mathfrak{P}'q$ teilbar ist, und t eine Funktion aus $S(\zeta)$, die bei dem Homomorphismus $S(\zeta) \rightarrow S(\zeta)q$ auf tq abgebildet wird. $\Omega_1 \Omega_2 \dots$ sei eine Zerlegung des Zählers von t in Primdivisoren aus $S(\zeta)$. Da $\mathfrak{P}'q$ genau einmal im Zähler von tq aufgehen sollte, geht $\mathfrak{P}'q$ genau in einem der $\Omega_i q$, etwa in $\Omega_1 q$, genau einmal auf. Weil $\mathfrak{P}'q$ in $K(\zeta)q$ ein Primdivisor bleiben sollte, kann jetzt $\Omega_1 q$ nicht die Norm eines Divisors aus einem Körper zwischen $K(\zeta)q$ und $S(\zeta)q$ sein, folglich ist auch Ω_1 nicht die Norm eines Divisors aus einem zwischen $K(\zeta)$ und $S(\zeta)$ gelegenen Körper, und dann ist Ω_1 ein Primdivisor in $K(\zeta)$. Ist r der Grad von Ω_1 in $S(\zeta)$, so hat Ω_1 in $K(\zeta)$ den Grad $r \cdot n$. Durch Adjunktion einer geeigneten algebraischen Größe θ vom Grade r über $k(\zeta)$ kann erreicht werden, daß Ω_1 in $S(\zeta, \theta)$ durch einen Primdivisor \mathfrak{P} ersten Grades teilbar ist. \mathfrak{P} ist in $K(\zeta, \theta)$ ein Divisor vom Grade n , und zwar ein Primdivisor, weil zur Abspaltung eines Primdivisors von Ω_1 in $K(\zeta)$ von kleinerem Grade als n eine Konstantenerweiterung von größerem Grade als r erforderlich gewesen wäre. \mathfrak{P} geht seiner Konstruktion gemäß nicht im Nenner von x und nicht in der Diskriminante einer Ganzheitsbasis von $K(\zeta)$ bezüglich $k(\zeta)[x]$ auf.

Nun definiert \mathfrak{P} eine homomorphe Abbildung von $S(\zeta, \theta)$ auf $k(\zeta, \theta)$ und von $K(\zeta, \theta)$ auf eine algebraische Erweiterung $k(\zeta, \theta, \nu)$ von $k(\zeta, \theta)$ vom Grade n ; diese kann man folgendermaßen erhalten: es seien $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots$ alle im Nenner von x und in der Diskriminante einer Ganzheitsbasis von $K(\zeta)$ bezüglich $k(\zeta)[x]$ aufgehenden Primdivisoren aus $S(\zeta, \theta)$ und \mathfrak{I} der Inte-

¹⁾ Vgl. H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, Journ. f. r. u. angew. Math. 172 (1934), S. 37—54.

ritätsbereich der Funktionen aus $S(\zeta, \theta)$, deren Nenner Potenzprodukte der \mathfrak{R}_i sind. Da \mathfrak{P} von allen \mathfrak{R}_i verschieden ist, entspricht \mathfrak{P} ein Primideal $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}$ in \mathfrak{I} , und der Restklassenkörper von $\mathfrak{I} \bmod \mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}$ ist mit $k(\zeta, \theta)$ isomorph. Ist $\bar{\mathfrak{I}}$ der größte von \mathfrak{I} ganz algebraisch abhängige Integritätsbereich in $K(\zeta, \theta)$, so ist $\bar{\mathfrak{I}} \cdot \mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}$ ein Primideal in $\bar{\mathfrak{I}}$, und der Restklassenkörper von $\bar{\mathfrak{I}} \bmod \bar{\mathfrak{I}} \cdot \mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}$ ist einer Erweiterung $k(\zeta, \theta, v)$ von $k(\zeta, \theta)$ isomorph; und zwar ist $k(\zeta, \theta, v)/k(\zeta, \theta)$ zyklisch vom Grade n . Es gibt jetzt unendlich viele Primideale \mathfrak{p}' ersten Grades in $k(\zeta, \theta)$, welche in $k(\zeta, \theta, v)$ Primideale bleiben. \mathfrak{p}' sei ein solches; es kann nach Hilfssatz 1 außerdem auf unendlich viele Arten so gewählt werden, daß $f(x, y)$ und $g(x, z) \bmod \mathfrak{p}'$ absolut irreduzibel sind. Nun werde \mathfrak{I} wie bei dem Beweise des Hilfssatzes 1 durch Funktionen z_0, \dots, z_m ganz rational dargestellt, und es werde der Integritätsbereich $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}'}$, der in den z_i ganzen Funktionen gebildet, deren Koeffizienten zu \mathfrak{p}' prime Nenner haben. Man erkennt in gleicher Weise wie oben, daß von höchstens endlich vielen \mathfrak{p}' abgesehen, der Homomorphismus $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}'} \rightarrow \mathfrak{I} \bmod \mathfrak{I} \circ \mathfrak{P}$ auf ein Primideal $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{P} \mathfrak{p}'$ in $\mathfrak{I} \mathfrak{p}'$ abbildet, dem in $S(\zeta, \theta)$ \mathfrak{p}' ein Primdivisor $\mathfrak{P} \mathfrak{p}'$ ersten Grades entspricht und welcher in keinem der Divisoren $\mathfrak{R}_i \mathfrak{p}'$ aufgeht. Da \mathfrak{p}' in $k(\zeta, \theta, v)$ ein Primideal bleiben sollte, ist $\mathfrak{P} \mathfrak{p}'$ auch in $K(\zeta, \theta)$ ein Primdivisor.

Ist \mathfrak{p} das durch \mathfrak{p}' teilbare Primideal aus k , so ist, weil \mathfrak{p}' ein Primideal ersten Grades sein sollte,

$$k(\zeta, \theta) \mathfrak{p}' = k \mathfrak{p}, \quad S(\zeta, \theta) \mathfrak{p}' = S \mathfrak{p}, \quad K(\zeta, \theta) \mathfrak{p}' = K \mathfrak{p},$$

und $\mathfrak{P} \mathfrak{p}'$ ist ein Primdivisor ersten Grades in $S \mathfrak{p}$, der in $K \mathfrak{p}$ ein Primdivisor bleibt und der nicht im Nenner von $x \mathfrak{p}$ und nicht in der Diskriminante einer Ganzheitsbasis von $K \mathfrak{p}$ bezüglich $k \mathfrak{p} [x \mathfrak{p}]$ aufgeht. Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen beweise ich jetzt den zu Anfang angekündigten Irreduzibilitätssatz: ich zeige, daß es unendlich viele nicht im Nenner von x aufgehende Primdivisoren \mathfrak{P} ersten Grades in $k(x)$ gibt, die in K Primdivisoren bleiben, wenn K eine galoissche Erweiterung von $k(x)$ ist. \mathfrak{G} sei die Galoissche Gruppe von $K/k(x)$. Für jedes Element σ aus \mathfrak{G} sei S_σ der Unterkörper von K , über dem K die durch σ erzeugte zyklische Gruppe als Galoissche Gruppe hat. Für jedes S_σ wird nach Hilfssatz 2 ein Primideal \mathfrak{p}_σ und in $S_\sigma \mathfrak{p}_\sigma$ ein Primdivisor $\mathfrak{P}_\sigma \mathfrak{p}_\sigma$ ersten Grades gewählt, der in $K \mathfrak{p}_\sigma$ ein Primdivisor bleibt und der nicht im Nenner von $x \mathfrak{p}_\sigma$ und in der Diskriminante einer Ganzheitsbasis von $K \mathfrak{p}_\sigma$ bezüglich $k \mathfrak{p}_\sigma [x \mathfrak{p}_\sigma]$ aufgeht; zu verschiedenen σ wähle man verschiedene \mathfrak{p}_σ . Es sei

$$x \mathfrak{p}_\sigma \equiv a_\sigma \pmod{\mathfrak{P}_\sigma \mathfrak{p}_\sigma}.$$

wobei a_σ eine Restklasse von $k \bmod \mathfrak{p}_\sigma$ ist. Dann gibt es unendlich viele Zahlen a mit

$$a \equiv a_\sigma \pmod{\mathfrak{p}_\sigma} \quad \text{für alle } \sigma$$

in k . Die Zähler der Funktionen $x - a$ sind in $k(x)$ Primdivisoren \mathfrak{X} ersten Grades, (die nicht im Nenner von x aufgehen, und) die in K Primdivisoren bleiben.

Ein solcher Primdivisor \mathfrak{X} geht nämlich zunächst nicht im Nenner von x und nicht in der Diskriminante einer Ganzheitsbasis von K bezüglich $k[x]$ auf und ist infolgedessen in K unverzweigt. Es sei

$$(2) \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots$$

eine Zerlegung von \mathfrak{X} in Primdivisoren in K . \mathfrak{Z}_i bezeichne die Zerlegungsgruppe von \mathfrak{X}_i . Die Gruppen \mathfrak{Z}_i sind in \mathfrak{G} konjugiert. Für irgendein Element σ aus \mathfrak{G} sei

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}'_1 \mathfrak{X}'_2 \dots$$

die Zerlegung von \mathfrak{X} in Primdivisoren in S_σ . $\mathfrak{X}\mathfrak{p}_\sigma$ ist durch $\mathfrak{P}_\sigma\mathfrak{p}_\sigma$ teilbar, also auch einer der Divisoren $\mathfrak{X}'_i\mathfrak{p}_\sigma$, etwa $\mathfrak{X}'_1\mathfrak{p}_\sigma$. Da $\mathfrak{P}_\sigma\mathfrak{p}_\sigma$ konstruktionsgemäß nicht im Nenner von $x\mathfrak{p}_\sigma$ und nicht in der Diskriminante einer Ganzheitsbasis von $K\mathfrak{p}_\sigma$ bezüglich $k\mathfrak{p}_\sigma[x\mathfrak{p}_\sigma]$ aufgeht, kann $\mathfrak{P}_\sigma\mathfrak{p}_\sigma$ nur einmal in $\mathfrak{X}\mathfrak{p}_\sigma$ und auch nur einmal in $\mathfrak{X}'_1\mathfrak{p}_\sigma$ aufgehen. Dann folgt daraus, daß $\mathfrak{P}_\sigma\mathfrak{p}_\sigma$ in $K\mathfrak{p}_\sigma$ ein Primdivisor bleibt, daß \mathfrak{X}'_1 in K ein Primdivisor bleibt. \mathfrak{X}'_1 stimmt also mit einem der \mathfrak{X}_i in (2) überein, entsprechend ist σ in einer der Gruppen \mathfrak{Z}_i enthalten. Da somit jedes Element von \mathfrak{G} in einer der Gruppen \mathfrak{Z}_i enthalten ist und da die \mathfrak{Z}_i in \mathfrak{G} konjugiert sind, muß nach einem bekannten gruppentheoretischen Satze $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = \dots = \mathfrak{G}$ sein, und dann muß \mathfrak{X} in K ein Primdivisor sein, was zu beweisen war.

(Eingegangen am 23. 9. 1938.)

Über eine Binomialkoeffizienten-Identität.

Von

Chr. G. Foussianis in Leipzig.

Sind λ, n zwei ganze und positive Zahlen, so gilt, wie bekannt¹⁾, für $\lambda < n$ die Relation

$$(1) \quad A_\lambda = \sum_{p=1}^n (-1)^p p^\lambda \binom{n}{p} = 0,$$

während

$$(2) \quad A_n = (-1)^n n!$$

ist.

Wir bemerken fast dasselbe auch bei der Summe

$$(3) \quad R_n = \sum \frac{\alpha_1^m}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_{n+1})},$$

wobei m eine ganze positive Zahl ist und α_j lauter verschiedene Zahlen sind. Von den beiden Relationen

$$R_m = 0, \quad R_m \neq 0$$

gilt nämlich für m kleiner als n die erste, für m größer oder gleich n die zweite. Wir suchen also eine Beziehung zwischen A und R herzustellen. In (3) setzen wir

$$(4) \quad \alpha_u = \alpha_{u+1} + \varepsilon, \quad (u = 1, 2, \dots, n), \quad \varepsilon \text{ beliebig,}$$

und $m = n + k$; dann wird

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{v=0}^n (-1)^v \frac{\alpha_{v+1}^{n+k}}{(n-v)! v!} = R_{n+k} \quad (0! = 1).$$

Statt dessen können wir auch schreiben

$$(5) \quad W_k \equiv \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} \left(1 - \frac{v\varepsilon}{\alpha_1}\right)^{n+k} - n! \frac{\varepsilon^n}{\alpha_1^{n+k}} R_{n+k} = 0, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Subtrahiert man von

$$W_1 \equiv 0$$

¹⁾ Chr. Foussianis, Bulletin de la Société Mathématique de Grèce XI, 1, 2, p. 89—93.

die Identität

$$(6) \quad 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots = 0$$

und subtrahiert dann noch die durch (1) und (2) gegebenen Relationen

$$A_p = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n-1), \quad A_n = (-1)^n n!$$

der Reihe nach multipliziert mit

$$(-1)^p \binom{n+1}{p} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_1}\right)^p \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

so erhält man

$$\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha_1}\right)^{n+1} A_{n+1} = n! \frac{\varepsilon^n}{\alpha_1^{n+1}} R_{n+1} - n! \binom{n+1}{n} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_1}\right)^n$$

und damit

$$A_{n+1} = (-1)^{n+1} n! \frac{1}{\varepsilon} (R_{n+1} - (n+1) \alpha_1).$$

Da A_{n+1} unabhängig von den α_j ist, können wir schreiben

$$(7) \quad A_{n+1} = (-1)^{n+1} n! P,$$

wobei die Zahl P durch die Gleichung

$$R_{n+1} - (n+1) \alpha_1 = \varepsilon P$$

bestimmt ist. Demnach ist P die Summe der Koeffizienten der Glieder von R_{n+1} , die nur von ε abhängig sind.

Wir verallgemeinern dieses Ergebnis folgendermaßen. Wir betrachten k Zahlen

$$P_0, P_1, \dots, P_{k-1},$$

die den Gleichungen

$$(8) \quad A_{n+m} = (-1)^{n+m} n! P_m \quad (m = 0, 1, \dots, k-1)$$

genügen, wobei wegen (2) $P_0 = 1$ sein muß.

Die durch (1) und (8) gegebenen Werte von

$$A_p \quad (p = 1, 2, \dots, n+k-1)$$

mögen nun der Reihe nach mit

$$(-1)^p \binom{n+k}{p} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_1}\right)^p, \quad p = 1, 2, \dots, n+k-1,$$

multipliziert und von (5) subtrahiert werden. Wir subtrahieren auch die Relation (6). Dann ergibt sich

$$\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha_1}\right)^{n+k} A_{n+k} = n! \frac{\varepsilon^n}{\alpha_1^{n+k}} R_{n+k} - n! (B_0 + B_1 P_1 + \dots + B_{k-1} P_{k-1}),$$

wo

$$B_{m-n} = \binom{n+k}{m} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_1}\right)^m \quad (m = n, n+1, \dots, n+k-1)$$

oder

$$A_{n+k} = (-1)^{n+k} n! \frac{1}{\varepsilon^k} [R_{n+k} - (B'_0 + B'_1 P_1 + \dots + B'_{k-1} P_{k-1})]$$

mit

$$B'_{k-m} = \binom{n+k}{m} \alpha_1^m \varepsilon^{k-m} \quad (m = 1, 2, \dots, k).$$

Wenn wir jetzt also

$$(9) \quad A_{n+k} = (-1)^{n+k} n! P_k$$

setzen, so daß (8) auch für den Wert $m = k$ gültig ist, so ist P_k eine feste Zahl, unabhängig von α_1 und ε . Diese Zahl wird durch die Gleichung

$$(10) \quad R_{n+k} - (B'_0 + B'_1 P_1 + \dots + B'_{k-1} P_{k-1}) = \varepsilon^k P_k$$

bestimmt werden, d. h. P_k ist der Koeffizient von ε^k in der Entwicklung von R_{n+k} nach Potenzen von α und ε .

Aber die Summe R_{n+k} , wie sie nach (3) definiert wurde, ist bekanntlich gleich

$$\sum \alpha_1^{\varrho_1} \alpha_2^{\varrho_2} \dots \alpha_{n+1}^{\varrho_{n+1}} \quad (\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_{n+1} = k),$$

wobei ϱ ganze positive Zahlen oder Null sind. Außerdem ist der Koeffizient von ε in α_m ($m = 2, 3, \dots, n+1$) wegen (4) gleich $-(m-1)$, also ist

$$P_k = (-1)^k \sum 1^{\varrho_1} 2^{\varrho_2} \dots n^{\varrho_n} \quad (\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_n = k).$$

Damit ist die Bedeutung von P_k in den Relationen (9) und (10) vollständig festgelegt. Wir schreiben in ihnen nunmehr ε statt $-\varepsilon$ und setzen

$$P_{n,k} = \sum 1^{\varrho_1} 2^{\varrho_2} \dots n^{\varrho_n} \quad (\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_n = k).$$

Hiernach ist die Gültigkeit der folgenden Formeln bewiesen:

$$(a) \quad \sum_{p=1}^n (-1)^p p^{n+k} \binom{n}{p} = (-1)^n n! P_{n,k},$$

$$(b) \quad \sum \alpha^{\varrho_1} (\alpha + \varepsilon)^{\varrho_2} \dots (\alpha + n\varepsilon)^{\varrho_{n+1}} = \binom{n+k}{k} \alpha^k + \binom{n+k}{k-1} P_{n,1} \alpha^{k-1} \varepsilon + \dots + P_{n,k} \varepsilon^k \quad (\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_{n+1} = k),$$

wobei die Zahlen α und ε beliebig und n, k ganz sind.

Setzt man in (b) speziell $\alpha = 1$, $\varepsilon = 1$, so folgt die Formel

$$P_{n+1,k} = P_{n,k} + \binom{n+k}{1} P_{n,k-1} + \dots + \binom{n+k}{k}.$$

(Eingegangen am 27. 10. 1938.)

Sur les bases du groupe symétrique et du groupe alternant.

Par

Sophie Piccard in Neuchâtel (Schweiz).

Quel que soit le nombre entier $n \geq 3$ ($n > 4$), il existe, comme on sait, des couples de substitutions du groupe symétrique \mathfrak{S}_n (du groupe alternant \mathfrak{A}_n) qui permettent, par composition, d'engendrer ce groupe. On nomme base du groupe \mathfrak{S}_n (\mathfrak{A}_n) tout couple de substitutions jouissant de cette propriété.

Nous avons démontré ailleurs que le nombre total N (N') de bases du groupe \mathfrak{S}_n (\mathfrak{A}_n) est un multiple de $\frac{n!}{2} \left(\frac{n!}{4}\right)$.

Le but du présent travail est de démontrer que quel que soit le nombre entier $n \geq 3$ ($n > 4$) et quelle que soit la substitution non identique S du groupe \mathfrak{S}_n (\mathfrak{A}_n), il existe au moins une substitution T du groupe \mathfrak{S}_n (\mathfrak{A}_n) qui constitue avec S une base du groupe \mathfrak{S}_n (\mathfrak{A}_n), à l'exception des trois substitutions non-identiques du groupe de Klein, pour $n = 4$.

Pour l'établir, nous nous appuyerons sur les propositions auxiliaires suivantes que nous nous bornons à énoncer ici sans démonstration, pour ne pas allonger le travail:

P. 1. Quels que soient les nombres entiers $k > 1$ et $n > k$, deux substitutions de la forme $(1\ 2 \dots k)$, $(i\ k+1\ k+2 \dots n)$ ($1 \leq i \leq k$) engendrent le groupe \mathfrak{A}_n , si elles sont toutes deux de classe paire, ou le groupe \mathfrak{S}_n , si l'une au moins d'entre elles est de classe impaire.

P. 2. Quel que soit le nombre entier $n > 3$, la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions de la forme

$$(1\ 2 \dots n),\ (a\ b\ c),$$

où a, b, c sont trois nombres distincts de la suite $1, 2, \dots, n$, engendrent le groupe \mathfrak{S}_n , si n est pair, ou \mathfrak{A}_n , si n est impair, est que le plus grand commun diviseur $D(|a-b|, |b-c|, n)$ des trois nombres $|a-b|$, $|b-c|$ et n soit égal à l'unité.

P. 3. Quels que soient les nombres entiers $k \geq 1$ et $n > k$ et non inférieur à 3, ainsi que les trois nombres distincts a, b, c de la suite $1, 2, \dots, n$, dont l'un au moins est $\leq k$ et l'un au moins est $> k$, la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions de la forme $S = (1\ 2 \dots k)(k+1 \dots n)$, $T = (a\ b\ c)$ engendrent le groupe \mathfrak{A}_n , si n est pair, ou \mathfrak{S}_n , si n est impair, est que $D(k, n-k, d) = 1$, d désignant la différence des deux éléments de la substitution T qui appartiennent au même cycle de S .

P. 4. Quels que soient les nombres entiers $m \geq 2$, i ($1 \leq i \leq m$) et $n > i$, deux substitutions de la forme $(1\ 2 \dots m)$, $(i\ i+1 \dots n)$, si elles sont distinctes, engendrent le groupe $\mathfrak{A}_{\max(m, n)}$, lorsqu'elles sont toutes deux de classe paire, ou le groupe $\mathfrak{S}_{\max(m, n)}$, si l'une au moins d'entre elles est de classe impaire, aux trois exceptions suivantes près :

$(1\ 2\ 3\ 4)$, $(3\ 4\ 5\ 6)$; $(1\ 2\ 3\ 4)$, $(2\ 3\ 4\ 5\ 6)$; $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $(3\ 4\ 5\ 6)$.

(C'est une généralisation de P. 1.)

P. 5. Quel que soit le nombre pair $n \geq 6$, deux substitutions de la forme

$(1\ 2 \dots n)$, $(i\ i+1)(n\ n+1)$

($1 \leq i \leq n-2$) engendrent le groupe \mathfrak{S}_{n+1} .

P. 6. En composant une substitution (de classe paire) de degré $n+1$ portant sur les éléments $1, 2, \dots, n+1$, qui contient l'élément $n+1$ dans un cycle d'ordre > 1 , avec les substitutions du groupe \mathfrak{S}_n (\mathfrak{A}_n), dont les substitutions portent sur les éléments $1, 2, \dots, n$, on obtient le groupe \mathfrak{S}_{n+1} (\mathfrak{A}_{n+1}).

Proposition I. Quel que soit le nombre entier $n \geq 3$, il existe pour toute substitution non identique S du groupe \mathfrak{S}_n au moins une substitution T du groupe \mathfrak{S}_n qui constitue avec S une base de \mathfrak{S}_n , à l'exception des trois substitutions non identiques du groupe de Klein, pour $n=4$, qui ne font partie d'aucune base du groupe \mathfrak{S}_4 .

Démonstration. I. Supposons d'abord que S contient au moins un cycle du premier ordre.

Comme $S \neq 1$, cette substitution contient au moins un cycle d'ordre > 1 .

Nous pouvons toujours choisir les notations de façon à écrire :

$S = (1\ 2 \dots m_1)(m_1+1 \dots m_2) \dots (m_{r-1}+1 \dots m_r)(m_r+1) \dots (n)$,

le nombre entier r étant ≥ 1 , $n > m_r$, et les cycles de S étant rangés dans un ordre tel que tous les cycles d'ordre > 1 précèdent tous ceux du premier ordre, le cycle $(m_{r-1}+1 \dots m_r)$ étant d'ordre non inférieur à celui de tous les autres cycles de S .

1. Si l'on n'a pas simultanément $r=2$, $n-m_r=2$ et si la substitution S est de classe impaire ou si elle est de classe paire, mais si le nombre $n-m_r+r$ de tous ses cycles est pair, posons

$$T = (m_1\ m_2 \dots m_r\ m_r+1 \dots n).$$

On a $ST = (1\ 2 \dots n)$,

$$STS^{-1} = (1\ m_1+1 \dots m_{r-1}+1\ m_r+1 \dots n) = T_1.$$

D'après P. 4, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles contiennent, suivant qu'elles sont de classe impaire ou paire. Elles engendrent donc en tout cas la substitution $(1\ m_1\ n)$ qui fait avec ST une base de \mathfrak{S}_n , si n est pair, ou de \mathfrak{A}_n , si n est impair, d'après P. 2. Comme l'une au moins des substitutions S , T est de classe impaire, il s'ensuit, d'après P. 6, que ces deux substitutions engendrent toujours le groupe \mathfrak{S}_n .

2. Supposons maintenant que S est de la forme

$$(*) \quad (1\ 2 \dots m_1) (m_1 + 1 \dots m_2) (m_2 + 1) (m_2 + 2).$$

Elle peut être de classe impaire ou de classe paire, deux de ses cycles sont d'ordre > 1 , les deux autres cycles sont du premier ordre et $m_2 - m_1 \geq m_1$. Si $S = (1\ 2) (3\ 4) (5) (6)$, posons $T = (2\ 3) (4\ 5\ 6)$. Ces deux substitutions engendrent, comme on le vérifie aisément, le groupe \mathfrak{S}_6 . Supposons maintenant que $S \neq (1\ 2) (3\ 4) (5) (6)$. Alors $m_2 - m_1 \geq 3$. Posons

$$T = (m_1\ m_2\ m_2 + 1\ m_2 + 2).$$

On a

$$ST = (1\ 2 \dots m_2 + 2) = R.$$

Si $m_1 = 2$, on a

$$S^2 T S^{-2} = (m_1\ m_1 + 2\ m_2 + 1\ m_2 + 2) = T_1.$$

Les deux substitutions T et T_1 engendrent, d'après P. 4, le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles contiennent. Elles engendrent donc aussi la transposition $(m_2 + 1\ m_2 + 2)$ et celle-ci engendre avec R le groupe \mathfrak{S}_{m_2+2} , d'après P. 4. Donc S, T est une base du groupe \mathfrak{S}_{m_2+2} .

Si les deux nombres m_1 et $m_2 - m_1$ sont ≥ 3 , on a

$$S T S^{-1} = (1\ m_1 + 1\ m_2 + 1\ m_2 + 2) = T_1,$$

$$S^2 T S^{-2} = (2\ m_1 + 2\ m_2 + 1\ m_2 + 2) = T_2.$$

$$T T_1^{-1} = (1\ m_1\ m_2\ m_2 + 1\ m_1 + 1) = T_3.$$

Les deux substitutions T_2 et T_3 engendrent, d'après P. 1, le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments, donc aussi la transposition $(m_2 + 1\ m_2 + 2)$. Or, d'après P. 4, celle-ci fait avec R une base de \mathfrak{S}_{m_2+2} . Les deux substitutions S et T constituent donc, en tout cas, une base de \mathfrak{S}_{m_2+2} .

3. Supposons maintenant que S est de classe paire et que le nombre total de ses cycles est impair. Deux cas sont à distinguer.

a) Tous les cycles de S sont d'ordre ≤ 2 :

$$S = (1\ 2) (3\ 4) \dots (k-1\ k) (k+1) \dots (n).$$

D'après nos hypothèses, $\frac{k}{2}$ est un nombre pair ≥ 2 et $\frac{k}{2} + n - k$ est un nombre impair ≥ 3 .

Si $S = (1\ 2)(3\ 4)(5)$, posons $T = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$. Ces deux substitutions engendrent, comme on le vérifie aisément, le groupe \mathfrak{S}_5 .

Supposons maintenant que $S \neq (1\ 2)(3\ 4)(5)$. Posons alors

$$T = (2\ 4 \dots k\ k-1\ k+1 \dots n).$$

C'est une substitution de classe impaire.

Je dis que les deux substitutions S, T engendrent le groupe \mathfrak{S}_n . En effet, si S contient deux cycles du second ordre et un nombre impair ≥ 3 de cycles du premier ordre, autrement dit si S est de la forme: $(1\ 2)(3\ 4)(5)(6) \dots (2n+1)$, $(2n+1 \geq 7)$, on a

$$T = (2\ 4\ 3\ 5 \dots 2n+1),$$

$$ST = (1\ 2\ 3\ 5\ 6 \dots 2n+1) = U.$$

La substitution U est de classe impaire.

On a

$$UTU^{-1} = (3\ 4\ 5\ 6 \dots 2n+1\ 1) = T_1.$$

$$TT_1^{-1} = (1\ 2\ 4\ 5\ 3) = R.$$

$$R^{-1} = (3\ 5\ 4\ 2\ 1).$$

$$U^2RU^{-2} = (3\ 5\ 4\ 7\ 6) = R_1.$$

Les deux substitutions R^{-1} et R_1 engendrent, d'après P. 4, le groupe \mathfrak{A}_7 . Elles engendrent donc la substitution $(4\ 5\ 6)$. Or, celle-ci forme avec U , d'après P. 3, une base de \mathfrak{S}_{2n+1} . Il en est donc de même de S et T .

Supposons maintenant que S contient un nombre > 2 de cycles du second ordre. Alors $k \geq 8$ et la substitution T est d'ordre pair ≥ 6 .

On a

$$ST = (1\ 2 \dots k-2\ k-1\ k+1\ k+2 \dots n) = U,$$

$$STS^{-1} = (1\ 3\ 5 \dots k-3\ k-1\ k\ k+1\ k+2 \dots n) = T_1.$$

T et T_1 sont deux substitutions de la forme

$$A = (1\ 2 \dots s\ s+1 \dots t),$$

$$B = (s+1\ s\ s+2 \dots t\ t+1 \dots t+s-1),$$

où t est pair ≥ 6 et $4 \leq s < t-1$.

Je dis que les deux substitutions A et B engendrent toujours le groupe \mathfrak{S}_{t+s-1} . En effet, soit d'abord $s = t-2$.

On a

$$A = (1 \ 2 \dots t), \quad B = (t-1 \ t-2 \ t t+1 \dots 2 \ t-3),$$

$$B A B^{-1} = (1 \ 2 \dots t-3 \ t t-2 \ t+1) = A_1,$$

$$A^{-1} A_1 = C = (t-3 \ t-1 \ t-2 \ t+1 \ t),$$

$$A C A^{-1} = C_1 = (t-2 \ t t-1 \ t+1 \ 1).$$

Les deux substitutions C et C_1 engendrent le groupe alternant des substitutions de leurs éléments. Elles engendrent donc aussi la substitution $(t-1 \ t t+1)$ qui fait avec A , d'après P. 3, une base de \mathfrak{S}_{t+1} . Ce groupe contient la substitution $(1 \ 2 \dots t-2)$ et celle-ci forme avec B une base de \mathfrak{S}_{2t-3} , d'après P. 1. Les deux substitutions A et B engendrent donc aussi le groupe \mathfrak{S}_{2t-3} .

Supposons maintenant que $s < t-2$.

On a

$$B A B^{-1} = (1 \ 2 \dots s-1 \ s+2 \ s s+3 \dots t \ t+1) = A_1,$$

$$A^{-1} A_1 = C = (s-1 \ s+1 \ s s+2) (t \ t+1),$$

$$A C A^{-1} = C_1 = (s s+2 \ s+1 \ s+3) (1 \ t+1).$$

On voit sans peine que les deux substitutions C et C_1 engendrent toujours, par composition, la substitution $(1 \ t t+1)$; celle-ci fait avec A , d'après P. 3, une base du groupe \mathfrak{S}_{t+1} , groupe qui contient la substitution $(1 \ 2 \dots s)$, et cette substitution engendre avec B le groupe \mathfrak{S}_{t+s-1} , d'après P. 1. Donc A, B est une base de \mathfrak{S}_{t+s-1} .

Il s'ensuit que les deux substitutions T et T_1 engendrent toujours le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments. Elles engendrent donc la substitution $(1 \ k \ n)$ qui, avec U , engendre d'après P. 3 le groupe \mathfrak{S}_n . S, T est donc aussi une base de \mathfrak{S}_n dans le cas considéré.

b) L'un au moins des cycles de S est d'ordre supérieur à 2:

$$S = (1 \ 2 \dots m_1) (m_1+1 \dots m_2) \dots (m_{r-1}+1 \dots m_r) (m_r+1) \dots (n),$$

$$r \geq 1, \quad m_r - m_{r-1} \geq 3.$$

Posons

$$T = (m_1 m_2 \dots m_{r-1} m_r m_r - 1 \ m_r + 1 \dots n).$$

Je dis que les deux substitutions S et T engendrent toujours le groupe \mathfrak{S}_n . En effet, d'après nos hypothèses, T est une substitution de classe impaire, d'ordre ≥ 4 .

Supposons d'abord que S contient un seul cycle d'ordre > 1 et deux cycles du premier ordre:

$$(**) \quad S = (1 \ 2 \dots m_1) (m_1 + 1) (m_1 + 2).$$

Le nombre m_1 est impair ≥ 3 .

On a alors

$$T = (m_1 \ m_1 - 1 \ m_1 + 1 \ m_1 + 2),$$

$$ST = (1 \ 2 \dots m_1 - 1 \ m_1 + 1 \ m_1 + 2) = U.$$

Cette substitution est de classe impaire.

Les deux substitutions U et T engendrent toujours, d'après P. 4, le groupe \mathfrak{S}_{m_1+2} . Les substitutions S et T constituent donc bien une base de \mathfrak{S}_{m_1+2} .

Supposons maintenant que S n'est pas de la forme (**).

On a

$$ST = (1 \ 2 \dots m_r - 1 \ m_r + 1 \dots n) = U,$$

$$UTU^{-1} = (m_1 + 1 \ m_2 + 1 \dots m_{r-1} + 1 \ m_r \ m_r + 1 \dots n \ 1) = T_1.$$

Les deux substitutions T et T_1 sont de la forme

$$A = (1 \ 2 \dots s \ s + 1 \dots t),$$

$$B = (s \ s + 2 \dots t \ t + 1 \dots t + s),$$

où t est un nombre pair ≥ 4 et $s = 2$, si $t = 4$, ou est un nombre entier compris au sens large entre 1 et $t - 2$, si $t > 4$.

Je dis que les deux substitutions A et B engendrent toujours le groupe \mathfrak{S}_{t+s} .

En effet, si $t = 4$, on a

$$A = (1 \ 2 \ 3 \ 4), \quad B = (2 \ 4 \ 5 \ 6),$$

et ces deux substitutions engendrent, comme on le vérifie aisément, le groupe \mathfrak{S}_8 .

Supposons maintenant que $t > 4$.

Si $s = 1$, on a

$$A = (1 \ 2 \dots t), \quad B = (1 \ 3 \dots t \ t + 1),$$

$$A^{-1}B = C = (1 \ 2) (t \ t + 1).$$

Les deux substitutions A et C engendrent, d'après P. 5, le groupe \mathfrak{S}_{t+1} .

Il s'ensuit que A et B constituent une base de \mathfrak{S}_{t+1} .

Si $s = 2$, on a

$$A = (1 \ 2 \dots t), \quad B = (2 \ 4 \ 5 \dots t \ t + 1 \ t + 2),$$

$$A^{-1}B = C = (1 \ t \ t + 1 \ t + 2) (2 \ 3),$$

$$BCB^{-1} = C_1 = (1 \ t + 1 \ t + 2 \ 2) (4 \ 3).$$

Les deux substitutions C et C_1 engendrent le groupe alternant des substitutions de leurs éléments, donc aussi la substitution $(t\ t+1\ t+2)$. Or, cette dernière fait avec A , d'après P. 1, une base de \mathfrak{S}_{t+2} . Donc A, B est une base de \mathfrak{S}_{t+2} .

Si $s = t - 2$, on a

$$\begin{aligned} A &= (1\ 2 \dots t), \quad B = (t-2\ t\ t+1 \dots 2t-2), \\ B A B^{-1} &= (1\ 2 \dots t-3\ t\ t-1\ t+1) = A_1, \\ A_1^{-1} A &= C = (t-3\ t-2\ t\ t+1\ t-1). \end{aligned}$$

D'après P. 4, la substitution C engendre avec B le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments. Ce groupe contient la substitution $(t\ t+1 \dots 2t-2)$ qui engendre, d'après P. 1, avec A le groupe \mathfrak{S}_{2t-2} . Donc A, B est bien une base du groupe \mathfrak{S}_{2t-2} .

Si $2 < s < t - 2$, on a

$$\begin{aligned} B A B^{-1} &= A_1 = (1\ 2 \dots s-1\ s+2\ s+1\ s+3 \dots t+1), \\ A_1^{-1} A &= C = (s-1\ s\ s+2\ s+1) (t\ t+1), \\ B C B^{-1} &= C_1 = (s-1\ s+2\ s+3\ s+1) (t+1\ t+2). \end{aligned}$$

On voit sans peine que les deux substitutions C et C_1 engendrent toujours, par composition, la substitution $(t\ t+1\ t+2)$ qui fait avec A , d'après P. 1, une base de \mathfrak{S}_{t+2} . Ce groupe contient la substitution $(1\ 2 \dots s\ s+1)$ qui, avec B , engendre d'après P. 1, le groupe \mathfrak{S}_{t+s} . Donc A, B est une base du groupe \mathfrak{S}_{t+s} .

Ainsi les deux substitutions T et T_1 engendrent dans tous les cas le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments; ce groupe contient la substitutions $(1\ m_r\ n)$ et cette dernière substitution engendre, d'après P. 3, avec U le groupe \mathfrak{S}_n . Donc S, T est bien une base de \mathfrak{S}_n , c. q. f. d.

II. *Supposons maintenant que S ne contient aucun cycle du premier ordre.* Nous pouvons toujours choisir les notations de façon à écrire

$$S = (1\ 2 \dots m_1) (m_1 + 1 \dots m_2) \dots (m_{r-1} + 1 \dots m_r),$$

où $r \geq 1$, le cycle $(m_{r-1} + 1 \dots m_r)$ étant d'ordre non inférieur à celui de tous les autres cycles de S .

1. Supposons d'abord que l'un au moins des cycles de S est d'ordre > 3 , donc $m_r - m_{r-1} \geq 4$.

a) Si S est de classe impaire ou si elle est de classe paire mais si le nombre total de ses cycles est impair, posons

$$T = (m_1\ m_2 \dots m_{r-1}\ m_r\ m_r - 1).$$

Je dis que les deux substitutions S et T engendrent le groupe \mathfrak{S}_{m_r} .

En effet, on a

$$ST = (1\ 2\ \dots\ m_r - 1) = U,$$

$$UTU^{-1} = (m_1 + 1\ m_2 + 1\ \dots\ m_{r-1} + 1\ m_r\ 1) = T_1.$$

Les deux substitutions T et T_1 engendrent, d'après P. 1, le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions de leurs éléments. Elles engendrent donc en tout cas la substitution $(1\ m_r - 1\ m_r)$ et celle-ci engendre avec U , d'après P. 3, le groupe \mathfrak{S}_{m_r} ou le groupe \mathfrak{A}_{m_r} . Il s'ensuit que les deux substitutions S, T , dont l'une au moins est de classe impaire, engendrent nécessairement le groupe \mathfrak{S}_{m_r} .

b) Si la substitution S est de classe paire et si le nombre total de ses cycles est pair, posons

$$T = (m_1\ m_2\ \dots\ m_{r-1}\ m_r\ m_r - 1\ m_r - 2).$$

Cette substitution est de classe impaire et d'ordre ≥ 4 .

Je dis que S, T est une base de \mathfrak{S}_{m_r} .

En effet, supposons d'abord que S est de la forme

$$(1\ 2\ \dots\ m_1)(m_1 + 1\ \dots\ m_2),$$

où m_1 et m_2 sont simultanément pairs ou impairs, $m_1 \geq 2$ et $m_2 - m_1 \geq 4$. Dans ce cas

$$T = (m_1\ m_2\ m_2 - 1\ m_2 - 2).$$

Si $m_1 = 2$, on a $m_2 \geq 6$. Supposons d'abord que $m_2 = 6$. On a alors $T = (2\ 6\ 5\ 4)$, $ST = (1\ 2\ 3\ 4)$. Les deux substitutions T et ST engendrent le groupe \mathfrak{S}_6 . Il en est donc de même de S et T . Supposons maintenant que $m_1 = 2$ et $m_2 > 6$. Comme m_2 est pair, on a $m_2 \geq 8$.

$$T = (2\ m_2\ m_2 - 1\ m_2 - 2),$$

$$ST = (1\ 2\ \dots\ m_2 - 2),$$

$$STS^{-1} = T_1 = (1\ 3\ m_2\ m_2 - 1),$$

$$TT_1^{-1} = R = (1\ m_2 - 2\ 2\ m_2\ 3),$$

$$S^3TS^{-3} = T_2 = (1\ 5\ 4\ 3).$$

Les deux substitutions R et T_2 engendrent, d'après P. 4, le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments, groupe qui contient la transposition $(1\ m_2)$. Or, on voit aisément, en s'appuyant sur les propositions P. 1 et P. 6, que cette transposition engendre avec les substitutions ST et T le groupe \mathfrak{S}_{m_2} . S, T est donc bien une base de \mathfrak{S}_{m_1} .

Si $m_1 = 4$, $m_2 = 8$, on a

$$S = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8),\quad T = (4\ 8\ 7\ 6),$$

$$ST = U = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6),$$

$$SU^3 = (2\ 6\ 4)(3\ 7\ 8\ 5),$$

$$(SU^3)^4 = (2\ 6\ 4) = R.$$

Les deux substitutions R et T engendrent, d'après P. 4, le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments, donc aussi la substitution $(6\ 7\ 8)$. Or, celle-ci engendre, d'après P. 1, avec U le groupe \mathfrak{S}_8 . S, T forme donc bien une base de \mathfrak{S}_8 .

Dans tous les autres cas, on a $m_1 \geq 3, m_2 \geq 8$.

On a alors

$$ST = (1\ 2 \dots m_2 - 2) = U,$$

$$S^2 TS^{-2} = (2\ m_1 + 2\ m_1 + 1\ m_2) = T_1.$$

Les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments, elles engendrent donc la substitution $(m_2 - 2\ m_2 - 1\ m_2)$ qui fait avec U , d'après P. 1, une base de \mathfrak{S}_{m_2} . S, T est donc bien une base de \mathfrak{S}_{m_2} .

Supposons maintenant que S n'est pas composée de deux cycles.

On a

$$ST = (1\ 2 \dots m_r - 2) = U,$$

$$STS^{-1} = (1\ m_1 + 1 \dots m_{r-1} + 1\ m_r\ m_r - 1) = T_1.$$

Les deux substitutions T et T_1 engendrent toujours, d'après P. 4, le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments, donc aussi la substitution $(m_r - 2\ m_r - 1\ m_r)$ et celle-ci engendre avec U , d'après P. 1, le groupe \mathfrak{S}_{m_r} . Donc S, T est une base de \mathfrak{S}_{m_r} aussi dans ce cas, c. q. f. d.

2. Supposons maintenant qu'aucun cycle de S n'est d'ordre > 3 , mais que l'un au moins de ces cycles est du 3^{me} ordre.

Si S est de classe impaire ou si elle est de classe paire, mais si le nombre total de ses cycles est impair, posons $T = (m_1\ m_2 \dots m_r\ m_r - 1)$. Par un raisonnement identique à celui fait dans le cas II, 1, a, on démontre que S, T est une base de \mathfrak{S}_{m_r} .

Supposons maintenant que la substitution S est de classe paire et que le nombre de ses cycles est pair. Soit

$$S = (1\ 2 \dots m_1) (m_1 + 1 \dots m_2) \dots (m_r - 2\ m_r - 1\ m_r).$$

Ici $r \geq 2$ et $m_r - 2 = m_{r-1} + 1$.

Si $S = (1\ 2\ 3) (4\ 5\ 6)$, posons $T = (1\ 2) (3\ 4\ 5)$. Ces deux substitutions engendrent le groupe \mathfrak{S}_6 .

Si $S \neq (1\ 2\ 3) (4\ 5\ 6)$, posons $T = (m_1\ m_2 \dots m_{r-1}\ m_r\ m_r - 1\ m_r - 2)$. Cette substitution est de classe impaire. Je dis que les deux substitutions S, T engendrent toujours le groupe \mathfrak{S}_{m_r} .

En effet, on a

$$ST = (1\ 2 \dots m_r - 2) = U,$$

$$UTU^{-1} = (m_1 + 1\ m_2 + 1 \dots m_{r-2} + 1\ m_r - 2\ m_r, m_r - 1\ 1) = T_1.$$

Les deux substitutions T et T_1 sont de la forme

$$A = (1\ 2 \dots t),$$

$$B = (t\ t - 2\ t - 1\ t + 1 \dots 2\ t - 3),$$

où t est un nombre pair ≥ 6 . Je dis que les deux substitutions A et B engendrent toujours le groupe \mathfrak{S}_{2t-3} . En effet, on a

$$A^3 B A^{-3} = B_1 = (3\ 1\ 2\ t + 1 \dots 2\ t - 3)$$

et les deux substitutions B et B_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments, d'après P. 4. Elles engendrent donc en tout cas la substitution $(1\ t + 1 \dots 2\ t - 3)$ qui, avec A , forme, d'après P. 1 une base de \mathfrak{S}_{2t-3} . Il en donc de même des substitutions A, B .

Il s'ensuit que les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments, donc aussi la substitution $(m_r - 2\ m_r - 1\ m_r)$ et, d'après P. 1, cette substitution engendre avec U le groupe \mathfrak{S}_{m_r} . Les deux substitutions S, T forment donc bien une base du groupe \mathfrak{S}_{m_r} .

3. Supposons enfin que tous les cycles de S sont du second ordre:

$$S = (1\ 2)\ (3\ 4) \dots (n - 1\ n),$$

(n est pair).

Si $S = (1\ 2)\ (3\ 4)$, il n'existe aucune substitution T du groupe \mathfrak{S}_4 qui fasse avec S une base de \mathfrak{S}_4 .

Si $S = (1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 6)$, on vérifie aisément que la substitution $T = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ engendre avec S le groupe \mathfrak{S}_6 .

Si $S = (1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 6)\ (7\ 8)$, posons $T = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$. Les deux substitutions S et T engendrent le groupe \mathfrak{S}_8 .

Soit $n > 8$.

Si le nombre total $\frac{n}{2}$ de cycles de S est impair, posons $T = (2\ 4 \dots n - 2\ n\ n - 1)$. Je dis que les deux substitutions S et T engendrent le groupe \mathfrak{S}_n . En effet, on a

$$ST = U = (1\ 2 \dots n - 1),$$

$$STS^{-1} = (1\ 3 \dots n - 3\ n - 1\ n),$$

$$(STS^{-1})^{-1} = (n\ n - 1\ n - 3 \dots 3\ 1) = T_1,$$

et les deux substitutions T et T_1 engendrent toujours, d'après P. 4, le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments, donc aussi la transposition

$(n-1\ n)$; or, celle-ci fait avec U une base de \mathfrak{S}_n . Donc S, T est une base de \mathfrak{S}_n dans le cas considéré.

Si le nombre $\frac{n}{2}$ est pair (il est alors ≥ 6), posons $T = (2\ 4\ 6 \dots n-2\ n-3\ n\ n-1)$. Il vient $ST = (1\ 2 \dots n-3\ n-1) = U$.

On a

$$STS^{-1} = (1\ 3\ 5 \dots n-3\ n-2\ n-1\ n) = T_1.$$

Les deux substitutions T et T_1 sont de la forme

$$A = (1\ 2 \dots t),$$

$$B = (t-2\ t-3\ t\ t-1\ t+1 \dots 2t-4),$$

où t est un nombre pair ≥ 8 , donc $t-4 \geq 4$.

On a alors

$$B^4 A B^{-4} = (1\ 2 \dots t-4\ t+2\ t+1\ t+4\ t+3) = A_1.$$

Les deux substitutions A et A_1 engendrent toujours le groupe \mathfrak{S}_{t-4} , d'après P. 4; il en est donc de même de A et B .

Donc les deux substitutions T et T_1 engendrent toujours le groupe symétrique des substitutions de leurs éléments, donc aussi la substitution $(n-2\ n-1\ n)$; d'après P. 1, cette dernière substitution forme avec U une base du groupe \mathfrak{S}_n . Donc S, T est aussi une base de \mathfrak{S}_n , c. q. f. d. La proposition I est ainsi établie.

Proposition II. Quel que soit le nombre entier $n \geq 4$, il existe pour toute substitution non identique S du groupe \mathfrak{A}_n au moins une substitution T du groupe \mathfrak{A}_n qui forme avec S une base de \mathfrak{A}_n .

Démonstration. I. *Supposons d'abord que S contient au moins un cycle du premier ordre.* Comme $S \neq 1$, cette substitution contient au moins un cycle d'ordre > 1 . Nous pouvons toujours choisir les notations de façon à écrire

$$S = (1\ 2 \dots m_1)(m_1+1\ m_1+2 \dots m_2) \dots (m_{r-1}+1 \dots m_r)(m_r+1) \dots (n),$$

où $r \geq 1$, les r premiers cycles sont d'ordre > 1 , $n > m_r$ et le cycle $(m_{r-1}+1 \dots m_r)$ est d'ordre non inférieur à celui de tous les autres cycles de S .

1. Si le nombre de cycles de S est impair, posons

$$T = (m_1\ m_2 \dots m_r\ m_r+1 \dots n).$$

On a

$$ST = (1\ 2 \dots n),$$

$$STS^{-1} = (1\ m_1+1 \dots m_{r-1}+1\ m_r+1 \dots n) = T_1.$$

Les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions de leurs éléments, d'après P. 4. Or ce groupe contient la substitution

(1 $n-1$ n) qui, avec ST , engendre le groupe \mathfrak{A}_n , d'après P. 2. Il s'ensuit que S, T est bien une base de \mathfrak{A}_n dans le cas considéré.

2. Supposons maintenant que le nombre de cycles de S est pair.

Deux cas sont alors à distinguer:

a) Tous les cycles de S sont d'ordre ≤ 2 .

b) L'un au moins des cycles de S est d'ordre > 2 .

Dans le cas a), S est de la forme

$$(1\ 2)(3\ 4)\dots(k-1\ k)(k+1)\dots(n),$$

où $\frac{k}{2}$ est un nombre pair ≥ 2 (donc k est pair ≥ 4) et n est un nombre pair $\geq k+2$ (donc ≥ 6).

Posons

$$T = (2\ 4\dots k-2\ k\ k-1\ k+1\dots n).$$

Je dis que les deux substitutions S et T engendrent toujours le groupe \mathfrak{A}_n . En effet, on a

$$ST = U = (1\ 2\dots k-1\ k+1\dots n),$$

$$UTU^{-1} = T_1 = (1\ 3\ 5\dots k-1\ k\ k+1\dots n).$$

Les deux substitutions T et T_1 sont de la forme

$$A = (1\ 2\dots s\ s+1\dots t),$$

$$B = (s+1\ s\ s+2\dots t\ t+1\dots t+s-1),$$

où t est un nombre impair ≥ 5 et $2 \leq s \leq t-3$.

Je dis que les deux substitutions A et B engendrent toujours le groupe \mathfrak{A}_{t+s-1} .

En effet, si $s=2$, on a

$$B = (3\ 2\ 4\dots t\ t+1),$$

$$AB^{-1} = C = (1\ 2\ 4\ 3\ t+1),$$

$$ACA^{-1} = C_1 = (2\ 3\ 5\ 4\ t+1).$$

Les deux substitutions C et C_1 engendrent le groupe alternant des substitutions de leurs éléments, donc aussi la substitution $(1\ 2\ t+1)$. Celle-ci forme avec A , d'après P. 3, une base de \mathfrak{A}_{t+1} . Il en est donc de même de A et B .

Si $s > 2$, donc $t \geq 7$, on a

$$BAB^{-1} = A_1 = (1\ 2\ 3\dots s-1\ s+2\ s\ s+3\dots t\ t+1).$$

Alors, si $s+3=t$, on a

$$A^{-1}A_1 = C = (t-4\ t-2\ t-3\ t-1)(t\ t+1),$$

$$ACA^{-1} = C_1 = (t-3\ t-1\ t-2\ t)(t\ t+1).$$

Les deux substitutions C et C_1 engendrent le groupe alternant des substitutions de leurs éléments, donc aussi la substitution $(1\ t\ t+1)$; si $s+3 < t$, on a

$$\begin{aligned} A^{-1} A_1 &= C = (s-1\ s+1\ s\ s+2)\ (t\ t+1), \\ A C A^{-1} &= C_1 = (s\ s+2\ s+1\ s+3)\ (t\ t+1) = C_1, \\ (C C_1)^{30} &= (1\ t\ t+1). \end{aligned}$$

Dans les deux cas, la substitution $(1\ t\ t+1)$ engendre, d'après P. 3, avec A le groupe \mathfrak{A}_{t+1} . Or, ce groupe contient la substitution $(1\ 2\ \dots\ s+1\ s\ s+2\ \dots\ t)$ qui engendre avec B le groupe \mathfrak{A}_{t+s-1} , d'après P. 4 et, par conséquent A et B engendrent bien le groupe \mathfrak{A}_{t+s-1} .

Il s'ensuit que les deux substitutions T et T_1 engendrent dans tous les cas le groupe alternant des substitutions de leurs éléments; elle engendrent donc la substitution $(k-1\ k\ k+1)$ et, d'après P. 3, celle-ci forme avec U une base de \mathfrak{A}_n . Donc S , T est bien une base de \mathfrak{A}_n .

Dans le cas b), S est de la forme

$$(1\ 2\ \dots\ m_1) \dots (m_{r-1} + 1\ \dots\ m_r) (m_r + 1) \dots (n),$$

où $r \geq 1$, $m_r - m_{r-1} \geq 3$, $n \geq m_r + 1$.

Posons $T = (m_1\ m_2\ \dots\ m_r\ m_r - 1\ m_r + 1\ \dots\ n)$. C'est une substitution de classe paire et d'ordre ≥ 3 . Je dis que les deux substitutions S et T engendrent toujours le groupe \mathfrak{A}_n .

En effet, si S contient un seul cycle d'ordre > 1 , les deux substitutions S et T engendrent toujours le groupe \mathfrak{A}_n , d'après P. 4. Supposons maintenant que $r > 1$. Le nombre de cycles de S est alors ≥ 4 , T est d'ordre ≥ 5 et on a

$$S T = (1\ 2\ \dots\ m_r - 1\ m_r + 1\ \dots\ n) = U,$$

$$U T U^{-1} = (m_1 + 1\ m_2 + 1\ \dots\ m_{r-1} + 1\ m_r\ m_r + 1\ \dots\ n\ 1) = T_1.$$

Les deux substitutions T et T_1 sont de la forme

$$\begin{aligned} A &= (1\ 2\ \dots\ s\ s+1\ \dots\ t), \\ B &= (s\ s+2\ \dots\ t\ t+1\ \dots\ t+s), \end{aligned}$$

où t est un nombre impair ≥ 5 et $2 \leq s \leq t-2$.

Je dis que les deux substitutions A et B engendrent toujours le groupe \mathfrak{A}_{t+s} . En effet, on a

$$B A B^{-1} = (1\ 2\ \dots\ s-1\ s+2\ s+1\ s+3\ \dots\ t+1) = A_1.$$

Posons

$$C = A^{-1} A_1, \quad C_1 = A C A^{-1}.$$

Si $s = t - 2$, on a

$$C = (t - 3 \ t - 1 \ t + 1 \ t \ t - 2),$$

$$C_1 = (t - 2 \ t \ t + 1 \ 1 \ t - 1).$$

Si $s \neq t - 2$, on a

$$C = (s - 1 \ s + 1 \ s + 2 \ s) (t \ t + 1),$$

$$C_1 = (s \ s + 2 \ s + 3 \ s + 1) (1 \ t + 1).$$

On vérifie aisément que dans tous les cas, les deux substitutions C et C_1 engendrent la substitution $(1 \ t \ t + 1)$ qui, avec A , fait, d'après P. 3, une base du groupe \mathfrak{A}_{t+1} . On en déduit tout de suite que A et B forment une base du groupe \mathfrak{A}_{t+s} , c. q. f. d.

II. *Supposons maintenant que S ne contient aucun cycle du premier ordre.*

Les cas suivants sont alors à distinguer:

1. *S ne contient que des cycles du second ordre.*

Alors le nombre de cycles de S est forcément pair, puisque cette substitution est de classe paire.

Soit

$$S = (1 \ 2) (3 \ 4) \dots (n - 1 \ n).$$

Posons

$$T = (2 \ 4 \ 6 \dots n \ n - 1).$$

Cette substitution est de classe paire et d'ordre ≥ 3 . Je dis qu'elle fait toujours avec S une base du groupe \mathfrak{A}_n . En effet, on a

$$S T = (1 \ 2 \dots n - 1),$$

$$S T S^{-1} = (1 \ 3 \ 5 \dots n - 1 \ n) = T_1.$$

T et T_1 engendrent toujours, d'après P. 4, le groupe alternant des éléments correspondants. Elles engendrent donc aussi la substitution $(n - 2 \ n - 1 \ n)$ qui fait, d'après P. 3, avec $S T$, une base du groupe \mathfrak{A}_n . Il en est donc de même de S et T , c. q. f. d.

2. *S contient au moins un cycle d'ordre > 2 et le nombre de cycles de S est pair. Donc S contient au moins deux cycles.*

Soit

$$S = (1 \ 2 \dots m_1) (m_1 + 1 \dots m_2) \dots (m_{r-1} + 1 \dots m_r),$$

où $r \geq 2$ et pair et $m_r - m_{r-1} \geq 3$.

Posons

$$T = (m_1 \ m_2 \dots m_r \ m_r - 1).$$

On a

$$ST = (1\ 2 \dots m_r - 1) = U.$$

$$ST S^{-1} = (1\ m_1 + 1 \dots m_{r-1} + 1\ m_r) = T_1.$$

Les deux substitutions T et T_1 engendrent, d'après P. 1, le groupe alternant des substitutions de leurs éléments. Elles engendrent donc aussi la substitution $(1\ m_r - 1\ m_r)$ qui, avec U , engendre d'après P. 3 le groupe \mathfrak{A}_n . Ainsi S, T est toujours une base du groupe \mathfrak{A}_n .

3. S contient au moins un cycle d'ordre > 2 et le nombre total de ses cycles est impair.

Supposons d'abord que S est composé d'un seul cycle. Ce cycle est nécessairement d'ordre ≥ 5 , puisque S est de degré non inférieur à 4. Soit $S = (1\ 2 \dots n)$, $n \geq 5$. Posons $T = (1\ 2\ 3)$. Les deux substitutions S et T engendrent d'après P. 2 le groupe \mathfrak{A}_n .

Supposons maintenant que le nombre de cycles de S est > 1 . Il est donc ≥ 3 et l'un au moins de ces cycles est d'ordre ≥ 3 .

Soit $S = (1\ 2 \dots m_1)(m_1 + 1 \dots m_2) \dots (m_{r-1} + 1 \dots m_r)$, où $r \geq 3$ et $m_r - m_{r-1} \geq 3$.

Posons $T = (m_1\ m_2 \dots m_r\ m_r - 1\ m_r - 2)$. Je dis que S, T est une base de \mathfrak{A}_{m_r} . En effet, on a

$$ST = (1\ 2 \dots m_r - 2),$$

$$ST S^{-1} = (1\ m_1 + 1 \dots m_{r-1} + 1\ m_r\ m_r - 1) = T_1.$$

Si $m_r - 2 \neq m_{r-1} + 1$, il résulte de P. 4 que les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe alternant des substitutions de leurs éléments. Elles engendrent donc la substitution $(m_r - 2\ m_r - 1\ m_r)$ qui, avec ST , engendre le groupe \mathfrak{S}_{m_r} . Donc S, T est une base de \mathfrak{S}_{m_r} dans ce cas. Supposons maintenant que $m_r - 2 = m_{r-1} + 1$. Alors les deux substitutions T et T_1 sont de la forme

$$A = (1\ 2 \dots t - 2\ t - 1\ t),$$

$$B = (t\ t - 2\ t - 1\ t + 1 \dots 2\ t - 3),$$

où t est un nombre impair ≥ 5 . Je dis que les deux substitutions A et B engendrent toujours le groupe \mathfrak{A}_{2t-2} . En effet, on a

$$BAB^{-1} = (1\ 2 \dots t - 3\ t - 1\ t + 1\ t - 2) = A_1,$$

$$A^{-1}A_1 = C = (t - 3\ t - 2\ t - 1\ t + 1),$$

$$ACA^{-1} = C_1 = (t - 2\ t - 1\ 1\ t + 1).$$

On voit sans peine que les deux substitutions C et C_1 engendrent le groupe alternant des substitutions de leurs éléments. Elles engendrent donc aussi la substitution $(t-1 \ t \ t+1)$ qui avec A engendre, d'après P. 3, le groupe \mathfrak{A}_{t+1} . On en déduit sans peine que les substitutions A et B engendrent bien le groupe \mathfrak{A}_{2t-3} . Il en résulte que les deux substitutions T et T_1 engendrent toujours le groupe alternant des substitutions de leurs éléments. Elles engendrent donc la substitution $(m_r-2 \ m_r-1 \ m_r)$ qui, d'après P. 1, fait avec ST une base de \mathfrak{A}_{m_r} . S, T est donc également une base de \mathfrak{A}_{m_r} . La proposition II est ainsi établie.

(Eingegangen am 1. 10. 1938.)

Über den Begriff der „Pseudogruppe von Transformationen“.

Von

St. Gołąb in Kraków (Polen).

Einleitung.

Zwei unabhängige Gründe hatten zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen. Der eine war der folgende. Seit längerer Zeit habe ich bemerkt, daß in der Theorie der Transformationsgruppen manchmal mit dem Namen „Gruppe“ solche Mengen von Transformationen versehen werden, die eigentlich keine Gruppe bilden. Ich habe mich also bemüht, den Begriff der Gruppe so zu verallgemeinern, daß auch die erwähnten Fälle in den Rahmen der allgemeinen Theorie einbezogen werden können.

Andererseits verursachten die in den letzten Zeiten entwickelten Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrien, die auf dem Begriff der Transformationsgruppe wurzeln, insbesondere die Entwicklung und Präzisierung des Begriffes des geometrischen Objektes, daß der klassische Begriff der Transformationsgruppe einigen Versuchen der Verallgemeinerung unterworfen wurde. Genau formuliert und mit einem neuen Namen der „Pseudogruppe“ versehen, tritt diese Verallgemeinerung zum erstenmal auf in dem Büchlein von Veblen-Whitehead „*The foundations of differential geometry*“, Cambridge Tracts 29 (1932) auf den Seiten 37 und 38. Ferner bedienen sich dieses Begriffes Schouten und Haantjes in ihrer Arbeit „*On the theory of the geometric object*“, Proc. of the Lond. Math. Soc. 42 (1937). Wie wir aber unten sehen werden, kann uns die Formulierung des Begriffes der Pseudogruppe von Transformationen, die von den erwähnten Autoren gegeben ist, nicht befriedigen, und zwar vom theoretischen Standpunkte aus.

Das Ziel dieser Untersuchung ist es nun, in axiomatischer Form eine Präzisierung des Begriffes der Pseudogruppe von Transformationen zu geben. Für die Zwecke der Theorie der geometrischen Objekte genügt der allgemeinere Begriff, der in der Gruppe I von Axiomen enthalten ist. Der engere Begriff der Pseudogruppe wird durch die Gesamtheit II von Axiomen definiert. Sie entspringt der Tendenz, eine solche Definition der Pseudogruppe zu konstruieren, welche durch einen typischen Prozeß der Abstraktion (mit Hilfe einer Äquivalenzrelation) eine abstrakte Gruppe im klassischen Sinne einzuführen ermöglicht. Die so definierte Pseudogruppe

umfaßt diejenigen Fälle, die bis jetzt der strengen Definition der endlichen stetigen Transformationsgruppe entkamen.

Dem eigentlichen Thema geht ein einfaches Beispiel voran, welches zeigen soll, daß nicht jede Menge von Transformationen, die üblicherweise als Gruppe erklärt wird, in der Tat eine Gruppe ist.

Ein Beispiel.

Bezeichne x eine Variable, die alle reellen (bzw. komplexen) Werte durchlaufen soll. Ferner sollen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige reelle (bzw. komplexe) Zahlen bedeuten, die nur der Ungleichheit

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

genügen müssen.

Wenn nun

$$(2) \quad \bar{x} = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

gesetzt wird, so kann man die obige Relation als Transformation im Gebiete des reellen (bzw. komplexen) Zahlkörpers auffassen, die der Zahl x die neue Zahl \bar{x} zuordnet. Durchlaufen die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle möglichen Systeme, die nur der Bedingung (1) genügen, so bekommen wir eine Menge von Transformationen, von der man üblicherweise sagt, daß sie eine *Gruppe* bildet. Es ist aber *nicht* der Fall. Man darf nämlich nicht vergessen, daß jede Funktion — und eine Transformation ist nichts anderes als eine Funktion spezieller Art — definitionsgemäß eine Vorschrift bildet, die jedem Element einer *gegebenen* Menge (eines sogenannten *Existenzgebietes*) in eindeutiger Weise ein Element eines (anderen oder desselben) Gebietes zuordnet. Im Begriff der Funktion steckt also das Existenzgebiet als Bestandteil. Ist die Funktion mit Hilfe eines analytischen Ausdrucks gegeben, so wird üblich als Existenzgebiet stillschweigend dasjenige Gebiet angenommen, das aus allen diesen Werten der Variable besteht, für welche der analytische Ausdruck einen Sinn besitzt. Das so gemeinte Existenzgebiet kann aber willkürlich eingeschränkt werden, wenn es die Umstände fordern.

Kehren wir aber zu unserem Beispiel zurück. Wenn hier keine zusätzlichen Annahmen über die Einschränkung des Existenzgebietes der vorhandenen Transformationen gemacht werden, so versteht sich von selbst, daß im Falle $\gamma = 0$ das Existenzgebiet aus allen Zahlen, und im Falle $\gamma \neq 0$ aus allen mit Ausnahme der einzigen $-\frac{\delta}{\gamma}$ besteht¹⁾.

¹⁾ Wir stehen hier nicht auf dem Standpunkt der projektiven Mannigfaltigkeit, und deswegen gibt es für uns keine unendlich fernen Punkte.

Betrachten wir jetzt die zwei folgenden Transformationen aus unserer Menge:

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{1}{x} \quad (\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 0)$$

und

$$(4) \quad \bar{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x} - 1} \quad (\bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = 1, \bar{\gamma} = 1, \bar{\delta} = -1).$$

Setzen wir die beiden Transformationen zusammen (in der Reihenfolge, die durch die Wahl der Bezeichnungen bestimmt wird), so bekommen wir die Transformation:

$$(5) \quad \bar{\bar{\bar{x}}} = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1}.$$

Die rechte Seite der letzten Formel darf nicht in die einfachere

$$(6) \quad \frac{x}{1-x}$$

umgeformt werden, und zwar deswegen, weil die Funktion (6) für $x = 0$ erklärt ist, während die zusammengesetzte Transformation (5) für zwei Werte: 1 und 0 nicht definiert ist. Die Transformation (5) gehört also nicht zu der Menge (2). Die Menge (2) bildet also keine Gruppe. Im ersten Augenblick könnte man glauben, daß sich dieser Nachteil durch folgendes Verfahren beseitigen ließe. Wir erweitern die Menge \mathfrak{M} der Transformationen (2) zu einer Menge \mathfrak{M}' , die dadurch entsteht, daß zu \mathfrak{M} eine jede solche Transformation gehören soll, die aus einer gewissen Transformation der Menge \mathfrak{M} durch künstliche Einschränkung des Existenzgebietes hervorgeht. Wird die so entstandene Menge \mathfrak{M}' von Transformationen eine Gruppe bilden? Nach kurzem Überlegen müssen wir diese Frage verneinen. Es zeigt sich nämlich, daß wir in eine andere Schwierigkeit hineingefallen sind: es gibt in \mathfrak{M}' Transformationen, die sich überhaupt nicht zusammensetzen lassen, da der Wertebereich der ersten mit dem Existenzgebiet der zweiten nichts Gemeinsames hat. Es wird sich zeigen, daß die Menge \mathfrak{M}' im Sinne der folgenden Definition eine Pseudogruppe bildet.

Der Begriff der Pseudogruppe bei Veblen-Whitehead und bei Schouten-Haantjes.

Wie wir schon erwähnt hatten, geht die Einführung des Begriffes der Pseudogruppe von Transformationen auf Veblen-Whitehead zurück.

Zwar lesen wir schon in dem Enzyklopädieartikel von G. Fano²⁾ die folgenden Worte:

²⁾ Enc. d. Math. Wiss. III A B, 4b, S. 292.

„Eine endliche oder unendliche Mannigfaltigkeit von Transformationen kann die Eigenschaft haben, daß je zwei dieser Transformationen, *sofern sie zusammengesetzt* (d. h. nacheinander ausgeführt) *werden können* ³⁾, immer wieder eine Transformation derselben Mannigfaltigkeit ergeben“,

in denen die Spur des Begriffes der Pseudogruppe wahrgenommen werden kann, zum erstenmal tritt jedoch dieser Begriff genau bei Veblen-Whitehead auf. Wir geben ihre Definition wörtlich an:

„A set of transformations will be called a pseudogroup if it satisfies the conditions:

- (i) If the resultant of two transformations in the set exists, it is also in the set.
- (ii) The set contains the inverse of each transformation in the set.“

Dabei bemerken die Verfasser ausdrücklich, wann die zusammengesetzte Transformation existiert. Sie existiert dann und nur dann, wenn die Mengen Y und Y' identisch sind, wo Y den Wertbereich der ersten, Y' das Existenzgebiet der zweiten Transformation bedeuten.

Im Sinne der obigen Definition bildet zwar die Menge \mathfrak{M}' aus unserem Beispiel eine Pseudogruppe, aber nur dank der Tatsache, daß die Definition in trivialer Weise erfüllt ist. Nehmen wir nämlich zwei beliebige Transformationen aus der Menge \mathfrak{M}' , so fällt im allgemeinen $Y \neq Y'$ aus, woraus folgt, daß die Zusammensetzung der beiden Transformationen im allgemeinen nicht existieren wird.

Schouten und Haantjes ersetzen die Bedingung (i) durch die folgende allgemeinere:

- (i*) „Two transformations give a resultant transformation⁴⁾ if and only if the second region of the first transformation (Y) and the first region of the second transformation (Y') have a region in common.“

Im Sinne der letzten Definition bildet die Menge \mathfrak{M}' aus unserem Beispiel eine Pseudogruppe, und zwar nicht in trivialer Weise wie früher.

Hilfsbetrachtungen und Bezeichnungen.

Bekanntlich wird die Gruppe als eine Menge von irgendwelchen Elementen definiert, zwischen welchen eine Operation der sogenannten Zusammensetzung erklärt ist. Diese Zusammensetzung wird üblich als Grundbegriff ohne explizite Definition angenommen, der nur eine geringe Anzahl von Grundpropositionen (Axiomen) erfüllen soll.

³⁾ Die Hervorhebung rührt von mir her.

⁴⁾ belonging to the set (meine Anmerkung).

Diesem Standpunkt folgend, werden wir auch den Begriff der Pseudogruppe axiomatisch feststellen. Da aber bei uns die Elemente der Grundmenge Transformationen sein werden, so wird der Begriff der Zusammensetzung definiert und nicht als Grundbegriff angenommen. Wir beginnen unsere Betrachtungen mit der Angabe der Basis und der Feststellung der Bezeichnungen.

Es sei ein abstrakter topologischer Raum E von Elementen irgendwelcher Art gegeben, in welchem der Begriff der Umgebung definiert ist. Wir setzen voraus, daß der Begriff der Umgebung die wohlbekannten Hausdorffschen Axiome erfüllt. Damit wird also auch der Begriff der *offenen Menge* festgestellt.

Die Elemente von E werden wir kurz Punkte nennen und mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen.

Die Untermengen von E werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Die offenen Untermengen von E sollen mit den großen lateinischen Buchstaben D , B , U (eventuell mit Indizes versehen) bezeichnet werden.

Wir werden eindeutige Abbildungen der Untermengen von E auf Untermengen von E betrachten. Diese Abbildungen, die wir weiterhin Transformationen nennen, werden kurz mit dem Kernbuchstaben T symbolisiert. Eine jede solche Transformation T besitzt ihr Existenzgebiet M , das eine Untermenge von E bildet. Bezeichnet x den laufenden Punkt von M , so ist $T(x)$ dasjenige eindeutig bestimmte Element von E , das dem Element x auf Grund der Transformation T entspricht. Der Wertbereich von T , das auch Bild der Menge M vermöge T genannt wird, soll mit $B(M; T)$ oder kurz $B(M)$ oder auch $B(T)$ bezeichnet werden. Im Bedarfsfalle wird das Symbol des Existenzgebietes der Transformation T hinter T in Klammern eingesetzt. $T(M)$ bedeutet also eine Transformation, deren Existenzgebiet M ist.

$J(M)$ bedeutet eine identische Transformation mit M als Existenzgebiet. $T_1(M) \equiv T_2(M)$ soll bedeuten, daß beide Transformationen T_1 und T_2 in M zusammenfallen, d. h. daß für jedes x aus M : $T_1(x) = T_2(x)$ ist.

Wir entnehmen ferner den Grundlagen der Logik und der Mengenlehre die folgenden üblichen Bezeichnungen:

$\stackrel{\text{def}}{=}$ lesen wir: „bedeutet nach Definition“,

\supset Implikationszeichen,

$\hat{x} : \varphi(x)$ bedeutet die Menge aller Elemente \hat{x} , die die Bedingung φ erfüllen,

$(\exists x) \{ \varphi(x) \}$ bedeutet: es gibt solche x , die die Bedingung φ erfüllen,

$a \in M$ bedeutet: a gehört zu M ,

$M_1 \subset M_2$ bedeutet: M_1 ist eine Teilmenge von M_2 ,

$M \neq 0$ bedeutet: M ist eine nicht leere Menge,

$M_1 \cap M_2$ bedeutet den Durchschnitt der Mengen M_1 , M_2 .

Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein.

$D \in \mathfrak{M}$ soll bedeuten, daß die Menge D offen ist.

Ist $T(D_1)$ eine Transformation und ist $D_2 \subset D_1$, so bezeichnen wir mit $T(D_2)$ diejenige *eindeutig* bestimmte Transformation T_2 mit D_2 als Existenzgebiet, die die Eigenschaft

$$(7) \quad x \in D_2 \supset T_2(x) = T(x)$$

hat. Da T_2 durch Angabe von D_2 bei gegebenem T eindeutig bestimmt ist, dürfen wir den Index 2 bei T weglassen. Wir werden $T_2(D_2)$ kurz: „*Einschränkung von T auf D_2* “ nennen und schreiben: $T_2 \subset T$. Bildet T_2 eine Einschränkung von T_1 , so werden wir T_1 „*Erweiterung von T_2* “ nennen. Es soll bemerkt werden, daß, während die eingeschränkte Transformation T_2 durch Angabe von T_1 und D_2 eindeutig bestimmt ist, umgekehrt die erweiterte Transformation T_1 durch Angabe von T_2 und D_1 keineswegs eindeutig bestimmt ist.

Pseudogruppen im weiteren Sinne.

Zunächst definieren wir die Zusammensetzung von zwei Transformationen $T_1(M_1)$ und $T_2(M_2)$. Wir betrachten das Bild von M_1 :

$$(8) \quad B_1 \stackrel{\text{df}}{=} B(M_1; T_1)$$

und setzen

$$(9) \quad M_0 \stackrel{\text{df}}{=} M_2 \cap B_1.$$

Ist M_0 leer, so kann man über Zusammensetzung der Transformationen T_1 und T_2 *nicht* sprechen. Ist dagegen:

$$(10) \quad M_0 \neq \emptyset,$$

so setzen wir:

$$(11) \quad M_3 \stackrel{\text{df}}{=} \dot{x} : \{T_1(x) \in M_0\}.$$

M_3 ist dann auch nicht leer. Wir definieren nun die neue Transformation T_3 im Gebiet M_3 wie folgt:

$$(12) \quad x \in M_3 \supset T_3(x) \stackrel{\text{df}}{=} T_2\{T_1(x)\}.$$

Wir führen die Bezeichnung

$$(13) \quad T_3 = T_2 \cdot T_1$$

ein und nennen T_3 die Zusammensetzung von T_1 und T_2 in der Reihenfolge T_1, T_2 .

In Auffassung von Veblen und Whitehead bildet T_3 nicht die Zusammensetzung von T_1 und T_2 , sondern die Zusammensetzung von T_1^* und T_2^* , wenn T_1^* die Einschränkung von T_1 auf M_3 und T_2^* die Einschränkung von T_2 auf M_0 ist.

Definition. Eine Menge \mathfrak{G} von Transformationen T soll eine Pseudogruppe im weiteren Sinne heißen, wenn folgende vier Axiome erfüllt sind:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad T(D) \in \mathfrak{G} \supset D \in \mathfrak{M}. \\ 2. \quad T_1(D_1) \in \mathfrak{G}, \quad D_2 \subset D_1, \quad D_2 \in \mathfrak{M} \supset T_1(D_2) \in \mathfrak{G}. \\ 3. \quad T_1(D_1) \in \mathfrak{G}, \quad D_2 = B(D_1; T_1), \quad T_2(D_2) \in \mathfrak{G} \supset T_2 \cdot T_1(D_1) \in \mathfrak{G}. \\ 4. \quad T_1(D_1) \in \mathfrak{G}, \quad a \in D_1 \supset (\exists D_0, T_2(D_2)) \{D_0 \in \mathfrak{M}, \quad a \in D_0, \\ \quad D_0 \subset D_1, \quad D_2 = B(D_0; T_1), \quad T_2(D_2) \in \mathfrak{G}, \quad T_2 \cdot T_1(D_0) \equiv J(D_0)\}. \end{array} \right.$$

Wir fügen folgende wörtliche Erläuterungen hinzu.

Das erste Axiom sagt aus, daß zu \mathfrak{G} nur solche Transformationen gehören, deren Existenzgebiet eine offene Menge ist.

Das zweite Axiom drückt aus, daß die Einschränkung einer Transformation der Pseudogruppe auf eine offene Teilmenge wieder eine Transformation der Pseudogruppe ist.

Das dritte Axiom kann das abgeschwächte Zusammensetzungsaxiom genannt werden. Es besagt, daß jede Zusammensetzung von zwei Transformationen der Menge \mathfrak{G} , insofern sie im Sinne von Veblen-Whitehead existiert, auch zu \mathfrak{G} gehört. Wir werden unten beweisen können, daß auch jede Zusammensetzung im Sinne von Schouten-Haantjes zu \mathfrak{G} gehört.

Das vierte Axiom endlich kann als lokale Umkehrbarkeit der Transformationen von \mathfrak{G} betrachtet werden. Es ist also schwächer als das Axiom (ii) von Veblen-Whitehead, das die Existenz der inversen Transformation im großen postuliert.

Wir beweisen nun (bei den oben eingeführten Bezeichnungen) den folgenden

Satz.

$$(14) \quad T_1(D_1) \in \mathfrak{G}, \quad T_2(D_2) \in \mathfrak{G}, \quad M_3 \neq 0 \supset T_2 \cdot T_1(M_3) \in \mathfrak{G}.$$

Beweis. Wir behaupten, daß M_3 eine offene Menge ist. Um dies zu beweisen, bestätigen wir zunächst, daß M_0 offen ist. Da M_0 den Durchschnitt von D_2 mit B_1 darstellt und da, wegen des Axioms 1 und der Voraussetzung $T_2(D_2) \in \mathfrak{G}$, D_2 offen ist, so genügt es zu zeigen, daß B_1 offen ist. B_1 ist aber das Bild von D_1 vermöge der Transformation T_1 ; D_1 ist offen auf Grund des Axioms 1. Aus dem Axiom 4 folgt aber, daß die Transformation T_1 im kleinen umkehrbar ist. Daraus folgt schon leicht, daß B_1 offen sein muß. Da M_0 nicht leer ist, was aus $M_3 \neq 0$ unmittelbar hervorgeht, so ist M_0 offen. Nun soll gezeigt werden, daß auch M_3 offen ist. Zwecks Zurückführung ad absurdum nehmen wir vorläufig an, daß M_3 nicht offen ist. Es gibt also einen Punkt x_0 , der zu M_3 gehört, der aber kein innerer Punkt von M_3 ist. Da definitionsgemäß M_3 einen Teil von D_1 bildet, so gehört x_0 zu D_1 , ist also in D_1 ein innerer Punkt. Setzen wir $y_0 = T_1(x_0)$, so ist $y_0 \in M_0$, und da M_0 offen ist, so ist y_0 ein innerer Punkt der Menge M_0 . Nehmen wir

eine (offene) Umgebung U des Punktes x_0 hinreichend klein, damit folgende Relationen gelten:

$$(15) \quad U \subset D_1; \quad B(U; T_1) \subset M_0.$$

Es ist möglich, die erste Relation auf Grund eines der vorausgesetzten Hausdorffschen Axiome zu erreichen. Daß auch die zweite erreichbar ist, geht daraus hervor, daß, wenn sich U zu x_0 , $B(U; T_1)$ gleichzeitig zu y_0 zusammenzieht. Die letzte Tatsache folgt wieder aus dem Axiom 4. $B(U; T_1) \subset M_0$ bedeutet aber, daß $U \subset M_3$, und da x_0 ein innerer Punkt von U ist, so ist gleichzeitig x_0 ein innerer Punkt von M_3 , wider die Voraussetzung. Somit haben wir bewiesen, daß M_3 offen ist.

Auf Grund des zweiten Axioms können wir also schließen: $T_1(M_3) \in \mathfrak{G}$. Daraus folgt auf Grund des dritten Axioms, daß auch $T_2 \cdot T_1(M_3) \in \mathfrak{G}$, was zu beweisen war.

Bemerkung. Aus dem obigen Beweisverfahren folgt zugleich das folgende Nebenresultat.

Satz. Die Transformationen der Pseudogruppe \mathfrak{G} sind notwendigerweise stetig.

Pseudogruppen im engeren Sinne.

Der Begriff der Pseudogruppe im oben angegebenen Sinne scheint den Zwecken der modernen Theorie der geometrischen Objekte zu genügen.

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der Pseudogruppe etwas weiter einschränken, und zwar so, daß wir zu einem Begriff gelangen, der sich nicht allzusehr von dem klassischen Begriffe der Gruppe entfernen wird. Wir werden nämlich noch zwei weitere Axiome hinzufügen, die uns erlauben werden, von dem Begriff der Pseudogruppe ausgehend, mit Hilfe eines Abstraktionsprozesses zu einer Gruppe im abstrakten Sinne zu kommen.

Definition. Eine Menge \mathfrak{G}^* von Transformationen T soll eine Pseudogruppe im engeren Sinne heißen, wenn außer den vier früher angegebenen Axiomen noch zwei weitere erfüllt sind. Zusammenfassend sollen die folgenden sechs Axiome angenommen werden:

- $$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad T(D) \in \mathfrak{G}^* \supset D \in \mathfrak{M}. \\ 2. \quad T_1(D_1) \in \mathfrak{G}^*, \quad D_2 \subset D_1, \quad D_2 \in \mathfrak{M} \supset T_1(D_2) \in \mathfrak{G}^*. \\ 3. \quad T_1(D_1) \in \mathfrak{G}^*, \quad D_2 = B(D_1; T_1), \quad T_2(D_2) \in \mathfrak{G}^* \supset T_2 \cdot T_1(D_1) \in \mathfrak{G}^*. \\ 4. \quad T_1(D_1) \in \mathfrak{G}^*, \quad a \in D_1 \supset (\exists D_0, T_2(D_2)) \{D_0 \in \mathfrak{M}, \quad a \in D_0, \quad D_0 \subset D_1, \\ \quad D_2 = B(D_0; T_1), \quad T_2(D_2) \in \mathfrak{G}^*, \quad T_2 \cdot T_1(D_0) \equiv J(D_0)\}. \\ 5. \quad T_1(D_1) \in \mathfrak{G}^*, \quad T_2(D_2) \in \mathfrak{G}^*, \quad D_3 \subset D_1 \cap D_2, \quad D_3 \in \mathfrak{M}, \\ \quad T_1(D_3) \equiv T_2(D_3) \supset T_1(D_1 \cap D_2) \equiv T_2(D_1 \cap D_2). \\ 6. \quad T_1(D_1) \in \mathfrak{G}^*, \quad D_3 \in \mathfrak{M} \supset [(\exists T_2(D_2)) \{D_1 \subset D_2, \quad D_2 \cap D_3 \neq 0, \\ \quad T_2(D_2) \in \mathfrak{G}^*, \quad T_2(D_1) \equiv T_1(D_1)\}]. \end{array} \right.$$

Das fünfte Axiom besagt, daß zwei Transformationen der Menge \mathfrak{G}^* im ganzen gemeinsamen Teile ihrer Existenzgebiete identisch sein müssen, falls sie in einer offenen Menge identisch sind. Dieses Axiom kann auch so ausgesprochen werden: die Erweiterung jeder Transformation $T_1(D_1)$ aus \mathfrak{G}^* ist eindeutig durch Angabe von D_2 definiert, sobald sie zu \mathfrak{G}^* selbst gehört.

Das sechste und letzte Axiom sagt aus, daß jede Transformation der Menge \mathfrak{G}^* so erweitert werden kann, daß das Existenzgebiet der Erweiterung mit einer beliebigen a priori gegebenen offenen Menge etwas Gemeinsames hat.

Definition. Wir sagen, daß zwischen zwei Transformationen T_1 und T_2 aus \mathfrak{G}^* die Relation R besteht, und wir schreiben:

$$(16) \quad T_1 R T_2$$

dann und nur dann, wenn für je zwei Erweiterungen T_1^* von T_1 und T_2^* von T_2 , die zu \mathfrak{G}^* gehören und deren Existenzgebiete einen nicht leeren gemeinsamen Teil D_0 besitzen, folgende Identität

$$(17) \quad T_1^*(D_0) \equiv T_2^*(D_0)$$

gilt.

Wir behaupten nun, daß die Relation (16) zwischen T_1 und T_2 besteht, falls es wenigstens ein Paar von Erweiterungen T_1^* und T_2^* gibt, die den in der obigen Definition zur Sprache kommenden Bedingungen genügen.

In der Tat setzen wir voraus, daß

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1(D_1) \subset T_1^*(D_1^*), \quad T_2(D_2) \subset T_2^*(D_2^*), \quad D_0 \stackrel{\text{df}}{=} D_1^* \cap D_2^* \neq 0, \\ T_1^* \in \mathfrak{G}^*, \quad T_2^* \in \mathfrak{G}^*, \quad T_1^*(D_0) \equiv T_2^*(D_0), \end{array} \right.$$

und nehmen zwei weitere Transformationen T_1^{**} und T_2^{**} von den Eigenschaften:

$$(19) \quad T_1 \subset T_1^{**}, \quad T_2 \subset T_2^{**}, \quad D_0 \stackrel{\text{df}}{=} D_1^{**} \cap D_2^{**} \neq 0, \quad T_1^{**} \in \mathfrak{G}^*, \quad T_2^{**} \in \mathfrak{G}^*.$$

Es ist zu beweisen, daß

$$(20) \quad T_1^{**}(D_0^*) \equiv T_2^{**}(D_0^*)$$

ist. Auf Grund des Axioms 6 gibt es in \mathfrak{G}^* eine Transformation $T_3(D_3)$, die eine Erweiterung von T_1^{**} darstellt und die die Eigenschaft besitzt, daß $\bar{D} \stackrel{\text{df}}{=} D_3 \cap D_0 \neq 0$ ist. Auf Grund desselben Axioms folgern wir weiter, daß es in \mathfrak{G}^* eine Transformation $T_4(D_4)$ gibt, die eine Erweiterung von T_2^{**} ist und für die zugleich: $D \stackrel{\text{df}}{=} D_4 \cap D \neq 0$ gilt. Die Transformation T_3 als eine Erweiterung von T_1^{**} ist zugleich eine Erweiterung von T_1 . Es ist also $T_3(D_1) \equiv T_1(D_1)$. Andererseits haben wir $T_1^*(D_1) \equiv T_1(D_1)$, $T_1^{**}(D_1) \equiv T_1(D_1)$, folglich $T_3(D_1) \equiv T_1^*(D_1)$. Nach dem Axiom 5 besteht

also die Identität: $T_3(D_3 \cap D_1^*) \equiv T_1^*(D_3 \cap D_1^*)$. Da aber $D \subset D_3 \cap D_1^*$ ist, so haben wir insbesondere $T_3(D) \equiv T_1^*(D)$. Auf analoge Weise bekommen wir $T_4(D) \equiv T_2^*(D)$. Da aber $D \subset D_0$ ist, so haben wir $T_1^*(D) \equiv T_2^*(D)$, also $T_3(D) \equiv T_4(D)$. Daraus folgt auf Grund des Axioms 5: $T_3(D_3 \cap D_4) \equiv T_4(D_3 \cap D_4)$, also insbesondere — da $D_0^* \subset D_3 \cap D_4$ —: $T_3(D_0^*) \equiv T_4(D_0^*)$, worin $T_1^{**}(D_0^*) \equiv T_2^{**}(D_0^*)$ enthalten ist. Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir behaupten nun, daß die Relation R eine *Äquivalenzrelation* ist, d. h. daß sie die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } T R T \text{ für jedes } T \in \mathfrak{G}^*. \\ \text{II. } T_1 R T_2 \supset T_2 R T_1. \\ \text{III. } T_1 R T_2, T_2 R T_3 \supset T_1 R T_3. \end{array} \right.$$

Die ersten zwei Eigenschaften sind in trivialer Weise erfüllt, was im ersten Augenblick ersichtlich ist. Einen Beweis erfordert nur die dritte Transitivitätseigenschaft. Wir setzen also voraus, daß

$$(22) \quad T_1 R T_2 \text{ und } T_2 R T_3$$

ist. Nehmen wir solche Erweiterung $T_1^*(D_1^*)$ von T_1 , für welche $D_0^* \stackrel{\text{df}}{=} D_2 \cap D_1^* \neq 0$ gilt. Eine solche ist auf Grund des Axioms 6 in \mathfrak{G}^* zu finden. Ferner nehmen wir eine solche Erweiterung $T_3^*(D_3^*)$ von T_3 , für welche $D_0 \stackrel{\text{df}}{=} D_3 \cap D_0^* \neq 0$ gilt. Eine solche existiert in \mathfrak{G}^* aus demselben Grunde wie oben. In D_0 haben wir also infolge der Definition (wenn für T_2^* T_2 selbst angenommen wird): $T_1^*(D_0) \equiv T_2(D_0)$, $T_3^*(D_0) \equiv T_2(D_0)$, also $T_1^*(D_0) \equiv T_3^*(D_0)$. Auf Grund des bewiesenen Hilfssatzes folgt schon daraus $T_1 R T_3$, was zu beweisen war.

Die Relation R gibt uns also nach dem Vorschlag von Peano und Russell-Whitehead zu dem *Abstraktionsprozeß* Anlaß. Zu jeder $T \in \mathfrak{G}^*$ bilden wir nämlich das sogenannte *Abstractum* von T , das wir mit $\mathfrak{A}(T)$ bezeichnen und das folgendermaßen definiert wird:

$$(23) \quad \mathfrak{A}(T) \stackrel{\text{df}}{=} \widehat{S} : \{S \in \mathfrak{G}^*, T R S\}.$$

$\mathfrak{A}(T)$ ist also die Klasse aller derjenigen Transformationen aus \mathfrak{G}^* , die mit dem gegebenen T in der Relation R stehen. Auf diese Weise ist \mathfrak{G}^* in Unterklassen gespaltet worden, von denen je zwei kein gemeinsames Element besitzen. Es ist nämlich eine der wohlbekannten Eigenschaften der Abstracta, daß für zwei beliebige Abstracta $\mathfrak{A}(T_1)$ und $\mathfrak{A}(T_2)$ eine und nur eine der beiden Möglichkeiten:

$$(24) \quad \mathfrak{A}(T_1) = \mathfrak{A}(T_2) \text{ oder } \mathfrak{A}(T_1) \cap \mathfrak{A}(T_2) = 0$$

stattfindet.

Wir erklären nun G als die Gesamtheit aller Abstracta. $\mathfrak{A}_1 \in G$ soll also folgendes bedeuten:

$$(25) \quad \mathfrak{A}_1 \in G \stackrel{\text{def}}{=} (\exists T) \{T \in \mathfrak{G}^*, \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(T)\}.$$

Für die Elemente von G werden wir nun eine Zusammensetzungsrelation definieren und alsdann zeigen, daß G eine abstrakte Gruppe im klassischen Sinne bildet.

Greifen wir aus G zwei beliebige Elemente \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 heraus. Es ist also

$$(26) \quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(T_1), \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}(T_2), \text{ wo } T_1 \in \mathfrak{G}^*, T_2 \in \mathfrak{G}^*.$$

Wir nehmen eine solche Erweiterung $T_2^* \in \mathfrak{G}^*$ von T_2 , die die Eigenschaft: $D_0 \stackrel{\text{def}}{=} D_2^* \cap B(D_1; T_1) \neq 0$ besitzt. Eine solche zu finden, ist auf Grund des Axioms 6 und der früher festgestellten Tatsache möglich, daß $B(D_1; T_1) \in \mathfrak{M}$. Wir bilden jetzt die Zusammensetzung $T_2^* \cdot T_1(D_3) \stackrel{\text{def}}{=} T_3(D_3)$, wo $D_3 \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} : \{T_1(x) \in D_0\}$ ist. Auf Grund des bewiesenen Satzes (14) ist $T_2^* \cdot T_1(D_3) \in \mathfrak{G}^*$. Wir setzen:

$$(27) \quad \mathfrak{A}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{A}(T_3)$$

und definieren \mathfrak{A}_3 als Zusammensetzung von \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 .

Damit diese Definition einwandfrei sei, soll gezeigt werden, daß $\mathfrak{A}(T_3)$ von der Wahl der Transformationen T_1, T_2 und T_2^* unabhängig ist. Gehen wir also von einem anderen Paar von Transformationen \bar{T}_1 und \bar{T}_2 aus, die nur die Eigenschaft haben, daß $\bar{T}_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $\bar{T}_2 \in \mathfrak{A}_2$ ist. Betrachten wir solche Erweiterungen T_1^* von T_1 und \bar{T}_1^* von \bar{T}_1 , für welche $D_1^* \cap \bar{D}_1^* \stackrel{\text{def}}{=} U_0 \neq 0$ ist. Die Existenz solcher Erweiterungen ist uns vermöge des Axioms 6 gesichert. Da für $x \in U_0$: $T_1^*(x) \equiv \bar{T}_1^*(x)$ ist, so können wir folgende Bezeichnung einführen:

$$(28) \quad B_0 \stackrel{\text{def}}{=} B(U_0; T_1^*) = B(U_0; \bar{T}_1^*).$$

Wir betrachten ferner solche Erweiterungen T_2^{**} von T_2^* (also auch von T_2) und \bar{T}_2^{**} von \bar{T}_2^* (also auch von \bar{T}_2), für welche

$$(29) \quad B_0^* \stackrel{\text{def}}{=} B_0 \cap D_2^{**} \cap \bar{D}_2^{**} \neq 0$$

besteht. Da $\mathfrak{A}(T_2) = \mathfrak{A}(\bar{T}_2)$, so haben wir definitionsgemäß

$$(30) \quad T_2^{**}(B_0^*) \equiv \bar{T}_2^{**}(B_0^*).$$

Wir definieren nun:

$$(31) \quad U_0^* \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} : \{x \in U_0, T_1^*(x) \in B_0^*\}$$

und betrachten die beiden Zusammensetzungen

$$(32) \quad T_2^{**} \cdot T_1^*(U_0^*) \quad \text{und} \quad \bar{T}_2^{**} \cdot \bar{T}_1^*(U_0^*).$$

Aus (30) und (31) folgt, daß beide Zusammensetzungen identisch sind. Daraus geht weiter hervor, daß

$$(33) \quad T_2^* \cdot T_1 R \bar{T}_2^* \cdot \bar{T}_1$$

ist und daß folglich $\mathfrak{A}(T_2)$ in eindeutiger Weise definiert ist.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Menge G mit der soeben definierten Zusammensetzungsvorschrift eine abstrakte Gruppe im klassischen Sinne bildet.

Zu diesem Zweck genügt es zu zeigen, daß die vier im § 6 der „Modernen Algebra“ von van der Waerden formulierten Bedingungen hier erfüllt sind. Was die erste Bedingung betrifft, haben wir dies schon gezeigt (es wird gefordert, daß die Zusammensetzung von zwei Elementen aus G wiederum zu G gehört). Die zweite Bedingung ist das Assoziativgesetz:

$$(34) \quad \mathfrak{A}_3 \cdot (\mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{A}_1) = (\mathfrak{A}_3 \cdot \mathfrak{A}_2) \cdot \mathfrak{A}_1.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die Zusammensetzung von Funktionen (Transformationen) diesem Gesetze unterliegt. Nehmen wir nämlich drei beliebige Transformationen T_1, T_2 und T_3 aus \mathfrak{G}^* , die nur den Bedingungen genügen, daß

$$(35) \quad B(T_2 \cdot T_1) \cap D_3 \neq 0, \quad B(T_1) \cap D(T_3 \cdot T_2) \neq 0$$

ist. Wir haben dann für alle x einer \mathfrak{M} -Menge die Identität

$$(36) \quad T_3 \{T_{21}(x)\} \equiv T_{32}\{T_1(x)\},$$

wenn T_{21} kurz statt $T_2 \cdot T_1$ und T_{32} kurz statt $T_3 \cdot T_2$ geschrieben wird.

Als nächstes werden wir das Einselement \mathfrak{E} in G definieren. Aus dem Axiom 4 und 3 folgt nämlich, daß zu \mathfrak{G}^* gewisse (d. h. mit gewissen Existenzgebieten) identische Transformationen gehören. Nehmen wir eine von ihnen, nennen wir sie $J(U)$ und setzen:

$$(37) \quad \mathfrak{E} \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{A}(J).$$

Es ist trivial zu bestätigen, daß die folgende Relation:

$$(38) \quad \mathfrak{A} \in G \supset \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$$

erfüllt ist.

Hiermit ist in G die Existenz (mindestens) eines (linksseitigen) Einselementes bewiesen.

Es bleibt uns nur noch die vierte Bedingung zu verifizieren, die besagt, daß zu jedem \mathfrak{A}_1 aus G mindestens ein linksseitiges Inverses \mathfrak{A}_1^{-1} in G existiert. Wir gehen von einem beliebigen $T_1 \in \mathfrak{A}_1$ aus. Nach dem Axiom 4 gibt es in \mathfrak{G}^* eine T_2 , für welche $T_2 \cdot T_1 = J$ ist. Wir setzen

$$(39) \quad \mathfrak{A}_1^{-1} \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{A}(T_2).$$

Man beweist nun ohne größere Schwierigkeiten, daß die Beziehung

$$(40) \quad \mathfrak{A}_1^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E}$$

erfüllt ist.

Hiermit sind alle vier Bedingungen erfüllt, und dies genügt, daß G eine abstrakte Gruppe im klassischen Sinne ist. Daraus folgt schon die Eindeutigkeit des Einselementes und die Eindeutigkeit des Inversen⁵⁾.

Die Axiome 5 und 6 sind ziemlich einschränkend. Aus ihnen folgt nämlich, daß die Transformationen der Pseudogruppe \mathfrak{G}^* im großen umkehrbar sein müssen, obwohl im Axiom 4 nur die lokale Umkehrbarkeit vorausgesetzt wurde.

Die Pseudogruppe \mathfrak{G} (im weiteren Sinne) dagegen kann ganz gut auch solche Transformationen enthalten, die im großen nicht umkehrbar sind.

⁵⁾ Vgl. z. B. van der Waerden, l. c., S. 16 u. 17.

(Eingegangen am 3. 2. 1939.)

Berichtigung

zu der Arbeit von B. Schoeneberg:

„Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsstitutionen“^{*}).

Seite 514, Formel (7): lies „ $(-i)^{k\alpha}$ “ statt „ $(-i)^{r\alpha}$ “ neben dem Gleichheitszeichen im Zähler.

Seite 515, Formel II: lies „ $(-i)^{r+2k\alpha}$ “ statt „ $(-i)^{k\alpha}$ “.

Seite 515, Formel (11): $\frac{1}{\pi^k}$ ist zu streichen.

Seite 516, Zeile 2: „und $P_k(n)$ durch $\pi^k P_k(n)$ “ ist zu streichen.

Seite 516, Formel (12) und Zeile 18: lies „ $i^{r+2k} c^{r\alpha}$ “ statt „ $(ic)^{r\alpha}$ “.

Seite 520, Formel (19): lies „ $(-i)^{r+2k\alpha}$ “ statt „ $(-i)^{r\alpha}$ “.

Seite 520, Zeile 20 ist zu ersetzen durch: Da nämlich θ eine Form der Stufe 1 ist, muß $(-i)^r = 1$ sein.

^{*}) Math. Annalen 116 (1939), S. 511–523.

